coordenado

Exame – MA-327 - Álgebra Linear – 21/01/2021

Nome:____ **RA:**_______________

Atenção: Todas as respostas devem ser acompanhadas de justificativas. Respostas sem justificativas não serão consideradas.

1. (3pt) Seja $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2 e considere

$$U = \left\{ p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R});\ \int_{-1}^{1} p(x)dx + 2p'(0) = 0 \right\}.$$

(a) (1pt) Verifique que U é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$;

RESPOSTA: Dados, $p, q \in U$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos que

$$\int_{-1}^{1} (\alpha p + \beta q)(x)dx + 2(\alpha p + \beta q)(0) = \alpha \int_{-1}^{1} p(x)dx + \beta \int_{-1}^{1} q(x)dx + \alpha 2p(0) + \beta 2q(0)$$

$$= \alpha \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} p(x)dx + 2p(0) \right)}_{=0,\ \text{pois } p \in U} + \beta \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} q(x)dx + 2q(0) \right)}_{=0,\ \text{pois } q \in U} = 0,$$

mostrando que $\alpha p + \beta q \in U$ e consequentemente que U é um subespaço vetorial.

(b) (1pt) Encontre uma base para U;

RESPOSTA: Se $p(x) = a + bx + cx^2$ temos que, $p' = b + 2cx$

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx = \int_{-1}^{1} (a + bx + cx^2)dx = \left(ax + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^{1}$$

$$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} - \left(-a + \frac{b}{2} - \frac{c}{3} \right) = 2a + \frac{2}{3}c.$$

Como $p'(0) = \cancel{a}\ b$, temos que $p \in U$ se e somente se

$$0 = \int_{-1}^{1} p(x)dx + 2p'(0) = 2a + \frac{2}{3}c + 2\cancel{a}\,b \iff c = -\cancel{6}\,3a - 3b = -3(a+b)$$

donde

$$p(x) = a + bx - \cancel{6ax^2} = \cancel{a(1 - 6x^2) + bx},$$

$$-3ax^2 - 3bx^2$$

$$= a(1-3x^2) + b(x - 3x^2)$$

LI $\Leftarrow$ $\boxed{b=0}$

$\forall x$ $= 0$ $\Uparrow$ $x=1$

$*$ $x = 0$ $a + b0 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$

$1-3x^2, x-3x^2$ é LI, veja *

implicando que $U = [\{\cancel{x}, \cancel{1-6x^2}\}]$. Além disso, ~~sendo os graus de $1-6x^2$ e x diferentes, temos que o conjunto $\{x, 1-6x^2\}$ é L.I.~~ e portanto uma base para U.

(c) (1pt) Encontre $W \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $U \oplus W = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

RESPOSTA: Como $\dim U = 2$ e $\dim \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = 3$, qualquer subespaço W tal que

$$\dim W = 1 \quad \text{e} \quad W \cap U = \{0\},$$

satisfaz o pedido. ~~Por outro lado, qualquer combinação linear não trivial dos elementos básicos de U dados no item (a) terá sempre grau 1 ou 2 e portanto $1 \notin U$.~~

~~Assim~~ $W = [\{1\}]$ satisfaz as duas condições acima e consequentemente $\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

2. (3pt) Considere o espaço $\mathbb{R}^3$ e defina a aplicação

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2 + z_1z_2.$$

(a) (1pt) Mostre que aplicação acima é um produto interno;

RESPOSTA: A simetria segue direto do fato de que produto de números reais é comutativo. Também,

$$\langle \lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \rangle = \langle (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2), (x_3, y_3, z_3) \rangle$$

$$\begin{aligned} &(\lambda x_1 + x_2)x_3 + 2(\lambda x_1 + x_2)y_3 + 2y_3(\lambda x_1 + x_2) + 2(\lambda y_1 + y_2)y_3 + (\lambda z_1 + z_2)z_3 \\ &= \lambda(x_1x_3 + 2x_1y_3 + x_3y_1 + 2y_1y_3 + z_1z_3) + x_2x_3 + 2x_2y_3 + x_3y_2 + 2y_2y_3 + z_2z_3 \\ &= \lambda\langle (x_1, y_1, z_1), (x_3, y_3, z_3) \rangle + \langle (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \rangle, \end{aligned}$$

mostrando a linearidade.

Para mostrar a positividade, note que

$$x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2 + z_1z_2 = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) + y_1y_2 + z_1z_2,$$

e portanto

$$\langle (x, y, z), (x, y, z) \rangle = (x + y)^2 + y^2 + z^2 \geq 0,$$

com

$$\langle (x, y, z), (x, y, z) \rangle = 0 \iff x + y = y = z = 0 \iff x = y = z = 0,$$

mostrando que a aplicação é de fato um produto interno.

(b) (1pt) Dado $u = (-1, 1, 2)$ encontre $[u]^\perp$ com relação ao produto interno acima;

RESPOSTA: Temos que

$$(x, y, z) \in [u]^\perp \iff \langle (x, y, z), (-1, 1, 2) \rangle = 0.$$

Mas por definição,

$$\langle (x,y,z), (-1,1,2)\rangle = x\cdot(-1) + x\cdot 1 + (-1)\cdot y + 2\cdot y\cdot 1 + z\cdot 2$$
$$= y + 2z,$$

e portanto,

$$[u]^{\perp} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ y+2z=0\}.$$

(c) (1pt) Dado $v=(1,0,1)$, encontre $w_1\in[u]$ e $w_2\in[u]^{\perp}$ tal que $v=w_1+w_2$.

RESPOSTA: Por unicidade, é suficiente encontrar $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $v-\lambda u\perp u$. Assim,

$$0 = \langle v-\lambda u, u\rangle = \langle (1+\lambda, -\lambda, 1-2\lambda), (-1,1,2)\rangle$$
$$= (1+\lambda)\cdot(-1) + (1+\lambda)\cdot 1 + (-1)\cdot(-\lambda) + 2\cdot(-\lambda)\cdot 1 + (1-2\lambda)\cdot 2$$
$$= -(1+\lambda) - 2\lambda + 2 = 2 - 5\lambda \quad\Longrightarrow\quad \lambda = \frac{2}{5}.$$

Disso,

$$w_1 = \frac{2}{5}(-1,1,2) \ \text{ e } \ w_2 = (1,0,1) - \frac{2}{5}(-1,1,2) = \frac{1}{5}(7,-2,1)$$

3. (4pt) Seja V o espaço vetorial das matrizes 2×2 triangulares superiores, defina $T: V\to V$ dada por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c & a+c \\ 0 & a+b+2c\end{pmatrix},$$

e considere as bases de V,

$$\beta = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\},$$
$$\alpha = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

(a) (1pt) Determine $[T]^{\beta}_{\beta}$ e $[T]^{\beta}_{\alpha}$;

RESPOSTA: Temos que

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

e portanto

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Analogamente,

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e portanto

$$[T]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) (1pt) Encontre bases para $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$;

RESPOSTA: Note que

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c & a+c \\ 0 & a+b+2c \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= (b+c)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (a+c)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$\left[\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}\right] = \mathrm{Im}(T).$$

Como $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ é L.I., temos que tal conjunto é de fato uma base de $\mathrm{Im}(T)$.

Também, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \ker(T)$ se e somente se

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c & a+c \\ 0 & a+b+2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} b+c=0 \\ a+c=0 \\ a+b+2c=0 \end{cases} \iff a=b=-c.$$

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que $\dim\ker(T)=1$ e assim, $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ é uma base para $\ker(T)$.

(c) (1pt) Encontre os autovalores e autovetores de T;

RESPOSTA: O polinômio característico de T é dado por

$$p(\lambda)=\det([T]_\beta^\beta-\lambda I_3)=\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2(2-\lambda)+2+\lambda+\lambda+(\lambda-2)$$

$$=\lambda^2(2-\lambda)+3\lambda=-\lambda(\lambda^2-2\lambda-3)=-\lambda(\lambda+1)(\lambda-3).$$

Portanto, os autovalores de T são 0, -1 e 3. Os autovetores são dados por:

- Como
$$V_0=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\in V; T\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}=\ker(T),$$
temos pelo item (b) acima que $V_0=\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$.

- $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\in V$ é autovetor associado a $\lambda=-1$ se e somente se
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ a+b+3c=0 \end{cases} \iff c=0 \text{ e } a=-b.$$
Assim, $V_{-1}=\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$.

- $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\in V$ é autovetor associado a $\lambda=3$ se e somente se
$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -3a+b+c=0 \\ a-3b+c=0 \\ a+b-c=0 \end{cases} \iff c=2a=2b.$$
Assim, $V_3=\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right]$.

(d) (1pt) Considere o produto interno em V dado por

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2,$$

e encontre uma base ortonormal γ de V tal que T seja diagonal.

RESPOSTA: Basta notar que com o produto interno acima,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

e portanto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\},$$

é base ortogonal de autovetores de T. Assim, como

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 3, \quad \left\| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = 2 \quad \text{e} \quad \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\|^2 = 6,$$

temos que

$$\gamma = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\},$$

é uma base ortonormal que diagonaliza T.

Boa Prova!