# Exame – MA-327 - Álgebra Linear – 21/01/2021

**Nome:**______________________________________________ **RA:**_________________

**Atenção:** Todas as respostas devem ser acompanhadas de justificativas. Respostas sem justificativas não serão consideradas.

1. (3pt) Seja $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 3 e considere

$$U = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R});\ p(-1) + p'(-1) = 0 \text{ e } p(1) = 0\}.$$

(a) (1pt) Verifique que $U$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$;

RESPOSTA: Dados, $p, q \in U$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned}(\alpha p + \beta q)(-1) + (\alpha p + \beta q)'(-1) &= \alpha p(-1) + \beta q(-1) + \alpha p'(-1) + \beta q'(-1) \\ &= \alpha \underbrace{(p(-1) + p'(-1))}_{=0,\ \text{pois } p \in U} + \beta \underbrace{(q(-1) + q'(-1))}_{=0,\ \text{pois } q \in U} = 0,\end{aligned}$$

e

$$(\lambda p + \beta q)(1) = \lambda \underbrace{p(1)}_{=0,\ \text{pois } p \in U} + \beta \underbrace{q(1)}_{=0,\ \text{pois } q \in U} = 0,$$

mostrando que $\alpha p + \beta q \in U$ e consequentemente que $U$ é um subespaço vetorial.

(b) (1pt) Encontre uma base para $U$;

RESPOSTA: Se $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ então $p'(x) = b + 2cx + 3dx^2$ e portanto,

$$p(-1) + p'(-1) = (a - b + c - d) + (b - 2c + 3d) = a - c + 2d \quad \text{e} \quad p(1) = a + b + c + d.$$

Assim, $p \in U$ se e somente se

$$a - c + 2d = 0 \quad \text{e} \quad a + b + c + d = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = c - 2d \quad \text{e} \quad b = -2c + d,$$

donde

$$p(x) = (c - 2d) + (-2c + d)x + cx^2 + dx^3 = c(1 - 2x + x^2) + d(-2 + x + x^3),$$

implicando que $U = [\{1 - 2x + x^2, -2 + x + x^3\}]$. Além disso, sendo os graus de $1 - 2x + x^2$ e $-2 + x + x^3$ diferentes, temos que o conjunto $\{1 - 2x + x^2, -2 + x + x^3\}$ é L.I. e portanto uma base para $U$.

(c) (1pt) Encontre $W \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que $U \oplus W = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

RESPOSTA: Como $\dim U = 2$ e $\dim \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = 4$, qualquer subespaço $W$ tal que

$$\dim W = 2 \quad \text{e} \quad W \cap U = \{0\},$$

satisfaz o pedido. Por outro lado, qualquer combinação linear não trivial dos elementos básicos de $U$ dados no item ($\cancel{a}$ b) terá sempre grau 2 ou 3 e portanto $1 \notin U$ e $x \notin U$.

Assim $W = [\{1, x\}]$ satisfaz as duas condições acima e consequentemente $\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

2. (3pt) Considere o espaço $\mathbb{R}^3$ e defina a aplicação

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2y_1z_2 + 2y_2z_1 + 4z_1z_2.$$

(a) (1pt) Mostre que aplicação acima é um produto interno;

RESPOSTA: A simetria segue direto do fato de que produto de números reais é comutativo. Também,

$$\langle \lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \rangle = \langle (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2), (x_3, y_3, z_3) \rangle$$

$$(\lambda x_1 + x_2)x_3 + 2(\lambda y_1 + y_2)y_3 + 2(\lambda y_1 + y_2)z_3 + 2y_3(\lambda z_1 + z_2) + 4(\lambda z_1 + z_2)z_3$$

$$= \lambda(x_1x_3 + 2y_1y_3 + 2y_1z_3 + 2y_3z_1 + 4z_1z_3) + x_2x_3 + 2y_2y_3 + 2y_2z_3 + 2y_3z_2 + 4z_2z_3$$

$$= \lambda\langle (x_1, y_1, z_1), (x_3, y_3, z_3) \rangle + \langle (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \rangle,$$

mostrando a linearidade.

Para mostrar a positividade, note que

$$x_1x_2 + 2y_1y_2 + \underbrace{2y_1z_2 + 2y_2z_1}_{+4yz} + 4z_1z_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + (y_1 + 2z_1)(y_2 + 2z_2),$$

$x^2 + 2y^2 + 4yz + 4z^2$

e portanto

$$\langle (x, y, z), (x, y, z) \rangle = x^2 + y^2 + (y + 2z)^2 \geq 0,$$

com

$$\langle (x, y, z), (x, y, z) \rangle = 0 \iff x = y = y + 2z = 0 \iff x = y = z = 0,$$

mostrando que a aplicação é de fato um produto interno.

(b) (1pt) Dado $u = (-1, 1, 0)$ encontre $[u]^\perp$ com relação ao produto interno acima;

RESPOSTA: Temos que

$$(x, y, z) \in [u]^\perp \iff \langle (x, y, z), (-1, 1, 0) \rangle = 0.$$

Mas por definição,

$$\langle (x, y, z), (-1, 1, 0) \rangle = x \cdot (-1) + 2 \cdot y \cdot 1 + 2 \cdot y \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot z + 4 \cdot z \cdot 0$$

$$= -x + 2y + 2z,$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $[u]^\perp$

e portanto,

$$[u]^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 2(\overset{z}{\cancel{x}} + y)\}.$$

(c) (1pt) Dado $v = (1, 0, 1)$, encontre $w_1 \in [u]$ e $w_2 \in [u]^\perp$ tal que $v = w_1 + w_2$.

RESPOSTA: Por unicidade, é suficiente encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v - \lambda u \perp u$. Assim,

$$0 = \langle v - \lambda u, u \rangle = \langle (1+\lambda, -\lambda, 1), (-1, 1, 0) \rangle = (1+\lambda)\cdot(-1) + 2\cdot(-\lambda)\cdot 1 + 2\cdot(-\lambda)\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot 1\cdot 0$$

$$= -(1+\lambda) - 2\lambda + 2 = 1 - 3\lambda \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{3}.$$

Disso,

$$w_1 = \frac{1}{3}(-1, 1, 0) \ \text{ e } \ w_2 = (1, 0, 1) - \frac{1}{3}(-1, 1, 0) = \frac{1}{3}(4, -1, 3)$$

3. (4pt) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y + 2z),$$

e considere as seguintes bases de $\mathbb{R}^3$

$$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

$$\alpha = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\}.$$

(a) (1pt) Determine $[T]^\beta_\beta$ e $[T]^\beta_\alpha$;

RESPOSTA: Temos que

$$T(1,0,0) = (0,1,1) = 0\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1),$$

$$T(0,1,0) = (1,0,1) = 1\cdot(1,0,0) + 0\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1),$$

$$T(0,0,1) = (1,1,2) = 1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 2\cdot(0,0,1),$$

e portanto

$$[T]^\beta_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Analogamente,

$$T(1,0,0) = (0,1,1) = 0\cdot(1,0,1) + 1\cdot(0,1,1) + 0\cdot(1,0,0),$$

$$T(0,1,0) = (1,0,1) = 1\cdot(1,0,1) + 0\cdot(0,1,1) + 0\cdot(1,0,0),$$

$$T(0,0,1) = (1,1,2) = 1\cdot(1,0,1) + 1\cdot(0,1,1) + 0\cdot(1,0,0),$$

e portanto

$$[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) (1pt) Encontre bases para $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$;

RESPOSTA: Note que

$$T(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y+2z) = y(1,0,1) + x(0,1,1) + z(1,1,2)$$

$$y(1,0,1) + x(0,1,1) + z[(1,0,1) + (0,1,1)] = (y+z)(1,0,1) + (x+z)(0,1,1).$$

Portanto,

$$[\{(1,0,1),(0,1,1)\}] = \mathrm{Im}(T).$$

Como $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ é L.I., temos que tal conjunto é de fato uma base de $\mathrm{Im}(T)$.
Também, $(x,y,z) \in \ker(T)$ se e somente se

$$T(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y+2z) = (0,0,0),$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \iff x = y = -z.$$

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que $\dim\ker(T) = 1$ e assim, $\{(1,1,-1)\}$ é uma base para $\ker(T)$.

(c) (1pt) Encontre os autovalores e autovetores de $T$;

RESPOSTA: O polinômio característico de $T$ é dado por

$$p(\lambda) = \det([T]_\beta^\beta - \lambda I_3) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2(2-\lambda) + 2 + \lambda + \lambda + (\lambda - 2)$$

$$= \lambda^2(2-\lambda) + 3\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = -\lambda(\lambda+1)(\lambda-3).$$

Portanto, os autovalores de $T$ são $0$, $-1$ e $3$. Os autovetores são dados por:

- Como

$\lambda = 0$

$$V_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; T(x,y,z) = (0,0,0)\} = \ker(T),$$

temos pelo item (b) acima que $V_0 = [(1,1,-1)]$.

-1 • $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ é autovetor associado a $\lambda = -1$ se e somente se

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+3z=0 \end{cases} \iff z=0 \text{ e } x=-y.$$

Assim, $V_{-1} = [(1,-1,0)]$.

3 • $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ é autovetor associado a $\lambda = 3$ se e somente se

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -3x+y+z=0 \\ x-3y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \iff z=2x=2y.$$

Assim, $V_3 = [(1,1,2)]$.

(d) (1pt) Encontre uma base ortonormal $\gamma$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $T$ seja diagonal.

RESPOSTA: Sendo $[T]_\beta^\beta$ simétrica e com três autovalores distintos, os autovetores acima encontrados são ortogonais. Além disso,

$\|(1,1,-1)\|^2 = 1^2+1^2+(-1)^2 = 3$, $\|(1,-1,0)\|^2 = 1^2+(-1)^2+0^2 = 2$ e $\|(1,1,2)\|^2 = 1^2+1^2+2^2 = 6$

Assim,

$$\gamma = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,-1), \frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0), \frac{\sqrt{6}}{6}(1,1,2) \right\},$$

é uma base ortonormal que diagonaliza $T$.

Boa Prova!