Prova 2 – MA-327 - Álgebra Linear – 26/11/2020

Nome:____ **RA:**__________________

Atenção: Todas as respostas devem ser acompanhadas de justificativas. Respostas sem justificativas não serão consideradas.

Problema 2. (2pt) Considere a aplicação $T : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3$ definido da seguinte forma:

$$T(p(x)) = x^2 p''(x) + p'(x) + p(0),$$

onde $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ é o espaço vetorial dos polinômios de grau ≤ 3.

1) (1pt) Determine a matriz da transformação linear T, $[T]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

RESPOSTA: Seja $\beta = \{p_1, p_2, p_3\}$ a base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, onde $p_1(x) = 1, p_2(x) = x$ e $p_3(x) = x^2$. Então: $, p_4 = x^3$

$$T(p_1(x)) = x^2 \underbrace{p_1''(x)}_{=0} + \underbrace{p_1'(x)}_{=0} + \underbrace{p_1(0)}_{=1} = 1 = 1 \cdot p_1(x) + 0 \cdot p_2(x) + 0 \cdot p_3(x), + 0 p_4$$

$$T(p_2(x)) = x^2 \underbrace{p_2''(x)}_{=0} + \underbrace{p_2'(x)}_{=1} + \underbrace{p_2(0)}_{=0} = 1 = 1 \cdot p_1(x) + 0 \cdot p_2(x) + 0 \cdot p_3(x), + 0 p_4$$

$$T(p_3(x)) = x^2 \underbrace{p_3''(x)}_{=2} + \underbrace{p_3'(x)}_{=2x} + \underbrace{p_3(0)}_{=0} = 2x + 2x^2 = 0 \cdot \overbrace{p_1(x)}^{1} + 2 \cdot \overbrace{p_2(x)}^{x} + 2 \cdot \overbrace{p_3(x)}^{x^2}. + 0 \overbrace{p_4}^{x^3}$$

$$T p_4 = 3x^2 + 6x^3 \qquad = 0 \quad 0 \quad 3 \quad 6$$

Assim,

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

2) (1pt) O operador T é diagonalizável? Em caso afirmativo, determine uma base ordenada γ para $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ de modo que $[T]_\gamma^\gamma$ seja uma matriz diagonal.

RESPOSTA: O polinômio característico de T é dado por

$$p_T(\lambda) = \det([T]_\beta^\beta - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)\underbrace{(6-\lambda)}$$

e portanto os autovalores de T são $0, 1$ e 2, 6 Como T possui 3 autovalores distintos e $\dim \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = \cancel{3}\ 4$ temos que T é diagonalizável.

Calculemos os autovetores associados a matriz $[T]_\beta^\beta$.

$\lambda = 0:$ Um vetor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é autovetor de $[T]_\beta^\beta$ se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\xi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Portanto, $V_0 = [(1, -1, 0)]$ é o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 0$. $\boxed{1 - x}$

$\lambda = 1:$ Um vetor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é autovetor de $[T]_\beta^\beta$ se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y = z = 0.$$

$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Portanto, $V_1 = [(1, 0, 0)]$ é o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 1$. $\boxed{1}$

$\lambda = 2:$ Um vetor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é autovetor de $[T]_\beta^\beta$ se, e somente se, $\boxed{1 + x + x^2}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda = 6$

Portanto, $V_2 = [(1, 1, 1)]$ é o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 2$.

$\xi_6 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Agora, sabendo que $[T(p(x))]_\beta = [T]_\beta^\beta [p(x)]_\beta$, temos que uma base γ satisfazendo o pedido é dada por

$$\gamma = \{1, 1 - x, 1 + x + x^2, \tfrac{1}{5} - x - x^2 + 4x\}$$

Problema 1. (2pt) Sejam V espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que se T é uma isometria satisfazendo $T^2 = I$ então T é simétrico.

RESPOSTA: Note inicialmente que para todo $v, w \in V$ temos

$$\|T(v - w)\|^2 = \|T(v) - T(w)\|^2 = \langle T(v) - T(w), T(v) - T(w) \rangle$$

$$= \|T(v)\|^2 - \langle T(v), T(w) \rangle - \langle T(w), T(v) \rangle + \|T(w)\|^2 = \|T(v)\|^2 - 2\langle T(v), T(w) \rangle + \|T(w)\|^2,$$

onde na última igualdade utilizamos que V é um espaço vetorial real. Analogamente

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2$$

No entanto, sendo T uma isometria linear, temos que para todo $v \in V$ vale que $\|T(v) - T(w)\|^2 = \|T(v - w)\|^2 = \|v - w\|^2$ e portanto

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Agora, por definição, T é simétrico se, e somente se, $T = T^*$ se, e somente se,

$$\langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle, \quad \text{para todo } v, w \in V.$$

Assim, se $T^2 = I$, temos

$$\langle T(v), w\rangle = \langle T(v), I(w)\rangle = \langle T(v), T^2(w)\rangle = \langle T(v), T(T(w))\rangle = \langle v, T(w)\rangle,$$

provando a afirmação.

Problema 4. (2pt) Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é dita ser positiva semi-definida se $v^T A v \geq 0$ para todo vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^n$. Prove que uma matriz simétrica $A \in M_n(\mathbb{R})$ é positiva semi-definida se, e somente se, todos seus autovalores são não negativos.

RESPOSTA: Se A é simétrica positiva semi-definida e $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor com autovetor associado $v \in \mathbb{R}^n$, então

$$0 \leq v^T A v = \langle Av, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \|v\|^2 \quad \Longrightarrow \lambda \geq 0.$$

Reciprocamente, sendo A simétrica existe $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ base ortonormal tal que $Av_i = \lambda_i v_i$ com $\lambda_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Tome $v \in \mathbb{R}^n$ e escreva $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ para escalares $a_i \in \mathbb{R}$. Então,

$$v^T A v = \langle Av, v\rangle = \langle \sum_{i=1}^n a_i A v_i, \sum_{j=1}^n a_j v_j\rangle = \sum_{i,j=1}^n a_i \bar{a}_j \langle A v_i, v_j\rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^n a_i \bar{a}_j \lambda_i \langle v_i, v_j = \sum_{i=1}^n a_i \bar{a}_i \lambda_i = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \lambda_i,$$

onde na penúltima igualdade utilizamos que a base é ortonormal. Assim, se $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ temos pela expressão acima que $v^T A v \geq 0$ mostrando que A é positiva semi-definida.

Problema 5. (2pt) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \to V$ uma transformação linear com adjunta T^* satisfazendo $TT^* = T^*T$. Mostre que

$$\ker(T) = \ker(T^*) \quad \text{e} \quad \operatorname{Im}(T) = \operatorname{Im}(T^*).$$

RESPOSTA: Utilizando a definição de adjunta e a comutatividade acima, temos que

$$\|T(v)\|^2 = \langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, T^*(T(v))\rangle = \langle v, T(T^*(v))\rangle = \langle T^*(v), T^*(v)\rangle = \|T^*(v)\|^2.$$

Portanto,

$$v \in \ker(T) \iff T(v) = 0 \iff \|T(v)\|^2 = 0 \iff \|T(v)\|^2 = 0 \iff v \in \ker(T^*),$$

mostrando a primeira igualdade.

Por outro lado, se $v \in \ker(T)$ e $w \in \operatorname{Im}(T^*)$, então existe $u \in V$ tal que $w = T^*(u)$ e portanto

$$\langle v, w\rangle = \langle v, T^*(u)\rangle = \langle T(v), u\rangle = \langle 0, w\rangle = 0,$$

mostrando que $\ker(T) \subset \operatorname{Im}(T^*)^{\perp}$. Sendo $\dim V < \infty$ temos pelo Teorema do núcleo e da imagem que

$$\dim V = \dim\ker(T^*) + \dim\operatorname{Im}(T^*),$$

e também que

$$\dim V = \dim\operatorname{Im}(T^*) + \dim\operatorname{Im}(T^*)^{\perp}.$$

Como já mostramos que $\ker(T) = \ker(T^*)$ concluímos que $\dim\ker(T^*) = \dim\operatorname{Im}(T^*)^{\perp}$. Assim,

$$\ker(T) \subset \operatorname{Im}(T^*) \quad \text{e} \quad \dim\ker(T^*) = \dim\operatorname{Im}(T^*)^{\perp},$$

implicam $\ker(T) = \operatorname{Im}(T^*)^{\perp}$. Utilizando novamente que $\dim V < \infty$ nos fornece que

$$\operatorname{Im}(T^*) = \left(\operatorname{Im}(T^*)^{\perp}\right)^{\perp} = \ker(T^*)^{\perp}.$$

Também, lembrando que $(T^*)^* = T$ temos por acima que

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Im}((T^*)^*) = \ker((T^*)^*)^{\perp} = \ker(T)^{\perp},$$

e portanto,

$$\operatorname{Im}(T) = \ker(T)^{\perp} = \ker(T^*)^{\perp} = \operatorname{Im}(T^*),$$

mostrando o pedido.

Problema 3. (2pt) Mostre que se λ é um autovalor de um operador linear $T : V \to V$ invertível, então $\frac{1}{\lambda}$ é autovalor de T^{-1}.

RESPOSTA: Seja $v \in V$ um autovetor associado ao autovalor λ, isto é, $v \neq 0$ e $T(v) = \lambda v$. Então,

$$v = T^{-1}(T(v)) = T^{-1}(\lambda v) = \lambda T^{-1}(v) \quad \Longrightarrow \quad T^{-1}(v) = \frac{1}{\lambda} v,$$

só se $\lambda \neq 0$....

e portanto $\frac{1}{\lambda}$ é um autovalor de T^{-1}.

$\lambda \neq 0$

$(\lambda = 0 \Rightarrow v = 0$ ↯$)$

Boa Prova!