E

O que é diferente são só:
- enumeração das problemas
- letras dos objetos matemáticos

Prova 3 – MA-327 - Álgebra Linear – 14/01/2021

Nome:____ **RA:**__________________

Atenção: Todas as respostas devem ser acompanhadas de justificativas. Respostas sem justificativas não serão consideradas.

4. (2pt) Seja V um espaço vetorial com dimensão n sobre um corpo $\mathbb{F}$ e $T : V \to V$ um operador linear. As seguintes afirmações são verdadeiras? Justifique.

(iii) (1pt) T é injetor se e somente se $\lambda = 0$ não é um autovalor de T;

RESPOSTA: A afirmação é VERDADEIRA. De fato, se T é injetora então dado $v \in V$ tal que $T(v) = 0 \cdot v = 0$ devemos necessariamente ter $v = 0$ e portanto, $\lambda = 0$ não pode ser um autovalor de T. Provemos a recíproca por contra-positiva, isto é, assumimos que T **não** é injetor e mostremos que $\lambda = 0$ é um autovalor de T. Mas, se T não é injetor, então existe $0 \neq v \in \ker(T)$ e portanto $T(v) = 0 = 0 \cdot v$ mostrando que $\lambda = 0$ é um autovalor de T.

(i) (0.5pt) Todo autovetor de T está associado a somente um autovalor;

RESPOSTA: A afirmação é VERDADEIRA, pois se $v \neq 0$ é um vetor satisfazendo

$$T(v) = \lambda_1 v \quad \text{e} \quad T(v) = \lambda_2 v, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{F},$$

então

$$\lambda_1 v = T(v) = \lambda_2 v \quad \Longrightarrow \quad (\lambda]_1 - \lambda_2)v = 0 \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{v \neq 0} \lambda_1 - \lambda_2 = 0,$$

ou seja, $\lambda_1 = \lambda_2$ e portanto v está associado a um único autovalor.

(ii) (0.5pt) Se T possui somente dois autovalores distintos, então T é diagonalizável.

RESPOSTA: A afirmação é FALSA. Considere por exemplo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a única transformação linear que tem matriz na base canônica dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de T é dado $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)$ e portanto $\lambda = 0$ é autovalor de T com multiplicidade algébrica 2. Por outro lado, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é autovetor associado a $\lambda = 0$ se, e somente se, $y = z = 0$ e portanto

$$V_0 = [\{(1, 0, 0)\}],$$

mostrando que a multiplicidade geométrica de $\lambda = 0$ é igual a 1. Como as multiplicidades algébricas e geométricas associadas a $\lambda = 0$ não coincidem, T não é diagonalizável.

2. (2pt) Considere o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^2$ munido do produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$, e o operador linear $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definido da seguinte forma: $T(z, w) = (z + iw, iz + w)$.

1) (0.5pt) Mostre que o conjunto $\gamma = \{(i, 1), (1, i)\}$ é uma base ordenada para $\mathbb{C}^2$;

RESPOSTA: Note que $a, b \in \mathbb{C}$ satisfazem $a(i, 1) + b(1, i) = (0, 0)$ se e somente se

$$\begin{cases} ai + b = 0 \\ a + bi = 0 \end{cases}.$$

Multiplicando a primeira equação do sistema linear acima pelo número imaginário i, obtemos o sistema linear equivalente

$$\begin{cases} -a + bi = 0 \\ a + bi = 0 \end{cases},$$

que possui somente solução trivial $a = b = 0$, mostrando assim que γ é base de $\mathbb{C}^2$.

2) (0.5pt) Determine a matriz $[T]_\gamma^\gamma$;

RESPOSTA: Temos que

$$T(i, 1) = (i + i, i^2 + 1) = (2i, 0) = 1 \cdot (i, 1) + i \cdot (1, i),$$
$$T(1, i) = (1 + i^2, i + i) = (0, 2i) = i \cdot (i, 1) + 1 \cdot (1, i),$$

e portanto

$$[T]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

3) (1pt) Verifique se T é um operador linear diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma base ordenada β para $\mathbb{C}^2$ de modo que $[T]_\beta^\beta$ seja uma matriz diagonal.

RESPOSTA: O polinômio característico de T é dado por

$$p(\lambda) = \det\left([T]_\gamma^\gamma - \lambda I_2\right) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & i \\ i & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - i^2 = (\lambda^2 - 2\lambda + 1) + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

Assim, T possui dois autovalores distintos $\lambda = 1 + i$ e $\lambda = 1 - i$. Como a dimensão de $\mathbb{C}^2$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ também é igual a 2 e T possui dois autovalores distintos, temos que T é diagonalizável. Uma base β diagonalizando T é então dada pelos autovetores de T, obtidos da seguinte maneira:

$\lambda = 1 + i$: Um vetor $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ é autovetor associado a $1 + i$, se e somente se,

$$\begin{pmatrix} 1-(1+i) & i \\ i & 1-(1+i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -iz + iw = 0 \\ iz - iw = 0 \end{cases} \iff z = w.$$

Assim, $V_{1+i} = [(1, 1)]$ é o autoespaço associado ao autovalor $1 + i$.

$\lambda = 1 - i$: Analogamente, um vetor $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ é autovetor associado a $1 - i$, se e somente se,

$$\begin{pmatrix} 1-(1-i) & i \\ i & 1-(1-i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} iz + iw = 0 \\ iz + iw = 0 \end{cases} \iff z = -w.$$

Assim, $V_{1-i} = [(1, -1)]$ é o autoespaço associado ao autovalor $1 - i$.

Portanto, na base $\beta = \{(1, 1), (1, -1)\}$ temos que $[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 1+i & \cancel{i}\ 0 \\ 0\ \cancel{i} & 1-i \end{pmatrix}$ é diagonal.

5. (2pt) Sejam V espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $T : V \to V$ um operador linear. Mostre que se T é uma isometria e $T = T^*$, então $T^2 = I$.

RESPOSTA: Por definição, a adjunta T^* de T satisfaz

$$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle, \quad \text{para todo} \quad v, w \in V.$$

Como por hipótese $T = T^*$ temos que $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T(w) \rangle$ para todo $v, w \in V$. Em particular,

$$\langle T^2(v), v \rangle = \langle T(T(v)), v \rangle = \langle T(v), T(v) \rangle = \|T(v)\|^2$$

e

$$\langle v, T^2(v) \rangle = \langle v, T(T(v)) \rangle = \langle T(v), T(v) \rangle = \|T(v)\|^2.$$

Agora, sendo T também uma isometria, temos que

$$\|v\| = \|T(v)\| \quad \text{e} \quad \|v\|^2 = \|T^2(v)\|^2 = \langle T^2(v), T^2(v) \rangle$$

e assim,

$$\|T^2(v) - v\|^2 = \langle T^2(v), T^2(v) \rangle - \langle T^2(v), v \rangle - \langle v, T^2(v) \rangle + \langle v, v \rangle.$$

Mas, $T^2 = I$ se, e somente se, $\|T^2(v) - v\| = 0$ para todo $v \in V$ e portanto,

$$\|T^2(v) - v\|^2 = \langle T^2(v) - v, T^2(v) - v \rangle = \underbrace{\langle T^2(v), T^2(v) \rangle}_{\|v\|^2} - \underbrace{\langle T^2(v), v \rangle}_{\|v\|^2} - \underbrace{\langle v, T^2(v) \rangle}_{\|v\|^2} + \underbrace{\langle v, v \rangle}_{\|v\|^2} = 0,$$

provando o pedido.

3. (2pt) Prove que se λ é um autovetor da transformação linear $T : V \to V$, então λ^n é autovetor de T^n.

RESPOSTA: Seja $v \in V$ um autovetor associado ao autovalor λ, ou seja, $T(v) = \lambda v$. Por indução, se $T^{n-1}(v) = \lambda^{n-1} v$ então

$$T^n(v) = T(T^{n-1}(v)) = T(\lambda^{n-1} v) = \lambda^{n-1} T(v) = \lambda^{n-1}(\lambda v) = \lambda^n v,$$

e portanto o resultado é válido,.

1. (2pt) Seja x um número real e considere a matriz quadrada de ordem 3

$$M = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}.$$

Determine todos os valores de x para os quais $v^T M v \geq 0$ para todo vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^3$.

RESPOSTA: Sendo M simétrica, será positiva-definida se, e somente se, seus autovalores forem estritamente positivos. Mas, o polinômio característico de M é dado por

$$p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} x-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & x-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & x-\lambda \end{bmatrix} = (x-\lambda)^3 - 3(x-\lambda) + 2.$$

Definindo o polinômio $q_M(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2$ é fácil notar que a é raiz de q_M se, e somente se, $x - a$ é raiz do polinômio p_M, pois

$$p_M(x-a) = (x-(x-a))^3 - 3(x-(x-a)) + 2 = a^3 - 3a + 2 = q_M(a).$$

Um cálculo simples mostra que

$$q_M(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

e assim, os autovalores de M são $x-1$ e $x+2$. Dessa maneira, M é positiva-definida se, e somente se,

$$x - 1 > 0 \quad \text{e} \quad x + 2 > 0 \quad \iff \quad x \in (1, +\infty).$$

Boa Prova!