Departamento de Matemática
Imecc Unicamp

Como primeira folha você tem que incluir uma folha branca a qual deve conter

- P1 – Turma Y
- Prenome e sobrenome
- RA
- Assinatura

Sem tal primeira folha com os 4 informações completas, particularmente **sem assinatura**, a prova será **inválida**.

Regras:

a) Você tem que dar o trajeto da solução. Para resultados sem exposição do trajeto da solução **não serão conferidos pontos**, nem serão consideradas.

b) Cada folha deve conter o RA. Para folhas sem RA **não serão conferidos pontos**.

c) A prova é individual e sem consulta.

d) **Controle do tempo:** Lembre-se de reservar os últimos 15 minutos para digitalizar a prova e anexa-la no sistema Moodle.

e) Durante a prova eu vou estar presente na sala remota da turma.

f) Bom sucesso!

Submeter:

a) Como primeira folha você tem que incluir uma folha branca a qual deve conter • P1 – Turma E • Prenome e sobrenome • RA • Assinatura

b) A prova deve ser submetido no Moodle (preferencialmente num único) arquivo pdf cujo nome deve ser

RA123456789.pdf

onde 123456789 deve ser seu número RA.

O sistema **Moodle fecha às 21:15h**
Provas não submetidas neste momento não serão consideradas.

Problema 1. (2p) As seguintes afirmações são verdadeiras? Justifique.

(a) Se F e G são subespaços de um espaço vetorial E, então $F \cap G$ é um subespaço. (0.5p)

(b) O conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = z\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$. (0.5p)

(c) Sejam v_1, v_2, v_3 e w vetores de um espaço vetorial E tais que $w = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$ e $w = a v_1 + b v_2 + c v_3$ com $a \neq \alpha$. Então $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LD. (0.5p)

(d) O conjunto $\{1 + x^2, x - x^2, 1 + x\}$ é uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. (0.5p)

Problema 2. (2.5p) Considere o espaço vetorial das matrizes reais 2×2 simétricas

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Mostre que o conjunto $\mathcal{B} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ onde (0.8p)

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \xi_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma base de E.

(b) Determine a matriz de passagem $\mathbf{p} = [I_E]_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ (outros autores usam a notacao $\mathbf{p} = I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$) da base canônica (0.7p)

$$\mathcal{E} = \left\{ \mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

para a base $\mathcal{B}$.

(c) Dado um elemento $\overset{t}{\cancel{s}} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ do espaço vetorial E determine os vetores coordenadas $[\mathbf{t}]_{\mathcal{E}}$ e $[\mathbf{t}]_{\mathcal{B}}$ dele. (1p)

Problema 3. (2p) Considere os subespaços

$$\mathcal{S} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x)\}, \qquad \mathcal{A} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-x) = -f(x)\}$$

do espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

(a) Prove que $\mathcal{S}$ é realmente um subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$. (1p)

(b) Mostre que $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$. (1p)

Problema 4. (2.5p) Tem-se uma transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$A(1,2) = (1,1,1,-1) \quad \text{e} \quad A(3,4) = (1,1,1,1)$$

(a) Pede-se a matriz $\mathbf{a}$ de A relativamente às bases canônicas. (1p)

b) Pede-se escalonar a matriz $\mathbf{a}$. (0.75p)

c) Pede-se determinar o conjunto X das soluções do sistema linear homogêneo $\mathbf{a}x = 0$ e uma base de X. (0.75p)

Problema 5. (1p) Seja E um espaço vetorial com base $\mathcal{B} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Considerando a transformação linear $A : E \to E$ definida por

$$A\xi_1 = \xi_2, \quad A\xi_2 = \xi_3, \quad \ldots \quad , A\xi_n = \mathcal{O}$$

onde $\mathcal{O} \in E$ é o vetor nulo. Mostre que $A^n v := \overbrace{A \cdots A}^{n \text{ vezes}} v = \mathcal{O}$ para todo $v \in E$, mas $A^{n-1} u \neq \mathcal{O}$ para algum $u \in E$.

Problema 1 (2p)

0.5 (a) fechado sob + : $u, v \in F \cap G \Rightarrow u, v \in F$, $u, v \in G$

$\Rightarrow u + v \in F$, $\in G$ — F, G são subesps. ~> fech. sob +

fech. s. ·: $\alpha \in \mathbb{K}$, $u \in F \cap G$ — fech. sob ·

$\Rightarrow \alpha u \in F$, $\in G$

VERDADEIRO

0.5 (b) Verdadeiro: $F := \{(x, y, z) \mid x + y = z\}$

fech. sob +: $u, v \Rightarrow \boxed{u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)}$

$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$

$= \underbrace{(u_1 + u_2)}_{= u_3} + \underbrace{(v_1 + v_2)}_{= v_3} = u_3 + v_3$

$u \in F$ $v \in F$ $\Rightarrow u + v \in F$

fech. sob. ·: $u \in F$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$

$\alpha u_1 + \alpha u_2 = \alpha \underbrace{(u_1 + u_2)}_{= u_3} = \alpha u_3$

$u \in F$ $\Rightarrow \alpha u \in F$

0.5 (c) • $\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = w = a V_1 + b V_2 + c V_3$

• $\alpha \neq a$

$\Rightarrow \underbrace{(\alpha - a)}_{\neq 0} v_1 + (\beta - b) v_2 + (\gamma - c) v_3 = 0$

$\Rightarrow \exists$ CL de v_1, v_2, v_3 não todos coef. nulos e representando 0

$\Rightarrow$ LD Verdadeiro

0.5 (d) $\overset{1}{\alpha}(1 + x^2) + \overset{1}{\beta}(x - x^2) + \overset{-1}{\gamma}(1 + x) = 0$ mas $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$

$\underline{x = 0} \Rightarrow \alpha = -\gamma$ $\underline{x = -1} \Rightarrow \alpha = \beta$ $\Rightarrow \boxed{\overset{1}{\alpha}, \beta = \overset{1}{\alpha}, \gamma = \overset{-1}{-\alpha}}$

$\underline{x = 1} \Rightarrow \alpha = -\gamma$ $\Rightarrow$ LD $\Rightarrow$ não é base FALSO

(2.5p)

Problema 2 $\quad E = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \,\middle|\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

0.8 (a) $\mathcal{B} = \left\{ \overset{\xi_1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}, \overset{\xi_2}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}, \overset{\xi_3}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \right\}$

LI $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha \xi_1 + \beta \xi_2 + \gamma \xi_3 = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & \beta \\ \beta & \alpha+\beta+\gamma \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \beta = 0 \quad \Rightarrow 0 = \alpha + \beta = \alpha$

$\Rightarrow 0 = \alpha + \beta + \gamma = \gamma$ ✓

gera $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \alpha \xi_1 + \beta \xi_2 + \gamma \xi_3 = \begin{bmatrix} \alpha+\beta & \beta \\ \beta & \alpha+\beta+\gamma \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{\beta = b} \quad a = \alpha + \beta = \alpha + b \Rightarrow \boxed{\alpha = a - b}$

$c = \alpha + \beta + \gamma = a - b + b + \gamma = a + \gamma$

$\Rightarrow \boxed{\gamma = c - a}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = (a-b)\,\xi_1 + b\,\xi_2 + (c-a)\,\xi_3$

✓ gera

0.7 (b) I. $\begin{array}{c} a \quad b \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ b \quad c \end{array} = e_1 = I e_1 = \xi_1 \underbrace{(1-0)} + \xi_2 \cdot 0 + \xi_3 (0-1)$

II. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = e_2 = I e_2 = \xi_1 (0-1) + \xi_2 \cdot 1 + \xi_3 (0-0)$

III. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e_3 = I e_3 = \xi_1 (0-0) + \xi_2 \cdot 0 + \xi_3 (1-0)$

$\Rightarrow P = [I]_{\varepsilon, \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\quad$ I. II. III.

1 (c) $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} c \Rightarrow [t]_\varepsilon = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = t \overset{(a)}{=} \xi_1 (a-b) + \xi_2\, b + \xi_3 (c-a) \Rightarrow [t]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a-b \\ b \\ c-a \end{bmatrix}$

(2p)

Problema 3 $\quad S := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x) \}$

$\mathcal{A} := \{ \cdots \mid f(-x) = -f(x) \}$

1 (a) S ferr. sob $+$: $\quad f, g \in S$

$$\Rightarrow (f+g)(x) := f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) =: (f+g)(-x)$$

S ferr. sob $\cdot$: $\quad \alpha \in \mathbb{R},\ f \in S$

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x) = \alpha f(-x) =: (\alpha f)(-x)$$

---

1 (b) $\quad \mathcal{F}(\mathbb{R}) = S \oplus \mathcal{A} \iff \begin{cases} \mathcal{F} = S + \mathcal{A} \\ S \cap \mathcal{A} = \{0\} \end{cases}$

$\mathcal{F} \supset S + \mathcal{A}$: $\quad \begin{matrix} f \in S \subset \mathcal{F} \\ g \in \mathcal{A} \subset \mathcal{F} \end{matrix} \Rightarrow f + g \in \mathcal{F}$

porque $+ : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$

$\mathcal{F} \subset S + \mathcal{A}$: Seja $f \in \mathcal{F}$, def. $\quad s(x) := \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)$

$a(x) := \frac{1}{2}\left(\cdots - \cdots \right)$

$$\Rightarrow \bullet\ s(-x) = \frac{1}{2}\left(f(-x) + f(x)\right) = s(x) \Rightarrow s \in S$$

$$\Rightarrow \bullet\ a(-x) = \frac{1}{2}\left(f(-x) - f(x)\right) = -\frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) = -a(x) \Rightarrow a \in \mathcal{A}$$

de outro lado $s(x) + a(x) = f(x)$

$S \cap \mathcal{A} = \{0\}$: $\quad f \in S \cap \mathcal{A} \Rightarrow f(x) = f(-x)$

$= -f(-x)$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(-x) \Rightarrow f(-x) = 0 \ \forall x$$

$$\Rightarrow f = 0$$

(2.5p)

Problema 4

$\mathcal{E}^2 = \{e_1, e_2\}$ $\{E_1, E_2, E_3, E_4\} = \mathcal{E}^4$

$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$

1 (a) $A(1,2) = A(e_1 + 2e_2) = \underbrace{Ae_1}_{=:x} + 2\underbrace{Ae_2}_{=:y}$

$A(1,2) = (1,1,1,-1) = E_1 + E_2 + E_3 - E_4$

$A(3,4) = \dots\dots = 3x + 4y$

$A(3,4) = (1,1,1,1) = E_1 + E_2 + E_3 + E_4$

$\Rightarrow x + 2y = E_1 + E_2 + E_3 - E_4 \quad \cdot(-3)$

$3x + 4y = \dots\dots + E_4$

$0 - 2y = -2E_1 - 2E_2 - 2E_3 + 4E_4$

$\Rightarrow \boxed{y = E_1 + E_2 + E_3 - 2E_4}$

$x = E_1 + E_2 - E_3 - E_4 - 2y$

$= \underbrace{-E_1 - E_2 - E_3 + 3E_4}$

$\Rightarrow a := [A]_{\mathcal{E}^2, \mathcal{E}^4} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ $\cdot(-1)$ $\cdot 3$

0.75 (b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = a_{esc}$

0.75 (c) $-x + y = 0 \Rightarrow -x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$ $\boxed{y = 0}$ $X = \{\underbrace{(0,0)}_{0}\}$, base $\emptyset$

(1p)

problema 5: Uma TL, por ex. A^n, é determinado pelos valores numa base, por ex. $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$.

→ suficiente mostrar: $\boxed{A^n \xi_i = \theta \quad \forall i}$

$$A\xi_n \overset{\text{hip.}}{=} \theta$$

$$A^2 \xi_{n-1} = A(\overbrace{A\xi_{n-1}}^{\overset{\text{hip.}}{=} \xi_n}) = A\xi_n = \theta$$

$$A^3 \xi_{n-2} = A^2(\underline{A\xi_{n-2}}) \overset{\text{hip.}}{=} A^2 \underline{\xi_{n-1}} = \theta$$

$$\vdots$$

$$A^{n-1} \xi_2 = A^{n-2}(A\xi_2) = A^{n-2}\xi_3 = \theta$$

$$A^n \xi_1 = A^{n-1} \overbrace{A\xi_1}^{\xi_2} = A^{n-1}\xi_2 = \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{A^n \xi_j = \theta \quad j = 1, \dots, n} \Rightarrow A^n v = \theta \quad \forall v \in E$$

$$A^{n-1}\xi_1 = A^{n-2}\overbrace{A\xi_1}^{\overset{\text{hip.}}{=} \xi_2} = A^{n-2}\xi_2 = A^{n-3}\overbrace{A\xi_2}^{\xi_3} = \dots$$

$$= A^1 \xi_{n-1} = \xi_n \neq \theta$$

↑ $\mathcal{B}$ base
