DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
IMECC UNICAMP

Como primeira folha você tem que incluir uma folha branca a qual deve conter

- P1 – Turma E
- Prenome e sobrenome
- RA
- Assinatura

Sem tal primeira folha com os 4 informações completas, particularmente **sem assinatura**, a prova será **inválida**.

Regras:

a) Você tem que dar o trajeto da solução. Para resultados sem exposição do trajeto da solução **não serão conferidos pontos**, nem serão consideradas.

b) Cada folha deve conter o RA. Para folhas sem RA **não serão conferidos pontos**.

c) A prova é individual e sem consulta.

d) **Controle do tempo:** Lembre-se de reservar os últimos 15 minutos para digitalizar a prova e anexa-la no sistema Moodle.

e) Durante a prova eu vou estar presente na sala remota da turma.

f) Bom sucesso!

Submeter:

a) Como primeira folha você tem que incluir uma folha branca a qual deve conter • P1 – Turma E • Prenome e sobrenome • RA • Assinatura

b) A prova deve ser submetido no Moodle (preferencialmente num único) arquivo pdf cujo nome deve ser

RA123456789.pdf

onde 123456789 deve ser seu número RA.

O sistema **Moodle fecha às 10:15h**
Provas não submetidas neste momento não serão consideradas.

Problema 1. (2p) As seguintes afirmações são verdadeiras? Justifique.

(a) O subconjunto $F = \{\mathbf{a} \in \mathrm{M}(2 \times 2) \mid \mathbf{a}^2 = \mathbf{a}\}$ é um subespaço do espaço vetorial $\mathrm{M}(2 \times 2)$ das matrizes 2×2 com entradas reais. (0.5p)

(b) Se F e G são subespaços de um espaço vetorial E, então a soma $F + G = \{f + g \mid f \in F,\ g \in G\}$ é. (0.5p)

(c) O polinômio $p(t) = t^2 + 4t - 3$ é combinação linear de $p_1(t) = t^2 - 2t + 5$, $p_2(t) = 2t^2 - 3t$, e $p_3(t) = t + 3$. (0.5p)

(d) O conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 1\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$. (0.5p)

Problema 2. (2.5p) Considere o espaço vetorial das matrizes triangulares superiores

$$E = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

(a) Mostre que o conjunto $\mathcal{B} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ onde (0.8p)

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \xi_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma base de E.

(b) Determine a matriz de passagem $\mathbf{p} = [I_E]_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ (outros autores usam a notação $\mathbf{p} = I_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$) da base canônica (0.7p)

$$\mathcal{E} = \left\{ \mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

para a base $\mathcal{B}$.

(c) Dado um elemento $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ do espaço vetorial E determine os vetores coordenadas $[\mathbf{t}]_{\mathcal{E}}$ e $[\mathbf{t}]_{\mathcal{B}}$ dele. (1p)

Problema 3. (2p) Considere os subespaços

$$\mathcal{S} := \{\mathbf{a} \in \mathrm{M}(2 \times 2) \mid \mathbf{a}^t = \mathbf{a}\}, \qquad \mathcal{A} := \{\mathbf{a} \in \mathrm{M}(2 \times 2) \mid \mathbf{a}^t = -\mathbf{a}\}$$

do espaço vetorial $\mathrm{M}(2 \times 2)$ das matrizes 2×2 com entradas reais.[1]

(a) Determine bases e as dimensões de $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$. (1p)

(b) Mostre que $\mathrm{M}(2 \times 2) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{S}$. (1p)

[1] A **matriz transposta $\mathbf{a}^t$** tem como ij-ésima entrada a ji-ésima entrada de $\mathbf{a}$.

Problema 4. (2.5p) Seja $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ o espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$ composto de todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Considere os conjuntos $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ e $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, g_3\}$ onde

$$f_1(t) = \cos t - i \sin t, \qquad f_2(t) = \cos t + i \sin t, \qquad f_3(t) = 1$$

e

$$g_1(t) = \sin t, \qquad g_2(t) = 1, \qquad g_3(t) = \cos t$$

(a) Prove que o conjunto $\mathcal{G} = \{g_1, g_2, g_3\}$ é LI. (1p)

(b) Escreve cada g_i como combinação linear dos f_i's. (0.5p)

Seja G o espaço vetorial gerado pelo conjunto $\mathcal{G}$ (fato: $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ são bases de G):

(c) Determine a matriz de passagem $\mathbf{p} := [I_G]_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ da base $\mathcal{F}$ para a base $\mathcal{G}$ (outros autores usam a notação $\mathbf{p} = I_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}}$). (1p)

Problema 5. (1p) Seja E um espaço vetorial com base $\mathcal{B} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Considerando a transformação linear $A : E \to E$ definida por

$$A\xi_1 = \xi_2, \quad A\xi_2 = \xi_3, \quad \ldots \quad , A\xi_{n-1} = \xi_n, \quad A\xi_n = \xi_1$$

Mostre que $A^n := \overbrace{A \cdots A}^{n \text{ vezes}} = I_E$, mas $A^{n-1} \neq I_E$, onde $I_E : E \to E$ é a transformação linear identidade definida por $I_E v = v$.

problema 1 (2p)

$$* \left(2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)^2 = 4\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

1/2 (a) falso: $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \in F$ mas $\overline{2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}} \notin F$

$\Rightarrow$ F ñ é fechado sob mult. escalar.

1/2 (b) verdadeiro:

fech. sob +: $u, v \in F+G \Rightarrow \begin{matrix} u = f_1 + g_1 \\ v = f_2 + g_2 \end{matrix} \Rightarrow u+v = \overbrace{f_1+f_2}^{\in F \text{ (F subesp.)}} + \underbrace{g_1+g_2}_{\in G \text{ (G subesp.)}}$

fech. sob $\cdot$: $\alpha \in \mathbb{K},\ u \in F+G \Rightarrow u = \underbrace{f_1}_{\in F} + \underbrace{g_1}_{\in G} \Rightarrow \alpha u = \underbrace{\alpha f_1}_{\in F \text{ (F subesp.)}} + \underbrace{\alpha g_1}_{\in G \text{ (G subesp.)}}$

1/2 (c) $t^4+4t-3 = \alpha(t^2-2t+5) + \beta t(2t-3) + \gamma(t+3)$

I. $\underline{t=0}$ $\boxed{-3 = 5\alpha + 3\gamma} \Rightarrow \gamma = -1 - \frac{5}{3}\alpha = 4$ $\boxed{\gamma = 4}$

II. $\underline{t=3/2}$ $\boxed{21 = 17\alpha + 18\gamma} = (17-30)\alpha = -13\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = -3}$

III. $\underline{t=-3}$ $\boxed{-6 = 20\underbrace{\alpha}_{-3} + 27\beta} \Rightarrow \boxed{\beta = 2}$ verdadeiro

---

1/2 (d) falso: $(1,0,0) \in F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 = 1\}$

$(0,0,1) \in$

mas $(1,0,0) + (0,0,1) = (1,0,1) \notin F$

$\Rightarrow$ F ñ é fech. sob +.

Problema 2 (2p)

0,8 (a) $\mathcal{B}$ gera: $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \frac{a+b}{2}\overset{\xi_1}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} + \frac{a-b}{2}\overset{\xi_2}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} + (c-a)\overset{\xi_3}{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$

$\mathcal{B}$ LI: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha [\,"\,] + \beta [\,"\,] + \gamma [\,"\,]$

$= \begin{bmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta \\ 0 & \alpha+\beta-\gamma \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ • $\alpha+\beta=0 \Rightarrow \alpha=-\beta$
• $\alpha-\beta=0 \qquad \alpha=\beta$ $\Rightarrow \alpha=0 \Rightarrow \beta=0$

• $0 = \underbrace{\alpha}_{0}+\underbrace{\beta}_{0}-\gamma = \gamma \Rightarrow \gamma=0$

0,7 (b) da parte (a) $\mathcal{B}$ gera:

I. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = I e_1 = \xi_1 \underbrace{p_{11}}_{1/2} + \xi_2 \underbrace{p_{21}}_{1/2} + \xi_3 \underbrace{p_{31}}_{-1}$

II. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = I e_2 = \xi_1 \underbrace{p_{12}}_{1/2} + \xi_2 \underbrace{p_{22}}_{-1/2} + \xi_3 \underbrace{p_{32}}_{0}$

III. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I e_3 = \xi_1 \underbrace{p_{13}}_{0} + \xi_2 \underbrace{p_{23}}_{0} + \xi_3 \underbrace{p_{33}}_{1}$

$\Rightarrow P = [I_E]_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{array}{ccc} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} \end{array} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

---

1 (c) $t = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = a e_1 + b e_2 + c e_3 \Rightarrow [t]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$t = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \overset{(a)}{=} \frac{a+b}{2}\xi_1 + \frac{a-b}{2}\xi_2 + (c-a)\xi_3 \Rightarrow [t]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \\ c-a \end{bmatrix}$

(2p)

problema 3 $\quad \mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathcal{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{bmatrix} \mid d \in \mathbb{R} \right\}$

1 (a) base $\mathcal{U}$ de $\mathcal{S}$: $\quad \mathcal{U} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\xi_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\xi_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\xi_3} \right\}$

gera: $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a\xi_1 + b\xi_2 + c\xi_3$ ✓

LI: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2 + \gamma\xi_3$

$= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{matrix}$ ✓

$\Rightarrow \dim \mathcal{S} = |\mathcal{U}| = 3$

base $\mathcal{V}$ de $\mathcal{A}$: $\quad \mathcal{V} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\eta_1} \right\}$

gera $\begin{bmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{bmatrix} = d \cdot \eta_1$ ✓

LI $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \alpha\eta_1 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = 0$ ✓

$\Rightarrow \dim \mathcal{A} = |\mathcal{V}| = 1$

1 (b) $\mathcal{M} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{S} \overset{\text{aula}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \underbrace{\dim \mathcal{A}}_{1} + \underbrace{\dim \mathcal{S}}_{3} = \underbrace{\dim \mathcal{M}}_{4} & ✓ \\ \mathcal{A} \cap \mathcal{S} = \{0\} & ✓ \end{cases}$

$\begin{bmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \Rightarrow a = 0,\ c = 0$

$d = b = -d$

$\Rightarrow d = 0 \Rightarrow b = 0$

alternativamente

- $\mathcal{A} \cap \mathcal{S} = \{0\}$ ✓
- $\mathcal{A} + \mathcal{S} \in \mathcal{M}$ ✓ como soma de matrizes é matriz

$\mathcal{M} \subset \mathcal{A} + \mathcal{S}$ ✓

$\overset{\Psi}{a} = \underbrace{\tfrac{1}{2}(a - a^t)}_{\in \mathcal{A}} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(a + a^t)}_{\in \mathcal{S}}$

problema 4 (2,5p)

1 (a) $\mathcal{G}$ LI $\quad 0 = \alpha \overbrace{\sin t}^{g_1} + \beta \cdot \overbrace{1}^{g_2} + \gamma \overbrace{\cos t}^{g_3}$

$\underline{t=0} \quad 0 = \beta + \gamma$

$\underline{t=\pi} \quad 0 = \beta - \gamma \quad \Rightarrow \underline{\beta = 0} \Rightarrow \underline{\gamma = 0}$ ✓

$+ \quad \overline{0 = 2\beta + 0}$

0

$\underline{t=\pi/2} \quad 0 = \alpha + \underbrace{\beta}_{0} \Rightarrow \underline{\alpha = 0}$

0,5 (b) $\overbrace{g_1}^{\sin} = \frac{i}{2} \overbrace{f_1}^{\cos - i\sin} - \frac{i}{2} \overbrace{f_2}^{\cos + i\sin} + 0 \cdot \overbrace{f_3}^{1}$

$\overbrace{g_2}^{1} = 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3$

$\overbrace{g_3}^{\cos} = \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2 + 0 \cdot f_3$

---

1 (c) $[I_E]_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = \begin{bmatrix} -i & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\overbrace{f_1}^{\cos - i\sin} = I_E f_1 = -i \cdot \overbrace{g_1}^{\sin} + 0 \cdot \overbrace{g_2}^{1} + 1 \cdot \overbrace{g_3}^{\cos}$

$\overbrace{f_2}^{\cos + i\sin} = I_E f_2 = i\, g_1 + 0 \cdot g_2 + 1 \cdot g_3$

$\overbrace{f_3}^{1} = I_E f_3 = 0 \cdot g_1 + 1 \cdot g_2 + 0 \cdot g_3$

(1p)

problema 5

Uma TL (por exemplo A^n) é determinada nos valores de uma base → suficiente mostrar

$$A^n \xi_j = \xi_j \quad j = 1, .., n \text{ :}$$

$$A^n \xi_j = A^j (\underbrace{A^{n-j} \xi_j}_{\xi_{j+(n-j)}}) = A^j \xi_n$$

$$= A^{j-1} (\underbrace{A \xi_n}_{= \xi_1})$$

$$= A^{j-1} \xi_1 = \xi_{1+(j-1)} = \xi_j \checkmark$$

assim $\boxed{A^n = I_E}$

a provar $A^{n-1} \neq I_E$ suponha por absurdo $A^{n-1} = I_E$.

então $A^{n-1} \xi_1 \overset{\text{hip.}}{=} I_E \xi_1 = \xi_1$ ⋡ absurdo como B é base

$A^{n-1} \xi_1 = \xi_{1+(n-1)} = \xi_n$

⇒ $A^{n-1} = I_E$ deve ser falso

⇒ $A^{n-1} \neq I_E$