Álgebra Linear

Notas da aula[1]
MA327 2020-2

manuscrito em progresso

Joa Weber
UNICAMP

5 de outubro de 2020

[1]versão final estará la: www.math.stonybrook.edu/~joa/PUBLICATIONS/MA327.pdf

Sumário

Aula 1

Introdução

Àlgebra Linear

é o estudo dos espaços lineares e das transformações lineares.

Uma outra palavra para espaço linear é espaço vetorial.

Exemplo 0.0.1 (Flechas equivalentes no plano)**.** Seja F o conjunto das flechas equivalentes v (mesma direção e comprimento) no plano Π munido das operações de multiplicar uma flecha v com um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ e de adicionar duas flechas v e w.

Multiplicação (escalar). Pela definição αv é a flecha na direção de v cujo comprimento é α vezes aquele de v (muda-se a direção caso o número α é negativo).

Adição (vetorial). Pela definição $v + w$ é a flecha cujo ponto inicial é aquela de v e cujo ponto termino p é obtido depois fazer uma translação de w movendo o ponto inicial de w no ponto termino de v. Então p é definido como o ponto termino do novo w.

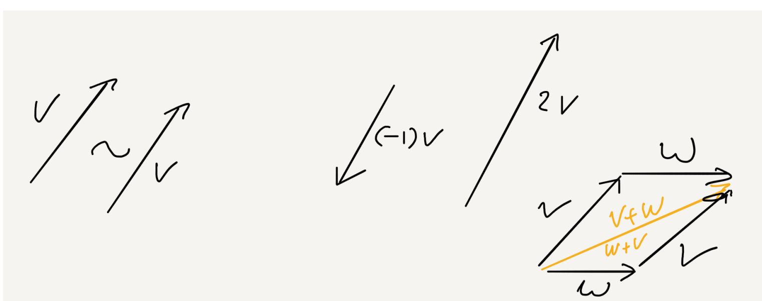

Figura 1: Adição de flechas e multiplicação escalar

Tal F é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ e um exemplo de uma transformação linear em F é dado pela rotação $r_\theta : F \to F$ de uma flecha v pelo angulo θ em torno do ponto inicial.

Exemplo 0.0.2 (Pares de números reais)**.** Seja $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ o conjunto de todas listas ordenadas de dois membros reais munido da adição membro-por-membro e multiplicação com um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ também membro-por-membro. Então $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Comentário 0.0.3 (Identificação dos conjuntos e operações – isomorfismo)**.** Os dois exemplos anteriores são "iguais" no sentido seguinte. Suponhamos que na reta podemos medir a distância 1. No plano Π escolha um **eixo** OX, ou seja uma reta com dois pontos diferentes O e X da distância 1, e um segundo eixo OY cujo primeiro ponto O é aquele do OX e qual intersecta OX exatamente no ponto O. Uma tal escolha de dois eixos é chamado um **sistema de coordenadas** no plano, símbolo OXY.

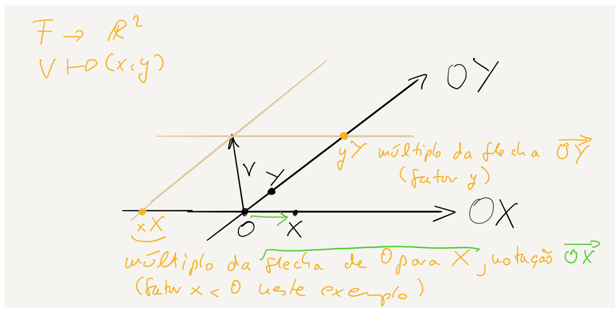

Figura 2: Sistema de coordenadas OXY composto de dois eixos OX e OY

Observe-se que um eixo OX chega com uma direção (de O para X) e com um comprimento unitário (o comprimento do segmento entre O e X). Uma escolha de coordenadas OXY no plano Π nos das uma aplicação

$$F \to \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto (x, y)$$

a qual identifica os elementos de F com os elementos de $\mathbb{R}^2$ unicamente (bijetora) – e ainda é **linear**, ou seja compatível com as duas operações no domínio e as duas no contradomínio. Uma tal aplicação (bijetora linear) é chamado um **isomorfismo** entre espaços vetoriais. Deixamos ao leitor definir esta aplicação.

[Dica: Os pontos O, X e O, Y dão duas flechas. Represente um elemento de F por uma flecha equivalente com ponto inicial O. Pensa num paralelogramo tal que O e o ponto termino da flecha equivalente são dois vértices opostos.]

Exemplo 0.0.4 (Funções continuas e integração)**.** Sejam $a < b$ dois números reais. Então o quadruplo $V = (C^0([a, b], \mathbb{C}), +, \cdot, \mathbb{R})$ que é composto do conjunto das funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ munido com as duas operações de adicionar $f + g$ duas funções e multiplicar αf uma função com um numero real $\alpha \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Também $W = (\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R})$ composto das números reais $\mathbb{R}$ munido das operações óbvias é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Integração $T : V \to W$, $f \mapsto \int_a^b f(x)\, dx$, é compatível com as duas adições e multiplicações (em V e em W) no sentido que

$$T(f + g) = Tf + Tg, \qquad T(\alpha f) = \alpha Tf$$

para todos os vetores $f, g \in V$ e escalares α do corpo $\mathbb{R}$. Uma aplicação T entre espaços vetoriais qual respeita as duas operações no domínio e no contradomínio é chamada uma transformação linear.

Notações

Para uma lista extensiva dos símbolos usados veja o Índice Remissivo na página 67.

Comentário 0.0.5 (Números)**.** Vamos trabalhar com os seguintes **números**

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$	naturais
$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	inteiros
$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$	racionais
$\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ "a reta real"	reais
$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ "o plano complexo"	complexos

Com $|\alpha|$ denotamos o absoluto de um numero α. Denotamos **intervalos** fechados de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e abertos de $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Usamos os símbolos

$\forall$ "para todos os" $\quad$ $\exists$ "existe um" $\quad$ $\exists!$ "existe um único"

A notação $w := v$ significa que o objeto w **é definido** pelo lado direito v.

Convenções

Cor cinza. Parágrafos e maiores partes de texto em cinza indicam matéria avançada direcionado às turmas A e B do "cursão", mas não às outras turmas. Palavras individuais em cinza geralmente são nomes ou informações complementares.

Parte I

Teoria dos espaços vetoriais

Capítulo 1

Espaços vetoriais

1.1 Axiomas

Definição 1.1.1. Um **conjunto** X é composto de elementos os quais são dois-a-dois diferentes. Consequentemente

$$\{2,3\} \cup \{2\} = \{2,3,2\} = \{2,3\} = \{3,2\} \tag{1.1.1}$$

Um conjunto não é ordenado, por exemplo $\{1,2\} = \{2,1\}$. O conjunto que não contem nenhum elemento é chamado **o conjunto vazio**, símbolo $\emptyset$. Denotamos de $A \cup B$ o conjuntos cujos elementos pertencem ou a A ou a B. Usamos a notação $A \dot{\cup} B$ para transferir a informação adicional que os dois conjuntos A e B são **disjuntos**, ou seja não tem nenhum elemento comum, em símbolos $A \cap B = \emptyset$. Denotamos de $|X|$ o **número de elementos de um conjunto** quando o número é finito. Neste caso X é chamado de **conjunto finito**.

Um **subconjunto** de um conjunto X é um conjunto A tal que cada um elemento de A é elemento de X, notação $A \subset X$. Observe que conforme esta definição, o conjunto vazio $\emptyset$ é subconjunto de todos conjuntos: para todo conjunto X temos $\emptyset \subset X$.

Definição 1.1.2. O **produto cartesiano** $X \times Y$ de dois conjuntos X e Y é o conjunto de todas listas ordenadas (x,y) dos elementos $x \in X$ e $y \in Y$, ou seja

$$X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

Observe que se um fator fica vazio, ou seja $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$, então $X \times Y = \emptyset$.

1.1.1 Grupo

Definição 1.1.3. Um conjunto não-vazio $G \neq \emptyset$ munido de uma operação

$$* : G \times G \to G, \quad (f,g) \mapsto f * g$$

é chamado um **grupo**, notação $(G,*)$, se valem os três axiomas

1. $f*(g*h) = (f*g)*h$ para todos os elementos $f, g, h \in G$ (associatividade)
2. existe um elemento $e \in G$ tal que (elemento neutro)
$$e * g = g, \qquad g * e = g$$
para todos os elementos $g \in G$.
3. para todo $g \in G$ existe um elemento, notação $\bar{g} \in G$, t.q. (inverso)
$$g * \bar{g} = e, \quad \bar{g} * g = e$$

Em palavras,

um grupo é um conjunto não-vazio munido de uma operação associativa, contendo um elemento neutro, e tal que qualquer elemento admite um inverso.

O seguinte lema diz que um grupo G tem exatamente um elemento neutro, notação comum e, e cada um elemento g de G tem exatamente um inverso, notação $\bar{g}$. Ás vezes é comum e útil escrever o elemento neutro na forma 0 ou 1 e os inversos na forma $-g$ ou g^{-1} — veja os dois exemplos em Exercício 1.1.6 a).

Lema 1.1.4. *Seja $(G, *)$ um grupo. Então vale o seguinte.*
1) *O elemento neutro é único.*
2) *Os elementos inversos são únicos.*
3) *Para todos os elementos $f, g, h \in G$ vale:*
a) $f * g = f * h \;\Rightarrow\; g = h$ *(lei da corte)*
b) $f * g = f \;\Rightarrow\; g = e$
c) $f * g = e \;\Rightarrow\; g = \bar{f}$

Note que b) e c) são consequências imediatas de a).

Demonstração. Lema A.1.1. □

Definição 1.1.5. Um grupo $(G, *)$ é chamado de **abeliano** se a ordem dos dois elementos na operação nao importa, em símbolos $f*g = g*f$. (comutatividade)

Exercício 1.1.6. Mostre que
a) sao grupos (ainda abelianos): $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, \cdot)$
b) nao sao grupos: $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{N}_0, +)$ e $(\mathbb{Z}, \cdot)$
c) nao sao grupos abelianos: as matrizes 3×3 e as rotações em $\mathbb{R}^3$.

1.1.2 Corpo

Definição 1.1.7. Um conjunto $\mathbb{K}$ munido de duas operações[1]
$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K} \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$$
é chamado um **corpo** se valem os três axiomas

[1] as quais vamos batizar aos nomes "+" e "·" – ainda que *geralmente não tem nada ver com adição e multiplicação de números*, mas esta escolha é motivada pelos exemplos principais (Exemplo 1.1.10) nos quais "+" e "·" são adição e multiplicação de números

1. $(\mathbb{K}, +)$ é um grupo abeliano.
   (O *elemento neutro* seja denotado 0 e $-\alpha$ denota o *inverso* de $\alpha \in \mathbb{K}$.)
2. $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.
   (O *elemento neutro* seja denotado 1 e α^{-1} denota o *inverso* de $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$.)
3. Distributividade: $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$.
   (É costume escrever $\alpha\beta$ em vez de $\alpha \cdot \beta$.)

Para distinguir chamamos o elemento neutro da primeira operação – para a qual temos usado o símbolo "+" ainda que geralmente não tem nada ver com adição de números – o **elemento neutro aditivo**. Chamamos o elemento neutro da segunda operação – motivado pelo uso do símbolo "·" – o **elemento neutro multiplicativo**. Como é feio escrever $\alpha + (-\beta)$ para a soma de um elemento com um elemento inverso aditivo definimos $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$. Isso é uma abreviação só, não é, nem tem diferença. Analogamente simplificamos a notação escrevendo α/β em vez de $\alpha\beta^{-1}$.

Corolário 1.1.8. *Um corpo contem pelo menos dois elementos.*

Demonstração. Pelas axiomas 1 e 2 cada uma operação tem um elemento neutro as quais não podem ser iguais por causa de 2. □

Lema 1.1.9. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $0 \in K$ é o elemento neutro da adição. Então $0\beta = 0$ e $\beta 0 = 0$ para todos os elementos $\beta \in \mathbb{K}$.*

Demonstração. Lema A.1.2. □

Exemplos de corpos

Exemplo 1.1.10. Sao corpos
a) $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$
b) $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ onde as operações sao definidas assim

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)$$
$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(bc + ad)$$

Exercício 1.1.11. Os números inteiros $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ não formam um corpo.

Exemplo 1.1.12 (Adição e multiplicação modulo n)**.** Dado um número natural $n \in \mathbb{N}$, defina no conjunto $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$ as duas operações

$$a +_n b := a + b \pmod n, \qquad a \cdot_n b := ab \pmod n$$

para todos os elemento $a, b \in \mathbb{Z}_n$.[2]

Fato. $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ é um corpo $\iff$ n é um número primo.

[2] Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\ell \in \mathbb{Z}$ um número inteiro. Pela definição o elemento $\ell \pmod n \in \mathbb{Z}_n$ é o resto $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ que falta depois você "enche" ℓ com múltiplos de n. Em símbolos, $l \pmod n := r$ onde $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ é o único elemento tal que $l = kn + r$ para um $k \in \mathbb{Z}$.

Para valores pequenos de n pode-se checar da mão se $\mathbb{Z}_n$ é um corpo ou não. Só precisa-se calcular as tabelas de adição e de multiplicação. Vamos ilustrar isso num exemplo.

Exemplo 1.1.13 ($\mathbb{Z}_4$ não é um corpo.)**.** Para checar se $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ e $(\mathbb{Z}_4 \backslash \{e_{+_4}\}, \cdot_4)$ são grupos abelianos é útil calcular as tabelas de adição e de multiplicação.

• $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ é um grupo abeliano? Para responder calculamos os valores na tabela

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

São 4 passos:

1. Determinar o elemento neutro de $+_4$: Checamos se a linha em cima da linha solida horizontal, ou seja a linha 0 1 2 3, tem uma cópia nas linhas embaixo. Sim, tem 0 1 2 3. Neste caso o elemento em frente da cópia é o elemento neutro de $+_4$, certo? No nosso caso $e_{+_4} = 0$. Se não tem copia, não tem elemento neutro, então não temos um grupo.
2. Inversos: Na cada dos (neste caso 4) linhas de valores na tabela localiza o elemento neutro 0 (se existir). Então o elemento g em frente da linha de 0 e o elemento em cima da coluna de 0, notação $\bar{g}$, são inversos um do outro. Caso uma linha nao contem 0, então este g não tem inverso, então não temos um grupo. No nosso caso todo elemento g tem um inverso:

g	$\bar{g}$ (denotado $-g$)
0	0
1	3
2	2
3	1

3. Associatividade: Calculando caso por caso temos que checar se $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$ para todas as possibilidades. No nosso caso vale.
4. Grupo abeliano (comutatividade): Vale se a tabela é simétrica em respeito à diagonal. No nosso caso vale.

Na verdade temos esquecido um passo: No inicio de tudo temos que checar se a operação é bem definida, ou seja os valores da operação (os valores na tabela) realmente são elementos do conjunto, ou não. Olhamos a tabela - sim.
Nosso resultado é que $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ é um grupo abeliano.

• $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$ é um grupo abeliano? Para responder calculamos a tabela

$\cdot_4$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

Como o valor 0 não é elemento de $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ a multiplicado $\cdot_4$ não é uma operação em $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$, então não pode ser um grupo.

Ainda assim vamos repetir os 4 passos para $\cdot_4$ (em vez de $+_4$) para ver se tem outras falhas ainda. As respostas são:

1. Elemento neutro de $\cdot_4$: Tem, é o elemento $e_{\cdot_4} = 1$.
2. Inversos: Na cada dos (neste caso 3) linhas de valores na tabela localizamos o elemento neutro 1 (se existir). No nosso caso

g	$\bar{g}$ (denotado g^{-1})
1	1
2	não tem!
3	3

   o elemento 2 não tem um inverso e já por isso não temos um grupo.
3. Associatividade: Ainda que a fórmula $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$ vale, os valores não são todos em $Z_4 \setminus \{0\}$.
4. Grupo abeliano (comutatividade): A tabela é simétrica em respeito à diagonal, mas os valores não são todos em $Z_4 \setminus \{0\}$.

Nosso resultado é que $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$ não é um grupo abeliano.

Exercício 1.1.14. Seja $n = 6$:

1. Calcule a tabela da adição e da multiplicação no caso $\mathbb{Z}_6$.
2. Identifique os elementos neutros da adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_6$. Eles sempre existem?
3. Para todo $a \in \mathbb{Z}_6$ identifique o elemento inverso aditivo.
4. Para todo $a \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$ identifique o elemento inverso multiplicativo, se existir.
5. Cheque que $\mathbb{Z}_6$ não é um corpo. Quais dos axiomas não valem?

Matéria avançada

Motivado pelas perguntas da Turma C na 1ª aula 2016-2 vamos dar um exemplo de um corpo onde a primeira operação não está relacionada à adição de números nem a segunda à multiplicação de números.

Exercício 1.1.15 (Corpo $(P, \cdot, \circ)$ onde $\cdot$ não é adição e $\circ$ não é multiplicação)**.** Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a função $p_\alpha : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $x \mapsto x^\alpha$. Seja o conjunto

$$P := \{p_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

composto de todas funções $p_\alpha(x) = x^\alpha$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ e munido das operações

$$\begin{aligned} \cdot : P \times P &\to P \\ (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \cdot p_\beta \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \circ : P \times P &\to P \\ (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \circ p_\beta \end{aligned}$$

chamado de **multiplicação**[3] e **composição**[4] de funções, respectivamente. Mostre que:

1. As duas operações são bem definidas: $p_\alpha \cdot p_\beta \in P$ e $p_\alpha \circ p_\beta \in P$, de fato

$$p_\alpha \cdot p_\beta = p_{\alpha+\beta}, \qquad p_\alpha \circ p_\beta = p_{\alpha\beta}$$

2. $(P, \cdot)$ é um grupo abeliano com elemento neutro p_0.
3. $(P \setminus \{p_0\}, \circ)$ é um grupo abeliano com elemento neutro p_1.
4. Distributividade: $(p_\alpha \cdot p_\beta) \circ p_\gamma = (p_\alpha \circ p_\gamma) \cdot (p_\beta \circ p_\gamma)$, $\forall p_\alpha, p_\beta, p_\gamma \in P$.

1.1.3 Espaço vetorial

Definição 1.1.16. Um **espaço vetorial $\boldsymbol{E}$ sobre um corpo** $\mathbb{K}$[5] é um quádruplo $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ composto de um conjunto E, um corpo $\mathbb{K}$, e duas operações

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ (v, w) &\mapsto v + w \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\alpha, v) &\mapsto \alpha v \end{aligned}$$

chamado de *adição* e *multiplicação escalar*, respectivamente, tal que vale

1. $(E, +)$ é um grupo abeliano.
   (O *elemento neutro* é denotado $\mathcal{O}$ e chamado o **vetor nulo**.)
2. Distributividade: $\begin{cases} (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \\ \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \end{cases}$
3. Compatibilidade: $\begin{cases} (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \\ 1v = v \end{cases}$

Onde as identidades tem que ser válidas para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e todos $v, w \in E$. Chama-se **escalares** os elementos do corpo $\mathbb{K}$ e **vetores** os elementos de E.

Lema 1.1.17. *Seja $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ um espaço vetorial e $0 \in \mathbb{K}$ e $\mathcal{O} \in E$, então:*

(i) $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ *para todos os escalares* $\alpha \in \mathbb{K}$.

(ii) $0v = \mathcal{O}$ *para todos os vetores* $v \in E$.

(iii) *Para todo o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo o vetor $w \in E$ são equivalentes:*

$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O} \tag{1.1.2}$$

Demonstração. Lema A.1.3. □

[3] $(p_\alpha \cdot p_\beta)(x) := p_\alpha(x) \cdot p_\beta(x)$
[4] $(p_\alpha \circ p_\beta)(x) := p_\alpha(p_\beta(x))$
[5] fala-se abreviando “*E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$*” ou ainda “*E é um espaço vetorial*”.

Corolário 1.1.18 (Compatibilidade dos inversos aditivos com multiplicação)**.** *Para todo o escalar* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e todo o vetor* $w \in E$ *vale:*

a) $(-\alpha)w = -(\alpha w)$

b) $\alpha(-w) = -(\alpha w)$

Demonstração. Corolário A.1.4. $\square$

Aula 2

1.2 Exemplos de espaços vetoriais

Exemplo 1.2.1 (O espaço vetorial trivial $\{\mathcal{O}\}$)**.** Seja E um conjunto com 1 elemento só. Vamos já denotar aquele elemento com o símbolo $\mathcal{O}$ (porque?). Então $E = \{\mathcal{O}\}$. Seja $\mathbb{K}$ um corpo qualquer. Não tem escolha nenhuma para definir as duas operações

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ (\mathcal{O}, \mathcal{O}) &\mapsto \mathcal{O} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\alpha, \mathcal{O}) &\mapsto \mathcal{O} \end{aligned}$$

Então $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ satisfaz os axiomas de um espaço vetorial, denotado simplesmente $E = \{\mathcal{O}\}$ e chamado de **espaço vetorial trivial**.

Exemplo 1.2.2 (Um corpo $\mathbb{K}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$)**.** Usa-se as duas operações chegando com o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ como as duas operações necessárias para tornar um conjunto, escolhemos $E := \mathbb{K}$, num espaço vetorial sobre um corpo, escolhemos $\mathbb{K}$. Com efeito $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

1.2.1 Listas ordenadas

Exemplo 1.2.3 (O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$)**.** Seja

$$\mathbb{R}^n := \{u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto de todas as listas ordenadas de n números reais. Chamamos α_i o i-ésimo membro da lista. As duas operações

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad\qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

são definidas como adição membro-por-membro e multiplicação de todos membros com um escalar $\beta \in \mathbb{R}$. Checando todos axiomas vê-se que $\mathbb{R}^n$ é um espaco vetorial sobre o corpo dos números reais, notação $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^n$ só. O vetor nulo, também chamado de **origem**, é a lista

$$\mathcal{O} = (0, \dots, 0)$$

e o inverso de um elemento $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é a lista $(-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)$ a qual denotamos com o símbolo $-u$.

O ***i*-ésimo vetor canônico** é a lista de n membros

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

cujo i-ésimo membro é o número 1 e todos outros sao nulo 0. O conjunto

$$\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\} \tag{1.2.1}$$

de todos os vetores canônicos é chamado de **base canônica** de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.2.4 (O espaço vetorial $\mathbb{R}^\infty$ sobre $\mathbb{R}$)**.** O conjunto

$$\mathbb{R}^\infty := \{u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \in \mathbb{R}\}$$

de todas as sequencias reais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ sob adição e multiplicação membro-por-membro, notação $(\mathbb{R}^\infty, +, \cdot, \mathbb{R})$.

Exemplo 1.2.5 (O espaço vetorial $\mathbb{R}_0^\infty$ sobre $\mathbb{R}$)**.** O conjunto

$$\mathbb{R}_0^\infty := \{u \in \mathbb{R}^\infty \mid \text{só um número finito de membros são não-nulos}\}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ sob adição e multiplicação membro-por-membro como no exemplo prévio, notação $(\mathbb{R}^\infty, +, \cdot, \mathbb{R})$.
Dado $i \in \mathbb{N}$, a sequência com todos membros nulos exceto o i-ésimo qual é 1 denotamos também de e_i. O conjunto de todos os e_i's é denotado de

$$\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\} \tag{1.2.2}$$

e chamado de **base canônica** de $\mathbb{R}_0^\infty$.

Comentário 1.2.6 ($\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^\infty$)**.** Os espaços vetoriais $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^\infty$ sobre qualquer corpo $\mathbb{K}$ são definidos analogamente Exemplos 1.2.3 e 1.2.4.

1.2.2 Matrizes

Exemplo 1.2.7 (Espaço vetorial das matrizes $m \times n$)**.** O **espaço vetorial das matrizes $m \times n$ sobre um corpo** $\mathbb{K}$ é o conjunto

$$\mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K}) := \left\{\mathbf{a} = (a_{ij}) \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{K},\, i = 1, \dots m,\, j = 1, \dots, n\right\}$$

onde a matriz $\mathbf{a} = (a_{ij})$ é o quadro de escalares com m linhas e n colunas [6]

$$\mathbf{a} = (a_{ij}) := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

munido com a adição (entrada por entrada)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (c_{ij}), \qquad c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

e a multiplicação escalar (entrada por entrada)

$$\beta\mathbf{a} = \beta\,(a_{ij}) := (c_{ij}), \qquad c_{ij} := \beta a_{ij}$$

para qualquer escalar $\beta \in \mathbb{K}$. A matriz $\mathbf{a}^t$ com entradas $(a_{ij})^t = a_{ji}$ é chamada de **transposta** da matriz $\mathbf{a}$. Uma **matriz quadrada** é uma matriz $n \times n$.

O vetor nulo é a matriz nula $\mathbf{0}$ cujas entradas são todas o escalar nulo $0 \in \mathbb{K}$. O elemento inverso aditivo, notação $-\mathbf{a}$, de uma matriz $\mathbf{a} = (a_{ij})$ tem como entradas os inversos aditivos dos a_{ij}, notação $-a_{ij}$.

No caso do corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ usamos a notação $\mathrm{M}(m \times n) := \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{R})$ para o **espaço vetorial dos matrices reais $m \times n$**.

[6] Os escalares a_{ij} são chamadas as **entradas da matriz**. Observe que a entrada a_{ij} está localizada na i-ésima linha e j-ésima coluna.

Definição 1.2.8 (Linhas e colunas de uma matriz)**.** Seja $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n)$ uma matriz $m \times n$. Note-se que o primeiro índice i de uma entrada a_{ij} indica a linha e o segundo j a coluna dela. Tendo isso na vista vamos denotar a ***k*-ésima coluna**, respectivamente a ***ℓ*-ésima linha**, de uma matriz $\mathbf{a}$ com os símbolos

$$\mathbf{a}_{\bullet k} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_{\ell \bullet} = \begin{bmatrix} a_{\ell 1} & \dots & a_{\ell m} \end{bmatrix}$$

Temos escolhido o símbolo $\bullet$ para sugerir "este índice é aberto" − ele corre e assim gera uma lista, ou vertical ou horizontal dependente se $\bullet$ fica no primeiro ou no segundo lugar. Assim podemos escrever a matriz $\mathbf{a}$ nas formas seguintes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\bullet} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\bullet} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\bullet 1} & \dots & \mathbf{a}_{\bullet n} \end{bmatrix}$$

1.2.3 Funções e polinômios

Exercício 1.2.9. Dado um conjunto não-vazio $X \neq \emptyset$ e um corpo $\mathbb{K}$, seja

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) := \{f \mid f : X \to \mathbb{K} \text{ função}\}$$

o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{K}$. Adição de funções e multiplicação com um escalar são definidas assim

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

para todos os $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostre que $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Comentário 1.2.10. A próxima observação ilustra o poder da matemática e um *ponto fundamental* dela - economizar através de abstração e *encontrar o certo ponto da vista.*

Observação 1.2.11.

a) Se $X = \{1, \dots, n\}$, então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$.
b) Se $X = \mathbb{N}$, então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^\infty$.
c) Se $X = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$, então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathrm{M}(m \times n)$.

Exercício 1.2.12 (Polinômios $\mathcal{P}(\mathbb{K})$)**.** Dados escalares $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, então chama-se uma soma finita

$$p = p(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$$

de **polinômio** na variável $x \in \mathbb{K}$ e, no caso $\alpha_n \neq 0$, de **grau *n***. Forneça o conjunto dos polinômios com uma estrutura de um espaço vetorial $(\mathcal{P}(\mathbb{K}), +, \cdot, \mathbb{K})$.

1.2.4 Excurso: Escalonamento de matrizes

Definição 1.2.13 (Operações elementares)**.** Pode-se aplicar para as linhas de uma matriz três tipos de operações, as chamadas **operações elementares**:

(oe1)$_\updownarrow$ trocar duas linhas

(oe2)$_\cdot$ multiplicar uma linha com um escalar α

(oe3)$_+$ adicionar uma linha para uma outra

Processo de escalonamento

Chama-se uma matriz **escalonada** se em cada linha o primeiro elemento não-nulo está à esquerda do primeiro elemento não-nulo da próxima linha. Exemplos

$$\text{escalonadas:} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{não é:} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Numa matriz *escalonada* os primeiros elementos não-nulos das linhas são chamados de **pivôs** da matriz escalonada.

Definição 1.2.14. Uma matriz pode ser transformada numa matriz escalonada aplicando operações elementares. O processo é repetir os três passos seguintes:

1. Localiza a primeira coluna não-nula e nela o primeiro elemento não-nulo, dizemos a. Troca a linha de a e a primeira linha.
2. Embaixo de a anulamos todo elemento não-nulo, dizemos b: Multiplique a linha de b com $-a/b$, depois adiciona a linha de a. Continue ate todos elementos embaixo de a são nulos.
3. Esqueça a linha e a coluna de a e trata a matriz reduzida começando de novo com passo 1.

O processo de escalonar uma matriz $\mathbf{a}$ termina com uma matriz escalonada a qual denotamos de $\mathbf{a}_{\text{esc}}$.

Exemplo 1.2.15. Ilustramos o escalonamento. Seja Li a i-ésima linha.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L1 \leftrightarrow L2]{1.} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2. \\ -\frac{2}{4} L3}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[adic. L1]{2. na L3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[e\ col.\ de\ 2]{3. esq. linha} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e agora começamos de novo com passo 1 tratando a matriz reduzida

$$\xrightarrow[L2 \leftrightarrow L2]{1.} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2. \\ -\frac{1}{1} L3}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[adic. L2]{2. na L3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicação: Sistemas lineares

Seja $\mathbf{a}$ uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$ uma lista ordenada com m membros. Agora adiciona para as n colunas de $\mathbf{a}$ a lista b como a $(n+1)$-ésima coluna para obter a chamada **matriz aumentada**, notação

$$[\mathbf{a} : b] := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Definição 1.2.16. Suponha a matriz $\mathbf{a}$ e a lista b são dadas. Então queremos saber se existe uma solução $x = (x_1, \dots, x_n)$ da equação $\mathbf{a}x = b$, ou seja do **sistema linear (SL) de m equações a n incógnitas**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.2.3}$$

É útil chamar a matriz aumentada $[\mathbf{a} : b]$ o **sistema linear** definido por (1.2.3). A lista $b = (b_1, \dots, b_m)$ é chamada de **inomogeneidade** do sistema linear. O caso $b = \mathcal{O} = (0, \dots, 0)$ chama-se de **sistema linear homogêneo (SLH)**.

O sistema linear pode ser escrito equivalentemente na forma

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{1.2.4}$$

O lado esquerdo é um exemplo de uma chamada “combinação linear” das colunas da matriz $\mathbf{a}$ representando o vetor b – um conceito fundamental o qual vamos tratar no próximo parágrafo.

Comentário 1.2.17. Note-se que o lado esquerdo de (1.2.4) corre sobre toda a imagem da matriz $\mathbf{a}$ se variamos x sobre todas as listas. Então um SL $[\mathbf{a} : b]$ tem uma solução se e somente se a lista b é elemento da imagem da matriz $\mathbf{a}$.

Lembramos do curso MA141 “Geometria Analítica” o seguinte

Teorema 1.2.18. *Uma lista x é solução do sistema linear $[\mathbf{a} : b]$ se e somente se x é solução do sistema linear associado à matriz escalonada $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}}$.*

Exemplo 1.2.19 (Resolução de um sistema linear usando escalonamento)**.** Para encontrar as soluções $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ do sistema linear

$$\begin{cases} y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x - 2z = 0 \end{cases}$$

primeiro, formamos a matriz aumentada $[\mathbf{a} : b]$ onde $b = (0, 0, 0) =: \mathcal{O}$, segundo, escalonamos ela, e terceiro, **resolvemos "de baixo para cima"**. Segundo Teorema 1.2.18 uma solução de $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}}$ também resolve $[\mathbf{a} : b]$, e vice versa. Exemplo 1.2.15 mostra as matrizes $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}_{\text{esc}}$. Note-se que no caso especial quando um sistema linear é *homogêneo*, ou seja $b = \mathcal{O}$, vale a fórmula seguinte

$$[\mathbf{a} : \mathcal{O}]_{\text{esc}} = [\mathbf{a}_{\text{esc}} : \mathcal{O}]$$

No nosso caso o lado direito desta fórmula representa o SLH

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ \quad\;\; y + 2z = 0 \\ \qquad\quad\; 0 = 0 \end{cases}$$

Resolução "de baixo para cima":

LINHA 3. Começamos embaixo com a ultima linha $0x + 0y + 0z = 0$ a qual não representa nenhuma restrição para x, y, z.

LINHA 2. Progredimos para cima, ou seja para a linha dois $y + 2z = 0$. Escolha uma variável para ser a variável dependente da(s) outra(s) variáveis, as quais variam livremente no corpo. No nosso caso só tem uma outra e o corpo é $\mathbb{R}$. Escolhemos por exemplo como variável dependente $y = y(z) = -2z$ como função da variável z a qual varia livremente sobre os números reais, ou seja $z \in \mathbb{R}$.

LINHA 1. Progredimos para cima, ou seja para a primeira linha

$$0 = 2x + y(z) + z = 2x - 2z + z = 2x - z$$

lembrando que $z \in \mathbb{R}$ é livre. Então $x = x(z) = \frac{1}{2}z$ para qualquer $z \in \mathbb{R}$.

Conclusão. Toda solução do SL é da forma

$$\begin{bmatrix} x(z) \\ y(z) \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}z \\ -2z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde $z \in \mathbb{R}$ é um número real arbitrário. Então o SL não tem só uma solução – tem uma para cada um numero real z. Isso conclui o Exemplo 1.2.19.

Comentário 1.2.20 (Corpos gerais $\mathbb{K}$)**.** As construções nesta Seção 1.2.4 para matrizes e listas cujas entradas são elementos do corpo $\mathbb{R}$ funcionam do mesmo jeito para matrizes com entradas num corpo geral $\mathbb{K}$.

1.3 Independência linear

1.3.1 Combinação linear

Depois da aula 3 foram adicionadas ou modificadas as partes em marrom:

Definição 1.3.1. Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $X \subset E$ um subconjunto. Uma **combinação linear estrita (CLe) em *X*** é uma soma *finita*

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_\ell v_\ell}_{=:w\in E} \tag{1.3.1}$$

de vetores $v_1, \ldots, v_\ell \in X \setminus \{\mathcal{O}\}$ *dois-a-dois diferentes* e escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, vetores e escalares todos não-nulos.[7]

A palavra mais importante em cima é “finita”. Ainda que os vetores $v_1, \ldots, v_\ell$ em (1.3.1) são elementos do conjunto X, a soma deles não necessariamente encontra-se mais em X. Encontra-se sim, quando X é um chamado “subespaço” (Lema 2.1.2).

Definição 1.3.2. Como encontra-se frequentemente somas finitas gerais

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_\ell v_\ell, \qquad \alpha_j \in \mathbb{K}, \quad v_j \in E$$

vamos chamar tal de **combinação linear (CL)** como é costume na literatura. Dizemos que

“A CLe dos vetores $v_1, \ldots, v_\ell$ representa o vetor w.”

ou

“O vetor w é CLe dos vetores $v_1, \ldots, v_\ell$.”

Exercício 1.3.3. Seja $X \subset E$ nao vazio, mostre que são conjuntos iguais

$$\begin{aligned}&\{\text{todas as combinações lineares em } X\} \cup \{\mathcal{O}\}\\ &= \{\text{todas as combinações lineares generalizadas em } X\}\end{aligned}$$

Definição 1.3.4. Por definição a frase

“combinação linear dos vetores $u, v, \ldots$”

significa

“combinação linear no conjunto $\{u, v, \ldots\}$”

A diferença é que assim *não precisamos usar todos os vetores.* (O que elimina qualquer necessidade de colocar o escalar 0 em frente dos não necessários.)

Comentário 1.3.5 (Conceitos adicionados ou redefinidos depois da aula 3)**.**

- CLe: Vetores e escalares nulos não são permitidos, nem repetições de vetores. Sao permitidos numa CL.
- $\langle X \rangle$: Temos adicionado $\mathcal{O}$ na Definição 2.2.1. Assim $\emptyset$ gera $\{\mathcal{O}\}$.

[7] Permitindo $\mathcal{O}$ e 0, ou não, não faz nenhuma diferença para os valores de (1.3.1). Então permitir é desnecessário, mas na matemática a desnecessidade é o **inimigo da clareza**. Temos adicionado o adjetivo 'estrito' porque a terminologia 'combinação linear' já é ocupada.

Exercício 1.3.6. a) Caso possível escreva o vetor $b = (1, -3, 10)$ como combinação linear dos vetores $u = (2, -3, 5)$, $v = (1, 1, 0)$, e $w = (1, 0, 0)$.
b) Sejam $u = (1, 1)$, $v = (1, 2)$ e $w = (2, 1)$. Encontre números a, b, c e α, β, γ todos não-nulos, tais que

$$au + bv + cw = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

com $a \neq \alpha$, $b \neq \beta$ e $c \neq \gamma$.

[Dica: a) Determinar os coeficientes α, β, γ na CL de u, v, w a qual representa b lida a um SL. Escalonamento.[8]
b) Defina $x = a - \alpha$, $y = b - \beta$, e $z = c - \gamma$ para obter um SLH. Resolve.][9]

[8] encontre "o certo ponto da vista" (Comentário 1.2.10) e o SL vai chegar já escalonada..

[9] Respostas para seu controle: a) $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, -6)$. b) $(x, y, z) = z(-3, 1, 1)$. Escolha um $z \neq 0$, por exemplo $z = 1$. Então $(a, b, c) = (\alpha - 3, 1 + \beta, 1 + \gamma)$. Toda escolha de reais $\alpha \neq 0, 3$ e $\beta, \gamma \neq 0, -1$ da uma solução. A escolha $\alpha = 5$ e $\beta = \gamma = 1$ resulta em $a = b = c = 2$.

Aula 3

1.3.2 Independência linear

Definição 1.3.7 (Independência linear)**.** Um subconjunto X de um espaço vetorial E é dito de **conjunto linearmente independente (LI)** se não existe nenhuma combinação linear estrita (CLe) em X representando o vetor nulo. Caso existisse, o X é chamado de **conjunto linearmente dependente (LD)**.

Nas outras palavras, chama-se $X \subset E$ de **conjunto LI** se

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_\ell v_\ell = \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_\ell = 0 \tag{1.3.2}$$

para toda escolha (finita) de vetores $v_1, \ldots, v_\ell \in X$ *dois-a-dois diferentes.*[10]

Comentário 1.3.8.

(i) O conjunto vazio $\emptyset$ é LI: Com efeito, como não contem elementos, não admite nenhuma CL. Chama-se tal argumentação de **verdade vazia**.

(ii) Um conjunto $X = \{v\}$, contendo só um vetor, é LI se e somente se $v \neq \mathcal{O}$.

(iii) Se (1.3.2) vale para uma escolha $v_1, \ldots, v_\ell$, então vale para qualquer subescolha destes vetores. [Use os coeficientes $\alpha_i = 0$ nos restantes.]

Para provar a afirmação (ii), lembra (1.1.2).

Lema 1.3.9. *Seja X um subconjunto de um espaço vetorial E.*

a) $\mathcal{O} \in X \Rightarrow X$ *LD.* *(O vetor nulo rende conjuntos LD)*

b) *Todo subconjunto A de um conjunto LI X é LI.*

Demonstração. a) O termo $1\mathcal{O}$ é uma CLe em X representando o vetor nulo (segundo Lema 1.1.17). b) Os elementos de A são elementos de X – para as quais (1.3.2) vale pela hipótese. □

Exemplo 1.3.10. Para saber se o subconjunto $X := \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é LI temos que checar (1.3.2) para todas escolhas finitas de elementos v_i de X dois-a-dois diferentes. Como X é um conjunto finito, e tendo em vista Comentário 1.3.8 (iii), começamos com a escolha máxima, ou seja todos os (dois) elementos. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Conforme (1.3.2) suponhamos a primeira igualdade

$$(0,0) = \alpha(1,0) + \beta(2,1) = (\alpha + 2\beta, \beta)$$

e recebemos a segunda igualdade pelas regras de multiplicação escalar e adição de vetores de $\mathbb{R}^2$. Comparando os segundos membros vemos que $0 = \beta$ o qual usamos na comparação dos primeiros membros: recebemos $0 = \alpha + 2 \cdot 0 = \alpha$. Assim temos provado que ambos os coeficientes α e β são nulos. Então X é LI.

Exercício 1.3.11. Quais dos seguintes conjuntos X_i de vetores de $\mathbb{R}^2$ são ou não são conjuntos linearmente independentes (LI)? Explique porque são ou não são.

1. Elementos de X_1: os vetores $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

[10] Para que precisa-se a condição *dois-a-dois diferentes*?

2. $X_2 := \{(2, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 2)\}$.
3. Escolha dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$. Então defina $X_3 := \{u, v, (1,1)\}$.

Exercício 1.3.12. Prove as afirmações seguintes.

1. A base canônica $\mathcal{E}^n$ em (1.2.1) é um conjunto LI no $\mathbb{R}^n$ para $n \in \mathbb{N}$.
2. A base canônica $\mathcal{E}^\infty$ em (1.2.2) é um conjunto LI no $\mathbb{R}^\infty_0$ e no $\mathbb{R}^\infty$.
3. Suponha $u, v \in \mathbb{K}^2$ não são múltiplos um do outro. Prove que o conjunto $\{u, v\}$ é LI.

   [Dica: Seja $\alpha u + \beta v = \mathcal{O}$. Considere $\beta \neq 0$ e, lembrando (1.1.2), $\beta = 0$.]
4. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ vetores de $\mathbb{R}^n$. Prove que um deles é múltiplo do outro se, e somente se, para todo $i, j = 1, \dots, n$ temos $x_i y_j = x_j y_i$.
5. O subconjunto $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subset \mathrm{M}(2 \times 2)$ composto das matrizes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   é um conjunto LI.
6. O conjunto X composto dos três polinômios

$$\begin{aligned} p &= p(x) = x^3 - 5x^2 + 1 \\ q &= q(x) = 2x^4 + 5x - 6 \\ r &= r(x) = x^2 - 5x + 2 \end{aligned}$$

   é um conjunto LI no espaço vetorial $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios.
7. Se o conjunto de vetores $\{v_1, \dots, v_m\}$ é LI, prove que o mesmo se dá com o conjunto $\{v_1, v_2 - v_1, \dots, v_m - v_1\}$. Vale a recíproca?

Capítulo 2

Subespaços

Subespaços de um espaço vetorial E são subconjuntos F as quais são invariante pelas duas operações chegando com E. Assim faz sentido restringir as duas operações a F. Munidos das restrições F torna-se um espaço vetorial mesmo.

2.1 Definição e exemplos

Definição 2.1.1. Um subconjunto $F \subset E$ de um espaço vetorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ é chamado de **subespaço** se é **fechado sob as duas operações**, ou seja

(i) $u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$ (F é fechado sob adição)

(ii) $\alpha \in \mathbb{K}, u \in F \Rightarrow \alpha u \in F$ (F é fechado sob multiplicação escalar)

Lema 2.1.2. *Seja F um subespaço de um espaço vetorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$. Então*

a) $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, $v_1, \dots, v_k \in F \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \in F$ *(fechado sob CL)*

b) *F é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ onde as duas operações são aquelas de E restrito ao subconjunto $F \subset E$.* *(subespaços são espaços vetoriais)*

Demonstração. a) Indução. b) As restrições tomam valores em F segundo parte a) e as axiomas valem como os elementos de F são elementos de E para as quais os axiomas valem pela hipótese que E é um espaço vetorial. □

Exercício 2.1.3 (Vetor nulo)**.** O vetor nulo de um subespaço F é o vetor nulo $\mathcal{O}$ do espaço vetorial ambiente. [Dica: Mostre $\mathcal{O} \in F$. O vetor nulo de F é único.]

Checar se um subconjunto $F \subset E$ é um espaço vetorial é bastante trabalhoso dado os muitos axiomas. Isso mostra o valor alto da parte b) do lema dizendo que é suficiente checar "fechado sob as duas operações" – tarefa rapidinha.

Exercício 2.1.4. Mostre que são subespaços de um espaço vetorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$:

a) $F := \{\mathcal{O}\}$ (o subespaço mínimo / trivial)

a) $F := E$ (o subespaço máximo)

b) $\mathbb{K}v := \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ (a reta passando v e a origem $\mathcal{O}$)
onde v é um vetor não-nulo de E. Observe que $\mathbb{K}\mathcal{O} = \{\mathcal{O}\}$ é um ponto só.

Exemplo 2.1.5 (O subespaço $\mathbb{R}^\infty_0$ de $\mathbb{R}^\infty$)**.** O subconjunto $\mathbb{R}^\infty_0 \subset \mathbb{R}^\infty$, composto de todas sequencias reais tal que só um número finito de membros são nao-nulos, é um espaço vetorial: Se a lista u tem k membros não-nulos e v tem ℓ, então (i) $u + v$ tem no máximo $k + \ell$ e (ii) αu tem no máximo k.

Exercício 2.1.6 (Espaços vetoriais de funções)**.** O conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R}) := \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ das funções reais é um espaço vetorial sob adição e multiplicação com constantes $\alpha \in \mathbb{R}$, veja Exercício 1.2.9. Para $n \in \mathbb{N}_0$ seja

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) := \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto dos **polinômios reais do grau menor ou igual** $\boldsymbol{n}$ e $\mathcal{P}(\mathbb{R}) := \cup_{n=0}^\infty \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os **polinômios reais**. Seja

$$C^0(\mathbb{R}) := C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$$

o conjunto das **funções contínuas**. Para $k \in \mathbb{N}$ seja $C^k(\mathbb{R}) := C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o conjunto das **funções** $\boldsymbol{k}$ **vezes continuamente diferenciáveis**. Chama-se

$$C^\infty(\mathbb{R}) := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\mathbb{R})$$

o conjunto das **funções suaves**. Sejam $n \in \mathbb{N}_0$ e $k \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^k(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

são subespaços do espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ do Exercício 1.2.9. Segundo parte b) do Lema 2.1.2 todos estes conjuntos são espaços vetoriais sob adição de funções e multiplicação com constantes.

Exemplo 2.1.7 (Hiperplanos no $\mathbb{R}^n$)**.** Dada uma lista $\alpha \in \mathbb{R}^n$, o subconjunto

$$\mathrm{H}_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. O vetor nulo lida ao subespaço máximo $\mathrm{H}_{\mathcal{O}} = \mathbb{R}^n$. No caso não-nulo $\alpha \neq \mathcal{O}$ chama-se H_α de **hiperplano** no $\mathbb{R}^n$ passando a origem $\mathcal{O}$.

Lema 2.1.8 (Conjunto de subespaços é fechado sob interseções)**.** *Cada interseção $F := \cap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ de subespaços F_λ de um espaço vetorial E é um subespaço.*

Demonstração. Dado $u, v \in F := \cap_\lambda F_\lambda$, ou seja $u, v \in F_\lambda$ $\forall \lambda$. Como subespaço cada um F_λ é fechado sob adição, ou seja $u + v \in F_\lambda$ para todos os $\lambda \in \Lambda$. Em símbolos $u + v \in \cap_\lambda F_\lambda =: F$. Analogamente F é fechado sob mult. escalar. □

Exemplo 2.1.9. Dada uma matriz $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n)$, então o conjunto

$$F_{\mathbf{a}} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}x = \mathcal{O}\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Para ver isso lembramos de (1.2.3) que $\mathbf{a}x = \mathcal{O}$ é o SLH

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

para n incógnitas $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, notação $x := (x_1, \ldots, x_n)$. Note-se que as soluções x da primeira linha formam o hiperplano $\mathrm{H}_1 := \mathrm{H}_{\mathbf{a}_{1\bullet}}$ associado à primeira linha $\mathbf{a}_{1\bullet}$ da matriz $\mathbf{a}$. Isso é o certo ponto da vista, com efeito assim

$$F_{\mathbf{a}} = \mathrm{H}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{H}_m$$

é uma interseção de subespaços e por isso é um subespaço segundo Lema 2.1.8.

Exercício 2.1.10.

1. Quais dos seguintes subconjuntos X_j são subespaços de $\mathbb{R}^n$? Em cada caso faça um desenho e explique porque é subespaço ou não é.
   (a) $X_1 := \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$;
   (b) $X_2 := \{(\alpha + 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$;
   (c) $X_3 := \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \text{ reais não-negativos}\} \subset \mathbb{R}^2$.
2. (LI transfere-se a espaços vetoriais *ambientes*). Seja F um subespaço de um espaço vetorial E. Mostre que se um subconjunto de F é LI em respeito ao espaço vetorial F então o também é LI em respeito ao espaço vetorial ambiente E.

2.2 Conjuntos gerandos

Definição 2.2.1 (Subespaço gerado por um subconjunto)**.** Seja E um espaço vetorial e X um subconjunto. O **subespaço de E gerado por X** é o conjunto[1]

$$\langle X \rangle : = \{\text{todas as combinações lineares estritas em } X\} \cup \{\mathcal{O}\}$$

veja Exercício 1.3.3. Note: O conjunto vazio gera o subespaço trivial $\{\mathcal{O}\} = \langle \emptyset \rangle$. Se $\langle X \rangle = E$ dizemos que **o conjunto X gera E**. Neste caso cada um elemento de E é uma CL de elementos de X.

Exercício 2.2.2. Mostre que $\langle X \rangle$ é um subespaço de E e que $\mathbb{K}v = \langle \{v\} \rangle =: \langle v \rangle$.

[1] Lembre-se da nossa convenção (1.1.1) para conjuntos, por exemplo $\{2, 2\} = \{2\}$.
Veja Comentário 1.3.5 para "$\cup\{\mathcal{O}\}$".

Lema 2.2.3. *Seja X um subconjunto de um espaço vetorial $(E,+,\cdot,\mathbb{K})$. Então*

(i) $X \subset \langle X\rangle$ (contido no subespaço gerado)

(ii) $Y \subset X \Rightarrow \langle Y\rangle \subset \langle X\rangle$ (naturalidade sob inclusão)

(iii) $F \subset E$ *subespaço* $\Rightarrow \langle F\rangle = F$ (não muda subespaços)

(iv) *Um subespaço $F \subset E$ contendo X contem $\langle X\rangle$.* (respeita subespaços)

Demonstração. (i) Seja $v \in X$, então $v \overset{\text{(comp.)}}{=} 1v \in \langle X\rangle$. (ii) Como $Y \subset X$, CLe's em Y são CLe's em X. (iii) Igualdade é consequência das duas inclusões $F \subset \langle F\rangle \subset F$, onde a primeira é (i) e para a segunda usamos que os elementos de $\langle F\rangle$ são CL's em F, mas um subespaço é fechado sob CL's segundo Lema 2.1.2 a). (iv) Com efeito $F \overset{\text{(iii)}}{=} \langle F\rangle \overset{\text{(ii)}}{\supset} \langle X\rangle$. □

Lema 2.2.4. *Todo subconjunto LI $\{u,v\} \subset \mathbb{R}^2$ de dois elementos já gera $\mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Lema A.2.1. □

Lema 2.2.5 (Os subespaços de $\mathbb{R}^2$)**.** *$\{\mathcal{O}\}$, $\mathbb{R}^2$, e as retas passando a origem.*

Demonstração. '$\supset$' Exercício 2.1.4. '$\subset$' Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^2$. Caso $F = \{\mathcal{O}\}$, pronto. Caso contrario existe $u \in F$ não-nulo. Se os demais $f \in F$ são múltiplos de u temos $F = \mathbb{R}u$, pronto. Caso contrario existe um $v \in F$, não múltiplo de u. Então $\{u,v\}$ é LI segundo Exercício 1.3.12 parte 2. Mas neste caso segundo Lema 2.2.4 e Lema 2.2.3 (iv) obtemos $\mathbb{R}^2 = \langle\{u,v\}\rangle \subset F \subset \mathbb{R}^2$. □

Exemplo 2.2.6 (Os espaços $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^\infty_0$, $\mathbb{R}^\infty$)**.**

a) A base canônica $\mathcal{E}^n = \{e_1,\dots,e_n\}$, veja (1.2.1), gera $\mathbb{R}^n$. Com efeito

$$\mathbb{R}^n \ni v = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}$$

A base canônica $\mathcal{E}^0 := \emptyset$ gera o subespaço vetorial trivial $\{0\} =: \mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}$.

b) Dado $i \in \mathbb{N}$, a sequência com todos membros nulos exceto o i-ésimo qual é 1 denotamos também de e_i. A **base canônica** $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$ gera $\mathbb{R}^\infty_0$.

c) A base canônica $\mathcal{E}^\infty$ não gera $\mathbb{R}^\infty$: Uma CLe deve ser uma soma *finita*, tente escrever a sequência cujos membros são todos 1 como uma CL.

Exemplo 2.2.7 (Polinômios)**.** O conjunto de **monômios** $\{x^0, x, x^2, \dots, x^n\}$ onde $x^0 := 1$ gera $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Todos os monômios $\{1, x, x^2, \dots\}$ geram $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exemplo 2.2.8 (Sistemas lineares)**.** Dado um sistema linear $[\mathbf{a} : b]$ onde $\mathbf{a}$ é uma matriz $m \times n$. Sabemos de (1.2.4) que existe uma solução x se e somente se a lista b é CL das colunas da matriz $\mathbf{a}$. Consequentemente se as colunas de $\mathbf{a}$ formam um conjunto de geradores de $\mathbb{R}^m$, então para cada uma inomogeneidade $b \in \mathbb{R}^m$ o SL admite uma solução.

Aula 4

2.3 Soma direta

Definição 2.3.1 (Soma de subconjuntos)**.** A **soma de subconjuntos $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$** de um espaço vetorial E é o conjunto de todas as somas

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\} \subset E$$

Em vez de $\{u\} + Y$ escreve-se $u + Y$ e chama-se **a translação de $\boldsymbol{Y}$ por $\boldsymbol{u}$**.

Lema 2.3.2. *A soma de dois subespaços é gerado da união deles, em símbolos*

$$F, G \subset E \text{ subespaços} \quad \Rightarrow \quad F + G = \langle F \cup G \rangle$$

Particularmente, a soma de dois subespaços é um subespaço mesmo.

Demonstração. Para provar igualdade de dois conjuntos prova-se as duas inclusões. '$\subset$' Os elementos de $F + G$ são CL's da forma especial $f + g$ enquanto $\langle F \cup G \rangle$ contem todas as CL's em $F \cup G$.

'$\supset$' Pegue um elemento h de $\langle F \cup G \rangle$ e use comutatividade para re-escrever a soma finita com os somandos em F no frente e depois aqueles em G. Assim recebemos um elemento, igual h, em $F + G$. □

Definição 2.3.3 (Soma direta de subespaços)**.** Sejam $F_1, F_2 \subset E$ subespaços de um espaço vetorial E. No caso da interseção trivial $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$ escreve-se $F_1 \oplus F_2$ em vez de $F_1 + F_2$ e chama-se **soma direta dos subespaços $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$.**

O símbolo $F \oplus G$ é simplesmente uma abreviação para duas informações, com efeito

$$F \oplus G = H \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} F \cap G = \{\mathcal{O}\} \\ F + G = H \end{cases}$$

Use-se a soma direta para decompor um vetor unicamente em componentes.

Teorema 2.3.4. *Sejam $F_1, F_2 \subset F$ três subespaços de um espaço vetorial E:*

$$F = F_1 \oplus F_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \in F,\ \exists!\ f_1 \in F_1,\ f_2 \in F_2 \ \text{ tal que } \ f = f_1 + f_2$$

Demonstração. Teorema A.2.2. □

Exercício 2.3.5. No espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ das funções $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sejam

$$F_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ que se anulam em todos os pontos do intervalo } [0{,}1]\}$$
$$F_2 = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ que se anulam em todos os pontos do intervalo } [2{,}3]\}$$

Mostre que F_1 e F_2 são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, que $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = F_1 + F_2$, mas não se tem $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_2$.

Exercício 2.3.6. Verdadeiro ou falso? Para todos subconjuntos $X, Y \subset E$ vale

$$\text{(i)} \quad \langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$$

$$\text{(ii)} \quad \langle X \cap Y \rangle = \langle X \rangle \cap \langle Y \rangle$$

Exercício 2.3.7. Uma matriz quadrada $\mathbf{a} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ chama-se

simétrica se $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$ **anti-simétrica** se $a_{ij} = -a_{ji}\ \forall i, j$

Então as matrizes simétricas sao aquelas iguais às suas transpostas $\mathbf{a}^t = \mathbf{a}$ e as anti-simétricas aquelas com $\mathbf{a}^t = -\mathbf{a}$.

Prove que a) o conjunto $\mathcal{S} = \mathcal{S}(n)$ das matrizes simétricas $n \times n$ e o conjunto $\mathcal{A} = \mathcal{A}(n)$ das anti-simétricas são subespaços de $\mathrm{M}(n \times n; \mathbb{K})$ e b) que

$$\mathrm{M}(n \times n; \mathbb{K}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

[Dica: b) Considere as duas matrizes $\mathbf{a}^{\pm} := \frac{1}{2}(\mathbf{a} \pm \mathbf{a}^t)$.]

Capítulo 3

Bases

Durante o Capítulo 3 denotamos de E um espaço vetorial

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K})$$

sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Bases de um espaço vetorial E sao subconjuntos LI as quais geram E no sentido que todo vetor de E pode ser escrito como combinação linear (CL) dos elementos da base. Os coeficientes escalares na CL são únicos (propriedade LI) e chamados de coordenadas de um vetor em respeito à base. Quando E admite uma base finita de n elementos chama-se n a dimensão de E. Se escolhemos uma outra base, recebemos uma outra dimensão? Veremos na Seção 3.1.2 que não: Se E admite uma base finita todas as bases tem o mesmo número de elementos.

Então bases são LI, contem suficientemente muitos elementos para que todo vetor pode ser escrito como CL deles, e na dimensão finita bases ainda são conjuntos máximos no sentido que só adicionando mais um outro vetor já recebe-se um conjunto LD.

Definição 3.0.8 (Base)**.** Para um subconjunto $\mathcal{B}$ de E definimos

$$\mathcal{B} \textbf{ base de } E \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{B} \text{ gera } E \\ \mathcal{B} \text{ é LI} \end{cases}$$

Uma **base ordenada** é uma base $\mathcal{B} = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ cujos elementos são enumerados. Conjuntos enumerados correspondem a sequencias, listas caso finito.

Exercício 3.0.9. Se $E = F_1 \oplus F_2$, mostre que uma união $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ de bases de F_1 e F_2 é uma base de E. [Dica: União LI – ideia de (A.2.1).]

Exemplo 3.0.10. Sejam $u = (1, 1)$ e $v = (2, 0)$. Os conjuntos $\{e_1, u\}$ e $\{u, v\}$ são bases de $\mathbb{R}^2$. Ambos conjuntos são LI segundo Teorema 3.1.1 (os elementos não são múltiplos um do outro), e por isso geram $\mathbb{R}^2$ (Lema A.2.1). Um exemplo para LD é o conjunto $\{e_1, v\}$, no qual um elemento é múltiplo do outro.

Exemplo 3.0.11 (Bases canônicas)**.**

a) **Listas.** Base canônica $\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ onde $n \in \mathbb{N}_0$.

   Caso $n \geq 1$. Exercício 1.3.12 confirma LI, Exercício 2.2.6 diz que gera $\mathbb{R}^n$. Caso $n = 0$. Note que $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ é o espaço vetorial trivial. O conjunto vazio $\mathcal{E}^0 = \emptyset$ é LI (Comentário 1.3.8) e gera o espaço trivial (Definição 2.2.1).

   $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$, veja Exemplo 2.2.6, não é base do $\mathbb{R}^\infty$, é sim do $\mathbb{R}^\infty_0$.

b) **Matrizes.** Seja $\mathbf{e^{ij}} \in \mathrm{M}(m \times n)$ a matriz com todas entradas nulas exceto a ij-ésima entrada a qual é $(\mathbf{e^{ij}})_{ij} = 1$. A base canônica de $\mathrm{M}(m \times n)$ é

$$\mathcal{E}^{m\times n} := \{\mathbf{e^{ij}} \mid i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\} \subset \mathrm{M}(m \times n)$$

   Note-se que a base canônica tem $|\mathcal{E}^{m\times n}| = mn$ elementos.

c) **Polinômios.** Base canônica são monômios $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

   Gerando: Por definição de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. LI: Uma CL de monômios é um polinômio $p \not\equiv 0$ (não constantemente nulo). Se p representa o vetor nulo (o polinômio constantemente nulo) todos coeficientes devem se anular porque polinômios de grau $\ell \geq 1$ tem um numero finito de raizes. Caso p é de grau zero, ele é da forma $p(x) = \alpha_0 x^0$ e para se anular α_0 deve-se anular.

   Analogamente $\{1, x, \dots, x^n\}$ é uma base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}$.

d) **Hiperplanos.** Dado uma lista $\alpha \in \mathbb{R}^n$ com $\alpha_n \neq 0$, o hiperplano

$$\mathrm{H}_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}$$

   tem como base o conjunto $\mathcal{B}_\alpha := \{\xi_1, \dots \xi_{n-1}\}$ no qual a lista

$$\xi_i := \left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -\tfrac{\alpha_i}{\alpha_n}\right) \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n-1$$

   tem todos membros nulos exceto o i-ésimo e o último. É óbvio que $\mathcal{B}_\alpha$ é LI e que gera $\mathbb{R}^n$ podemos ver assim: Para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\begin{aligned}
&x \in \mathrm{H}_\alpha \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \\
\Leftrightarrow\quad & x_n = -\tfrac{\alpha_1}{\alpha_n} x_1 - \dots - \tfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1} \\
\Leftrightarrow\quad & x = \left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\tfrac{\alpha_1}{\alpha_n} x_1 - \dots - \tfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1}\right) \in \mathbb{R}^n \\
\Leftrightarrow\quad & x = x_1 \xi_1 + \dots + x_{n-1} \xi_{n-1}
\end{aligned}$$

3.1 Aplicações

3.1.1 Coordenadas de um vetor

Teorema 3.1.1. *Seja $X \subset E$ um subconjunto tal que $|X| \geq 2$. Então*

a) *X é LI $\Leftrightarrow$ nenhum elemento de X é CL de outros elementos de X*

b) *X é LD $\Leftrightarrow$ existe um elemento de X que é CL de outros elementos de X*

Demonstração. a) '$\Rightarrow$' Seja X LI, suponha por absurdo que um elemento $u \in X$ fosse CL $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$ de outros elementos v_j (tem outros como $|X| \geq 2$). Adicionando $-u$ em ambos lados obtemos $\mathcal{O} = (-1)u + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$. Como $-1 \neq 0$, e depois descartar os termos com coeficientes nulos, trata-se de uma CLe em X representando o vetor nulo. Assim X é LD. Contradição.
'$\Leftarrow$' Suponhamos por absurdo X fosse LD. Então existe uma CLe em X

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \mathcal{O}$$

representando o vetor nulo. Caso $k = 1$. Então $\alpha_1 v_1 = \mathcal{O}$ e assim $v_1 = \alpha_1^{-1}\mathcal{O} = \mathcal{O}$. Contradição. Caso $k \geq 2$. Então $v_1 = -\alpha_1^{-1}\alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_1^{-1}\alpha_k v_k$ é CL de outros elementos de X. Contradição. b) é equivalente à parte a). $\square$

Corolário 3.1.2 (Unicidade dos coeficientes de CL's em conjuntos LI)**.** *Seja $\{v_1, \ldots, v_k\}$ um subconjunto LI de E, então*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_k = \beta_k$$

Em palavras, se duas CL's num conjunto LI representam o mesmo vetor, então os coeficientes escalares coincidem.

Demonstração. $\alpha_1 - \beta_1 = 0$: Suponha por absurdo $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$. Então o vetor

$$v_1 = (\alpha_1 - \beta_1)^{-1}\left((\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)v_k\right)$$

é CL de outros elementos. Contradição. Análogo para os outros $\alpha_j - \beta_j$.
Outro argumento (usando LI): Pela hipótese $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)v_k = \mathcal{O}$. LI diz que todos coeficientes são nulos. $\square$

Lema 3.1.3.

a) Um subconjunto Y de um conjunto LI X é LI. (Subconjuntos herdam LI)

b) Um conjunto X contendo um Y LD é LD. (Superconjuntos herdam LD)

c) Um subconjunto LI X num sub<u>espaço</u> $F \subset E$, também é LI em E.
(LI transfere-se para super<u>espaços</u>)

Demonstração. a) Como X é LI, toda CL em X representando $\mathcal{O}$ tem todos coeficientes nulos. Como $Y \subset X$, toda tal CL em Y é uma em X e assim tem todos coeficientes nulos. b) Como $Y \subset X$, uma CLe em Y representando $\mathcal{O}$ é uma tal em X. c) Isso é simplesmente o fato que o vetor nulo de um subespaço é o vetor nulo do espaço vetorial ambiente, veja Exercício 2.1.3. $\square$

Aula 5

Comentário 3.1.4 (Consequências das duas propriedades de ser base $\mathcal{B}$ de E)**.**
$\langle B\rangle = E$: Assim todo $v \neq \mathcal{O}$ pode ser escrita como CLe em $\mathcal{B}$, com efeito

$$v = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_k\xi_k \tag{3.1.1}$$

para escalares $\alpha_i \in \mathbb{K}$ e vetores da base $\xi_j \in \mathcal{B}$.
$\mathcal{B}$ é LI: Assim os coeficientes α_j em cima são únicos (Corolário 3.1.2).

Definição 3.1.5 (Coordenadas)**.** As **coordenadas de um vetor** v **em respeito a uma base** $\mathcal{B}$ são os coeficientes α_j em (3.1.1).

> *Todo vetor $v \in E$ admite coordenadas únicas $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ em respeito a uma base $\mathcal{B}$ de E.*

Exercício 3.1.6. Mostre que os polinômios 1, $x-1$, e x^2-3x+1 formam uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Exprima o polinômio $2x^2-5x+6$ como CL nessa base.

3.1.2 Dimensão de um espaço vetorial

Teorema 3.1.7. *Se um conjunto finito gera E, então qualquer conjunto $Y \subset E$ com mais elementos é LD.*

Corolário 3.1.8. *Suponha um conjunto finito X gera E, então*

$$Y \subset E \text{ LI} \qquad \Rightarrow \qquad |Y| \le |X|.$$

Para provar Teorema 3.1.7 vamos usar o seguinte resultado sobre SLH's.

Teorema 3.1.9 (Existência de soluções não-triviais de um SLH)**.** *Dado uma matriz $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$. Se tem menos linhas como colunas ($m < n$), então o SLH $\mathbf{a}x = \mathcal{O}$, compare (1.2.3), admite soluções $x = (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$.*

Demonstração. Indução sobre o número m de linhas. Veja Teorema A.3.1. □

Demonstração de Teorema 3.1.7. Suponha que o conjunto $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ gera o espaço vetorial E e seja $Y \subset E$ um outro subconjunto com mais elementos, ou seja $|Y| > m$. Para mostrar que Y é LD, basta mostrar segundo Lema 3.1.3 b) que um subconjunto $U = \{u_1, \dots, u_{m+1}\} \subset Y$ de $m+1$ elementos é LD. Como X gera E e cada um u_j pertence a E existem escalares a_{ij} tal que

$$u_j = a_{1j}v_1 + \cdots + a_{mj}v_m \tag{$*_j$}$$

para $j = 1, \dots, m+1$.

Para U é LD resta mostrar: existem escalares não-nulos $x_1, \dots, x_{m+1}$ tal que

$$x_1u_1 + \cdots + x_{m+1}u_{m+1} = \mathcal{O} \tag{3.1.2}$$

Para este fim considere o SLH de m equações de $n = m+1$ incógnitas x_j

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1,m+1}x_{m+1} = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{m,m+1}x_{m+1} = 0 \end{cases} \tag{SLH}$$

o qual tem uma solução não-trivial $x = (x_1, \dots, x_{m+1}) \neq (0, \dots, 0)$ segundo Teorema 3.1.9 como $m < n$. Obtemos (3.1.2) assim: usando $(*_1 - *_{m+1})$ temos

$$\begin{aligned}
&x_1 u_1 + \cdots + x_{m+1} u_{m+1} \\
&= x_1 \left(a_{11} v_1 + \cdots + a_{m1} v_m\right) \\
&\quad + x_2 \left(a_{12} v_1 + \cdots + a_{m2} v_m\right) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + x_{m+1} \left(\alpha_{1,m+1} v_1 + \cdots + \alpha_{m,m+1} v_m\right) \\
&= v_1 \underbrace{\sum_{j=1}^{m+1} a_{1j} x_j}_{=0 \ (\mathrm{SLH})_1} + \cdots + v_m \underbrace{\sum_{j=1}^{m+1} a_{mj} x_j}_{=0 \ (\mathrm{SLH})_m} \\
&= \mathcal{O}
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.1.10. *Se uma base $\mathcal{B}$ de E tem m elementos, então todas tem.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ bases de E.
1) $\langle \mathcal{B} \rangle = E$ e $Y := \tilde{\mathcal{B}}$ LI implicam (Corolário 3.1.8) $\ell := |\tilde{\mathcal{B}}| \le |\mathcal{B}| = m < \infty$.
2) Analogamente como $\langle \tilde{\mathcal{B}} \rangle = E$ e $Y := \mathcal{B}$ é LI, temos que $m = |\mathcal{B}| \le |\tilde{\mathcal{B}}| = \ell$. □

Definição 3.1.11 (Dimensão)**.** Se um espaço vetorial E admite uma base finita $\mathcal{B}$, o numero dos elementos é dito a **dimensão de *E***, em símbolos

$$\dim E := |\mathcal{B}|$$

Caso E não admite nenhuma base finita dizemos que E é de **dimensão infinita** e escrevemos $\dim E = \infty$.

Comentário 3.1.12 (Dimensão do espaço vetorial trivial)**.** O conjunto vazio é uma base do espaço vetorial trivial $E = \{\mathcal{O}\}$, Exemplo 1.3.8, assim $\dim\{\mathcal{O}\} = 0$.

Lema 3.1.13 (Aumentando conjuntos LI)**.** *Seja $X = \{v_1, \dots, v_k\}$ um subconjunto LI e seja $u \in E$ um vetor fora do subespaço gerado, ou seja $\langle X \rangle$. Então o conjunto extendido $\{v_1, \dots, v_k, u\}$ também é LI.*

Demonstração. Se $X = \emptyset$, então $u \notin \langle \emptyset \rangle = \{\mathcal{O}\}$, assim $u \neq \mathcal{O}$ e $\{u\}$ é LI segundo Corolário 1.3.8. Se $X \neq \emptyset$, suponha por absurdo que $\{v_1, \dots, v_k, u\}$ fosse LD. Assim existe uma CLe $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta u = \mathcal{O}$. Caso $\beta = 0$, entao $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq (0, \dots, 0)$ e $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \mathcal{O}$. Assim $\{v_1, \dots, v_k\}$ é LD. Contradição. Caso $\beta \neq 0$, entao $u = -\beta^{-1}\left(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k\right) \in \langle X \rangle$. Contradição. □

Exercício 3.1.14. Sejam $X_1, X_2, \dots$ subconjuntos LI de um espaço vetorial E.

1. Caso encaixado $X_1 \subset X_2 \subset \dots$, prove que $X = \bigcup X_n$ é LI.

2. Se cada X_n tem n elementos, prove que existe um conjunto LI $\tilde{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$ com $x_j \in X_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.
3. Supondo $E = \mathbb{R}^\infty$ e as hipóteses em 1. e 2., é verdade que $X = \bigcup X_n$ seja uma base de E?

Corolários do Teorema 3.1.7

Nos corolários seguintes $n \in N_0$, particularmente é um número, assim finito.

Corolário 3.1.15. *$Y \subset E$, $|Y| > n := \dim E \;\Rightarrow\; Y$ LD*

Demonstração. Como $\dim E = n$ existe uma base $\mathcal{B}$ de E com n elementos. □

Corolário 3.1.16. *Se um conjunto Y é LI em E, então $|Y| \leq \dim E$.*

Demonstração. Caso $\dim E = \infty$: verdadeiro trivialmente. Caso $\dim E < \infty$: escolha para X em Corolário 3.1.8 uma base de E para obter $|Y| \leq \dim E$. □

Corolário 3.1.17. *Suponha $X \subset E$ tem $n := \dim E$ elementos, então*

$$X \text{ gera } E \qquad \Leftrightarrow \qquad X \text{ é LI}$$

Demonstração. $\boldsymbol{n = 0.}$ Assim $X = \emptyset$, ambos lados valem automaticamente.
$\boldsymbol{n = 1.}$ Assim $X = \{v\}$ onde $v \in E$, ambos lados são equivalentes a $v \neq \mathcal{O}$.
$\boldsymbol{n = 2.}$ **'$\Rightarrow$'** Suponha que $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ gera E. Por absurdo suponha que X é LD. Segundo Teorema 3.1.1 b) um elemento de X, dizemos v_n, é CL de outros elementos de X. Então $E = \langle X \rangle = \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle = \langle \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \rangle$. Qualquer base $\mathcal{B}$ de E tem n elementos pela hipótese $n = \dim E$ – mais elementos como o conjunto $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ gerando E. Entao $\mathcal{B}$ é LD segundo Teorema 3.1.7. Contradição. **'$\Leftarrow$'** Suponha que $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ é LI. Por absurdo suponha que X não gera E. Então existe $u \in E$ não elemento de $\langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$. Assim o conjunto aumentado $\{v_1, \dots, v_n, u\}$ é LI segundo Lema 3.1.13. Mas um subconjunto com mais elementos $(n+1)$ como a dimensao (n) é LD segundo Corolário 3.1.15. Contradição. □

Corolário 3.1.18. *Um subconjunto LI com $n = \dim E$ elementos é uma base.*

Demonstração. Tal subconjunto LI gera E segundo Corolário 3.1.17 '$\Leftarrow$'. □

Lema 3.1.19. *Se um conjunto finito X gera E, então $|X| \geq \dim E$.*

Demonstração. Suponha que $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ gera E.
Caso $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ é LI: Então X é base e assim $|X| = \dim E$.
Caso $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ é LD: Assim $X \neq \emptyset$.
Caso $m = 1$: Então $v_1 = \mathcal{O}$ e $E = \langle v_1 \rangle = \{\mathcal{O}\}$. Assim $|X| = 1 > 0 = \dim E$.
Caso $m \geq 2$: Como $\{v_1, \dots, v_m\}$ é LD, pelo menos um elemento, dizemos v_m, deve ser CL de outros. Iterando até chegamos num conjunto LI obtemos que

$$E = \langle \{v_1, \dots, v_m\} \rangle = \langle \{v_1, \dots, v_{m-1}\} \rangle = \dots = \langle \{v_1, \dots, v_\ell\} \rangle$$

onde $\{v_1, \ldots, v_\ell\}$ é LI e $\ell \geq 1$. Então $\{v_1, \ldots, v_\ell\} =: \mathcal{B}$ é base de E e assim $|X| > \ell = |\mathcal{B}| =: \dim E$. $\square$

Exemplo 3.1.20 (Dimensão)**.** Veja Exemplo 3.0.11.

(a) $\dim \mathbb{R}^n = |\mathcal{E}^n| = n$ e $\dim \mathbb{R}^\infty_0 = |\mathcal{E}^\infty| = \infty$. (Análogo para corpos $\mathbb{K}$.)

$\dim \mathbb{R}^\infty = \infty$: Suponha por absurdo que é finita a dimensão $n := \dim \mathbb{R}^\infty$. Segundo Corolário 3.1.15 para $Y = \mathcal{E}^\infty$ e $E = \mathbb{R}^\infty$, como $|Y| = |\mathcal{E}^\infty| = \infty > n = \dim \mathbb{R}^\infty$, segue que $\mathcal{E}^\infty$ é LD $\underline{\text{em } \mathbb{R}^\infty}$. Mas $\mathcal{E}^\infty$ é LI $\underline{\text{em } \mathbb{R}^\infty}$ segundo Exercício 1.3.12. (Outro argumento: Como $\mathcal{E}^\infty$ é LI em $\mathbb{R}^\infty_0$, deve ser LI em $\mathbb{R}^\infty$ segundo parte c) do Lema 3.1.3.) Contradição.

(b) $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1$ e $\dim \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \infty$.

(c) $\dim \mathrm{M}(m \times n) = mn$.

(d) Hiperplanos $H_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, onde $\alpha \in \mathbb{R}^n$ não-nulo, tem dimensão $n-1$. Aquele '**hiper**' refere-se ao fato do que na dimensão falta 1 para a dimensão do espaço vetorial ambiente.

Aula 6

3.2 Existência e extensão

Teorema 3.2.1. *Seja E da dimensão finita $n \in \mathbb{N}_0$.*

(a) *Todo conjunto gerando E contem uma base de E.*

(b) *Todo subconjunto LI é contido numa base.*

(c) *A dimensão de qualquer subespaço de E é $\le n$.*

(d) *Um subespaço F de E da mesma dimensão n é igual a E.*

Demonstração. LI refere-se a E se não especificado diferente. **(a)** Suponha X gera E. Seja $B \subset X$ qualquer subconjunto LI (existe como $B = \emptyset$ mostra), então $|B| \le \dim E =: n$ segundo Corolário 3.1.16. Para $k \in \mathbb{N}_0$ seja

$$\mathcal{C}_k := \{B \subset X \mid B \text{ é LI e } |B| = k\}$$

a família de todos os subconjuntos $B \subset X$ os quais são LI e composto de k elementos. Seja $B_* \subset X$ um subconjunto LI com o número máximo de elementos. Então $B_* \in \mathcal{C}_\ell$ para um $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$. Seja $B_* = \{\xi_1, \dots, \xi_\ell\}$. Considere as quatro inclusões (dois deles sendo igualdades)

$$E = \langle X \rangle \subset \langle \langle B_* \rangle \rangle = \langle B_* \rangle \subset E$$

Consequentemente o conjunto LI B_* gera E, ou seja B_* é uma base. Resta justificar as quatro inclusões. Inclusão 1. Pela hipótese X gera E.
Inclusão 2. Parte (ii) de Lema 2.2.3 aplica como $X \subset \langle B_* \rangle$: Suponha por absurdo que existe um vetor $v \in X$ o qual não é CL em B_*, ou seja $v \notin \langle B_* \rangle$. Segundo Lema 3.1.13 o subconjunto aumentado $\{\xi_1, \dots, \xi_\ell, v\}$ de X ainda é LI, mas contem $\ell + 1$ elementos, então mais como B_*. Contradição.
Inclusão 3. Como $\langle B_* \rangle$ é um subespaço parte (iii) de Lema 2.2.3 aplica.
Inclusão 4. Como $B_* \subset X \subset E$ parte (ii) de Lema 2.2.3 aplica.

(b) Suponha $X \subset E$ é um subconjunto LI. Como $k := |X| \in \{0, \dots, n\}$, veja Corolário 3.1.16, trata-se de um conjunto finito, ou seja $X = \{v_1, \dots, v_k\}$. Subconjuntos $B \subset E$ LI e contendo X (existem como $B := X$ mostra) são compostos de ℓ elementos para um $\ell \in \{k, \dots, n\}$. Seja B_* um tal subconjunto com o número máximo ℓ_* de elementos. Então B_* é LI e contem $X \subset B_*$. Para B_* é uma base de E, resta mostrar que gera E, ou seja $\langle B_* \rangle = E$:
'$\subset$' trivial como $B_* \subset E$. '$\supset$' Suponha por absurdo que existe um vetor $u \in E$ o qual não pertence a $\langle B_* \rangle$, então o conjunto aumentado $B_* \cup \{u\}$ é LI segundo Lema 3.1.13, contem X porque B_* contem X – mas tem mais elementos como B_*. Contradição.

(c) Suponha F é um subespaço de E. Seja $B \subset F$ qualquer subconjunto LI em respeito a F (existe como $B = \emptyset$ mostra). Note que B é LI em respeito a E segundo Lema 3.1.3 c). Assim $|B| \le n := \dim E$ segundo Corolário 3.1.16. Agora escolha um subconjunto $B_* \subset F$ LI em respeito a F com o número máximo de elementos. Como temos visto $k := |B_*| \le \dim E =: n$. Resta mostrar que B_* é uma base de F (neste caso $\dim F = |B_*|$). Pela escolha B_* é

LI em F, então basta mostrar $\langle B_* \rangle = F$:
'$\subset$' trivial como $B_* \subset F$. '$\supset$' Suponha por absurdo que existe um vetor $u \in F$ o qual não pertence a $\langle B_* \rangle$, então o conjunto aumentado $B_* \cup \{u\}$ é LI em F segundo Lema 3.1.13 – mas tem mais elementos como B_*. Contradição.

(d) Seja $F \subset E$ um subespaço de dimensão $n := \dim E$. Pela definição de dimensão existe uma base $\mathcal{B}$ de F com n elementos. Como $\mathcal{B}$ é LI em respeito a F, é LI em respeito a E segundo Lema 3.1.3 c). Como além disso $|\mathcal{B}| = n := \dim E$ o Corolário 3.1.17 diz que $\mathcal{B}$ gera E. Então $E = \langle \mathcal{B} \rangle = F$, onde a segunda igualdade segue porque $\mathcal{B}$ é base de F, então gera F. □

Proposição 3.2.2. *Seja F um espaço vetorial e F_1, F_2 subespaços de dimensão finita k, ℓ. Então existe uma base finita $\mathcal{B}$ do subespaço $F_1 + F_2$ de F que contem uma base $\mathcal{B}_1$ de F_1, uma base $\mathcal{B}_2$ de F_2, e uma base $\mathcal{B}_{12}$ de $F_1 \cap F_2$. Vale que*

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2) \tag{3.2.1}$$

Demonstração. Vamos denotar de (b),(c) as partes correspondentes do Teorema 3.2.1. O subespaço $F_1 \cap F_2 \subset F_1$ tem dimensão finita m (segundo (c) para $E = F_1$) e assim admite uma base finita $\mathcal{B}_{12} = \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ (segundo a definição de dimensão). Segundo (b) para $E = F_1$ o conjunto $\mathcal{B}_{12}$ – LI em $F_1 \cap F_2$ e segundo Lema 3.1.3 LI no superespaço F_1 – é contido numa base $\mathcal{B}_1$ de F_1. Analogamente $\mathcal{B}_{12}$ é contido numa base $\mathcal{B}_2$ de F_2. Uma base de $F_1 + F_2$ contendo as bases desejadas é

$$\mathcal{B} := (\mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B}_{12}) \,\dot\cup\, \overbrace{\mathcal{B}_{12} \,\dot\cup\, (\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12})}^{\mathcal{B}_2} = \mathcal{B}_1 \,\dot\cup\, (\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12}) = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$$

Contando elementos obtemos

$$\dim(F_1 + F_2) := |\mathcal{B}| = (k - m) + m + (\ell - m) = k + \ell - m.$$

Resta checar as duas propriedades de uma base. $\mathcal{B}$ gera $F_1 + F_2$: Os elementos de $F_1 + F_2$ são da forma $f_1 + f_2$ onde $f_1 \in F_1$ (assim é CL em $\mathcal{B}_1$) e $f_2 \in F_2$ (assim é CL em $\mathcal{B}_2$). Consequentemente $f_1 + f_2$ é CL em $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$.
$\mathcal{B}$ é LI em F: Seja $\mathcal{B}_1 = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ e $\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12} = \{\eta_1, \dots, \eta_{\ell-m}\}$. Suponha que

$$\alpha_1 \xi_1 + \cdots + \alpha_k \xi_k + \beta_1 \eta_1 + \cdots + \beta_{\ell-m} \eta_{\ell-m} = \mathcal{O}$$

onde os α_i, β_i são escalares não todos nulos. Não todos β_i's são nulos (caso contrário $\mathcal{B}_1$ é LD, contradição). Então temos um $\beta_i \neq 0$. Neste caso η_i é CLe em $\mathcal{B}_1$, assim $\mathbb{R}\eta_i \subset F_1$. De outro lado, como $\eta_i \in \mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12}$ e $\mathcal{B}_{12}$ é uma base de $F_1 \cap F_2$ concluímos que $\mathbb{R}\eta_i \subset F_2$ e $\mathbb{R}\eta_i \not\subset F_1 \cap F_2$. Contradição. □

Corolário 3.2.3. *Sejam $F, G \subset E$ subespaços de dimensões finitas, então:*

$$F \oplus G = E \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{\mathcal{O}\} \end{cases}$$

Demonstração. '$\Rightarrow$' Fórmula (3.2.1) usando que a interseção tem dimensão zero. '$\Leftarrow$' Suponha que $F \cap G = \{\mathcal{O}\}$ e que as dimensões de F e G adicionam à dimensão de E. Segundo Lema 2.3.2 a soma $F + G$ é um subespaço de E. Então $F + G = E$ segundo Teorema 3.2.1 (d). $\square$

Exercício 3.2.4 (Subespaços do espaço $\mathrm{M}(n \times n)$ das matrizes quadradas)**.** [1]

1. Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{S} \subset \mathrm{M}(n \times n)$ os subespaços das matrizes anti-/simétricas.

   (a) Para cada par $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ seja $\mathbf{e}_+^{\mathbf{ij}}$ a matriz $n \times n$ cujos elementos nas posições ij e ji são iguais a 1 e os demais são zero. Prove que estas matrizes constituem uma base $\{\mathbf{e}_+^{\mathbf{ij}}\}$ para $\mathcal{S}$.

   (b) De modo análogo, obtenha uma base $\{\mathbf{e}_-^{\mathbf{ij}}\}$ para $\mathcal{A}$.

   (c) Conclua que

   $$\dim \mathcal{S} = \frac{n(n+1)}{2} \qquad\qquad \dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}$$

   Calcule $\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{A}$ e lembre-se que $\dim \mathrm{M}(n \times n) = n^2$. Conclua que

   $$\mathrm{M}(n \times n) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$$

   Antes, no Exercício 2.3.7, tenhamos obtido uma prova alternativa desse.

2. As matrizes $\mathbf{t} = (t_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n)$ tais que $t_{ij} = 0$ quando $i < j$ são chamadas **triangulares inferiores**. Prove que elas constituem um subespaço $\mathcal{T} \subset \mathrm{M}(n \times n)$. Obtenha uma base para $\mathcal{T}$ e determine a sua dimensão.

3. Obtenha uma base e consequentemente determine a dimensão de cada um dos seguintes subespaços de $\mathrm{M}(n \times n)$ as quais são composto de

   (a) matrizes $\mathbf{a} = (a_{ij})$ de **traço** (a soma dos elementos da diagonal) nulo

   $$\operatorname{tr} \mathbf{a} := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$$

   (b) matrizes cuja primeira e última linha são iguais

   (c) matrizes cuja primeira linha e primeira coluna são iguais

[1] As dimensões para seu controle: 2. $\dim \mathcal{T} = n(n+1)/2$
3. (a) $2\frac{(n-1)n}{2} + (n-1) = n^2 - 1$ (b) $n(n-2) + n = n(n-1)$ (c) $(n-1)^2 + n = n^2 - (n-1)$

Aula X

Parte II

Teoria das transformações lineares

Capítulo 4

Transformações lineares

4.1 Exemplos

4.2 Matriz de uma transformação linear

4.3 Rotações e projeções

4.4 Produto de transformações lineares

Capítulo 5

Núcleo e imagem

Apêndice A

Demonstrações restantes

A.1 Espaços vetoriais

Lema A.1.1 (Lema 1.1.4)**.** *Seja $(G, *)$ um grupo. Então vale o seguinte.*
1) *O elemento neutro é único.*
2) *Os elementos inversos são únicos.*
3) *Para todos os elementos $f, g, h \in G$ vale:*
   a) $f * g = f * h \;\Rightarrow\; g = h$ *(lei da corte)*
   b) $f * g = f \;\Rightarrow\; g = e$
   c) $f * g = e \;\Rightarrow\; g = \bar{f}$

Demonstração. 1) Se $e, \tilde{e} \in G$ satisfazem o axioma (elemento neutro), então usando o axioma para e e depois para $\tilde{e}$ obtemos que $e = e * \tilde{e} = \tilde{e}$.
2) Seja $g \in G$. Se $\bar{g}, \tilde{g} \in G$ satisfazem o axioma (inverso) para g, então obtemos

$$\bar{g} = e * \bar{g} = \underbrace{(\tilde{g} * g)}_{=e} * \bar{g} = \tilde{g} * \underbrace{(g * \bar{g})}_{=e} = \tilde{g} * e = \tilde{g}$$

usando (elem. neutro) no início e fim, $(\text{inverso})_{\tilde{g}}$, (associatividade), $(\text{inverso})_{\bar{g}}$.
3) a) $g = e * g = (\bar{f} * f) * g = \bar{f} * (f * g) \overset{\text{hip.}}{=} \bar{f} * (f * h) = (\bar{f} * f) * h = e * h = h$.
b) Use a) com $h = e$. c) Use a) com $h = \bar{f}$. $\square$

Lema A.1.2 (Lema 1.1.9)**.** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $0 \in K$ é o elemento neutro da adição. Então $0\beta = 0$ e $\beta 0 = 0$ para todos os elementos $\beta \in \mathbb{K}$.*

Demonstração. Seja $\beta \in \mathbb{K}$, denotamos o inverso aditivo de $-\beta$. Então

$$\beta \overset{(\text{el.n.})_\cdot}{=} 1\beta \overset{(\text{el.n.})_+}{=} (1+0)\beta \overset{(\text{distr.})}{=} 1\beta + 0\beta \overset{(\text{el.n.})_\cdot}{=} \beta + 0\beta$$

Usamos esta identidade para obter a segunda igualdade no seguinte

$$0 \overset{(\text{inv.})}{=} (-\beta) + \beta = -\beta + (\beta + 0\beta) \overset{(\text{ass.})_+}{=} (-\beta + \beta) + 0\beta \overset{(\text{inv.})}{=} 0 + 0\beta \overset{(\text{el.n.})}{=} 0\beta$$

$\square$

Lema A.1.3 (Lema 1.1.17)**.** *Para o vetor nulo $\mathcal{O} \in E$ de um espaço vetorial e o elemento neutro aditivo $0 \in \mathbb{K}$ do corpo vale o seguinte.*

(i) $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ *para todos os escalares* $\alpha \in \mathbb{K}$.

(ii) $0v = \mathcal{O}$ *para todos os vetores* $v \in E$.

(iii) *Para todo o escalar* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e todo o vetor* $w \in E$ *são equivalentes:*

$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O}$$

Demonstração. (i) Caso $\alpha = 0$. Como $\alpha\mathcal{O} + 0\mathcal{O} = (\alpha + 0)\mathcal{O} = \alpha\mathcal{O}$, então $0\mathcal{O} = \mathcal{O}$ pela lei da corte (Lema A.1.1 3b) para $(G, *) = (E, +)$).
Caso $\alpha \neq 0$. Tal α tem um inverso aditivo, notação α^{-1}. Seja $v \in E$, então

$$v \overset{\text{(comp.)}}{=} 1v \overset{\text{(inv.)}_{\mathbb{K},\cdot}}{=} (\alpha\alpha^{-1})v \overset{\text{(comp.)}}{=} \alpha(\alpha^{-1}v)$$

Usando este resultado no início e no fim do seguinte obtemos que

$$v + \alpha\mathcal{O} = \alpha(\alpha^{-1}v) + \alpha\mathcal{O} \overset{\text{(distr.)}_E}{=} \alpha((\alpha^{-1}v) + \mathcal{O}) \overset{\text{(el.n.)}_{E,+}}{=} \alpha(\alpha^{-1}v) = v$$

Então $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ pela lei da corte (Lema A.1.1 3b) para $(G, *) = (E, +)$).

(ii) Como $v + 0v = 1v + 0v = (1 + 0)v = 1v = v$ a lei da corte diz que $0v = \mathcal{O}$.

(iii) '$\Rightarrow$' Suponha $\alpha w = \mathcal{O}$. Caso $\alpha = 0$, pronto. Caso $\alpha \neq 0$ concluímos que

$$w \overset{\text{(comp.)}}{=} 1w \overset{\text{(el.n.)}_{\mathbb{K},\cdot}}{=} (\alpha^{-1}\alpha)w \overset{\text{(comp.)}}{=} \alpha^{-1}(\alpha w) \overset{\text{hip.}}{=} \alpha^{-1}\mathcal{O} \overset{\text{(i)}}{=} \mathcal{O}$$

'$\Leftarrow$' Se $w = \mathcal{O}$, então $\alpha\mathcal{O} \overset{\text{(i)}}{=} \mathcal{O}$, pronto. Se $\alpha = 0$, então $0w \overset{\text{(ii)}}{=} \mathcal{O}$, pronto. □

Corolário A.1.4 (Corolário 1.1.18)**.** *Para todos os* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $w \in E$ *vale:*

a) $\alpha(-w) = -(\alpha w)$

b) $(-\alpha)w = -(\alpha w)$

Demonstração. a) Temos que mostrar que a soma de αw e o candidato para ser seu inverso aditivo iguale o vetor nulo. Com efeito

$$\alpha w + \alpha(-w) \overset{\text{(distr.)}_E}{=} \alpha(w + (-w)) \overset{\text{(el.n.)}_{E,+}}{=} \alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$$

onde o último passo é parte (i) de Lema A.1.3.
b) Temos o objetivo análogo de chegar ao vetor nulo, com efeito

$$\alpha w + (-\alpha)w \overset{\text{(distr.)}_E}{=} (\alpha + (-\alpha))w \overset{\text{(el.n.)}_{\mathbb{K},+}}{=} 0w = \mathcal{O}$$

onde o último passo é parte (ii) de Lema A.1.3. □

A.2 Subespaços

Lema A.2.1 (Lema 2.2.4)**.** *Todo subconjunto LI* $\{u, v\} \subset \mathbb{R}^2$ *gera* $\mathbb{R}^2$.

Demonstração. Vai ter 4 passos. I. Os vetores u, v não são múltiplos um do outro: Suponha por absurdo que $u = \alpha v$ para um $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $1u + (-\alpha)v = 1\alpha v - (\alpha v) = \mathcal{O}$ contradizendo LI. II. $u \neq \mathcal{O}$: Caso contrario $u = \mathcal{O} = 0v$ contradizendo I. III. $v \neq \mathcal{O}$: Análogo. IV. Seja $v \in \mathbb{R}^2$. Caso $w = \mathcal{O}$ escrevemos $w = 0u$, pronto. Caso $v \neq \mathcal{O}$: Agora identificamos $\mathbb{R}^2$ com o plano usando dois eixos OXY, veja Figura 2. Segundo II. e III. temos duas retas $\mathbb{R}u$ e $\mathbb{R}v$ passando ambas a origem O, mas não são iguais segundo I. Recebemos um paralelogramo com dois lados parte das retas e dois vértices sendo $\mathcal{O}$ e v; pensa Figura 2 com OX e OY substituto para Ou e Ov. Então a flecha v é a soma de duas flechas do paralelogramo, uma flecha sendo um múltiplo de u e a outra de v. Pronto. $\square$

Teorema A.2.2 (Teorema 2.3.4)**.** *Sejam* $F_1, F_2 \subset F$ *três subespaços de um espaço vetorial* E*, então são equivalentes*

$$F = F_1 \oplus F_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \in F,\ \exists!\ f_1 \in F_1,\ f_2 \in F_2 \ \textit{ tal que }\ f = f_1 + f_2$$

Demonstração. '$\Rightarrow$' Seja $f \in F$. Como hipótese temos duas informações, a saber (i) $F = F_1 + F_2$ e (ii) $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$, dando existência e unicidade.
Existência: De (i) sabemos que $f = f_1 + f_2$ para um $f_1 \in F_1$ e um $f_2 \in F_2$.
Unicidade. Suponha que $f = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ também para um $\tilde{f}_1 \in F_1$ e um $\tilde{f}_2 \in F_2$. Então $F_1 \ni f_1 - \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 - f_2 \in F_2$. Assim cada um lado pertence a ambos espaços, então a $F_1 \cap F_2$ o qual segundo (ii) iguale $\{\mathcal{O}\}$. Como não tem outro elemento, cada um lado deve ser o vetor nulo.
'$\Leftarrow$' $F_1 + F_2 = F$: A hipótese *existência* disponibiliza a primeira inclusão $F \subset F_1 + F_2 \subset F$ e a segunda vale como $F_1, F_2 \subset F$.
$F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$: Seja $f \in F_1 \cap F_2$, a mostrar $f = \mathcal{O}$. Note que $f \in F$ como $F_1, F_2 \subset F$. Então segundo a propriedade do vetor nulo

$$\underbrace{f}_{\in F_1} + \underbrace{\mathcal{O}}_{\in F_2} = f = \underbrace{\mathcal{O}}_{\in F_1} + \underbrace{f}_{\in F_2} \tag{A.2.1}$$

Mas pela hipótese *unicidade* escrever f como soma de um elemento de F_1 e um elemento de F_2 é único, então $f = \mathcal{O}$ e $\mathcal{O} = f$. $\square$

A.3 Bases

Teorema A.3.1 (Teorema 3.1.9)**.** *Dado uma matriz* $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$*. Se tem menos linhas como colunas* ($m < n$)*, então o sistema linear homogêneo (SLH)*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

admite soluções $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *não triviais (não todos* x_j *nulos).*

Demonstração. Indução sobre o número m de equações. $m = 1$: $\square$

Índice Remissivo