

# Álgebra Linear

Notas da aula<sup>1</sup>  
MA327 2020-2

manuscrito em progresso

Joa Weber  
UNICAMP

30 de setembro de 2020

<sup>1</sup>versão final estará lá: [www.math.stonybrook.edu/~joa/PUBLICATIONS/MA327.pdf](http://www.math.stonybrook.edu/~joa/PUBLICATIONS/MA327.pdf)



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>3</b>
Notações . . . . .	5
Convenções . . . . .	5
<b>I Teoria dos espaços vetoriais</b>	<b>7</b>
<b>1 Espaços vetoriais</b>	<b>9</b>
1.1 Axiomas . . . . .	9
1.1.1 Grupo . . . . .	9
1.1.2 Corpo . . . . .	10
1.1.3 Espaço vetorial . . . . .	14
1.2 Exemplos . . . . .	19
1.2.1 Listas ordenadas . . . . .	19
1.2.2 Matrizes . . . . .	20
1.2.3 Funções e polinômios . . . . .	21
1.2.4 Excurso: Escalonamento de matrizes . . . . .	22
1.3 Independência linear . . . . .	24
1.3.1 Combinação linear . . . . .	24
1.3.2 Independência linear . . . . .	29
<b>2 Subespaços</b>	<b>31</b>
2.1 Definição e exemplos . . . . .	31
2.2 Conjuntos gerandos . . . . .	33
2.3 Soma direta . . . . .	37
<b>3 Bases</b>	<b>39</b>
3.1 Aplicações . . . . .	40
3.1.1 Coordenadas de um vetor . . . . .	40
3.1.2 Dimensão de um espaço vetorial . . . . .	45
3.2 Existência e extensão . . . . .	51

<b>II</b>	<b>Teoria das transformações lineares</b>	<b>53</b>
<b>4</b>	<b>Transformações lineares</b>	<b>55</b>
4.1	Exemplos . . . . .	55
4.2	Matriz de uma transformação linear . . . . .	55
4.3	Rotações e projeções . . . . .	55
4.4	Produto de transformações lineares . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Núcleo e imagem</b>	<b>57</b>
<b>A</b>	<b>Demonstrações restantes</b>	<b>59</b>
A.1	Espaços vetoriais . . . . .	59
A.2	Subespaços . . . . .	61
A.3	Bases . . . . .	61
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>63</b>

# Aula 1



# Introdução

## Álgebra Linear

é o estudo dos espaços lineares e das transformações lineares.

Uma outra palavra para espaço linear é espaço vetorial.

**Exemplo 0.0.1** (Flechas equivalentes no plano). Seja  $F$  o conjunto das flechas equivalentes  $v$  (mesma direção e comprimento) no plano  $\Pi$  munido das operações de multiplicar uma flecha  $v$  com um número real  $\alpha \in \mathbb{R}$  e de adicionar duas flechas  $v$  e  $w$ .

*Multiplicação (escalar)*. Pela definição  $\alpha v$  é a flecha na direção de  $v$  cujo comprimento é  $\alpha$  vezes aquele de  $v$  (muda-se a direção caso o número  $\alpha$  é negativo).

*Adição (vetorial)*. Pela definição  $v + w$  é a flecha cujo ponto inicial é aquela de  $v$  e cujo ponto termino  $p$  é obtido depois fazer uma translação de  $w$  movendo o ponto inicial de  $w$  no ponto termino de  $v$ . Então  $p$  é definido como o ponto termino do novo  $w$ .

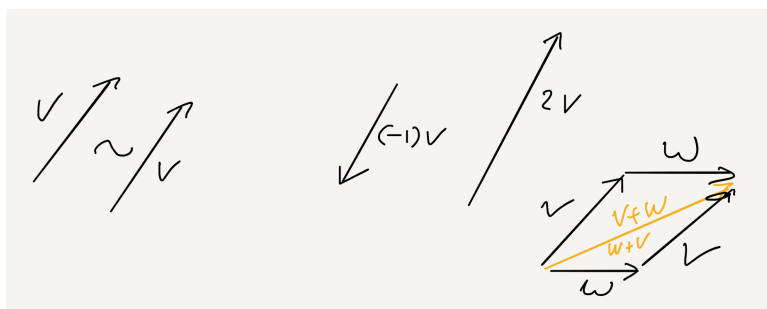


Figura 1: Adição de flechas e multiplicação escalar

Tal  $F$  é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$  e um exemplo de uma transformação linear em  $F$  é dado pela rotação  $r_\theta : F \rightarrow F$  de uma flecha  $v$  pelo ângulo  $\theta$  em torno do ponto inicial.

**Exemplo 0.0.2** (Pares de números reais). Seja  $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  o conjunto de todas listas ordenadas de dois membros reais munido da adição

membro-por-membro e multiplicação com um número real  $\alpha \in \mathbb{R}$  também membro-por-membro. Então  $\mathbb{R}^2$  é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$ .

**Comentário 0.0.3** (Identificação dos conjuntos e operações – isomorfismo). Os dois exemplos anteriores são “iguais” no sentido seguinte. Suponhamos que na reta podemos medir a distância 1. No plano  $\Pi$  escolha um **eixo**  $OX$ , ou seja uma reta com dois pontos diferentes  $O$  e  $X$  da distância 1, e um segundo eixo  $OY$  cujo primeiro ponto  $O$  é aquele do  $OX$  e qual intersecta  $OX$  exatamente no ponto  $O$ . Uma tal escolha de dois eixos é chamado um **sistema de coordenadas** no plano, símbolo  $OXY$ .

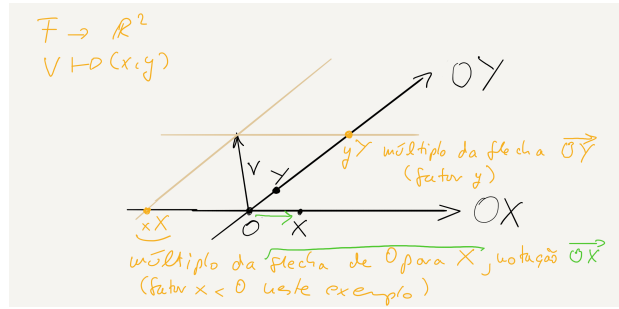


Figura 2: Sistema de coordenadas  $OXY$  composto de dois eixos  $OX$  e  $OY$

Observe-se que um eixo  $OX$  chega com uma direção (de  $O$  para  $X$ ) e com um comprimento unitário (o comprimento do segmento entre  $O$  e  $X$ ). Uma escolha de coordenadas  $OXY$  no plano  $\Pi$  nos dá uma aplicação

$$F \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto (x, y)$$

a qual identifica os elementos de  $F$  com os elementos de  $\mathbb{R}^2$  unicamente (bijetora) – e ainda é **linear**, ou seja compatível com as duas operações no domínio e as duas no contradomínio. Uma tal aplicação (bijetora linear) é chamado um **isomorfismo** entre espaços vetoriais. Deixamos ao leitor definir esta aplicação. [Dica: Os pontos  $O, X$  e  $O, Y$  dão duas flechas. Represente um elemento de  $F$  por uma flecha equivalente com ponto inicial  $O$ . Pensa num paralelogramo tal que  $O$  e o ponto termino da flecha equivalente são dois vértices opostos.]

**Exemplo 0.0.4** (Funções contínuas e integração). Sejam  $a < b$  dois números reais. Então o quadruplo  $V = (C^0([a, b], \mathbb{C}), +, \cdot, \mathbb{R})$  que é composto do conjunto das funções contínuas  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  munido com as duas operações de adicionar  $f + g$  duas funções e multiplicar  $\alpha f$  uma função com um número real  $\alpha \in \mathbb{R}$  é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$ .

Também  $W = (\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R})$  composto das números reais  $\mathbb{R}$  munido das operações óbvias é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$ .

Integração  $T : V \rightarrow W, f \mapsto \int_a^b f(x) dx$ , é compatível com as duas adições e multiplicações (em  $V$  e em  $W$ ) no sentido que

$$T(f + g) = Tf + Tg, \quad T(\alpha f) = \alpha Tf$$



para todos os vetores  $f, g \in V$  e escalares  $\alpha$  do corpo  $\mathbb{R}$ . Uma aplicação  $T$  entre espaços vetoriais qual respeita as duas operações no domínio e no contradomínio é chamada uma transformação linear.

## Notações

Para uma lista extensiva dos símbolos usados veja o Índice Remissivo na página 63.

**Comentário 0.0.5** (Números). Vamos trabalhar com os seguintes **números**

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$	$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$	naturais
$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$		inteiros
$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$		racionais
$\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$	“a reta real”	reais
$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$	“o plano complexo”	complexos

Com  $|\alpha|$  denotamos o absoluto de um numero  $\alpha$ . Denotamos **intervalos** fechados de  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  e abertos de  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ . Usamos os símbolos

$\forall$  “para todos os”     $\exists$  “existe um”     $\exists!$  “existe um único”

A notação  $w := v$  significa que o objeto  $w$  é **definido** pelo lado direito  $v$ .

## Convenções

**Cor cinza.** Parágrafos e maiores partes de texto em cinza indicam matéria avançada direcionado às turmas A e B do “cursão”, mas não às outras turmas. Palavras individuais em cinza geralmente são nomes ou informações complementares.



## Parte I

# Teoria dos espaços vetoriais



# Capítulo 1

## Espaços vetoriais

### 1.1 Axiomas

**Definição 1.1.1.** Um **conjunto**  $X$  é composto de elementos os quais são dois-a-dois diferentes. Consequentemente

$$\{2, 3\} \cup \{2\} = \{2, 3, 2\} = \{2, 3\} = \{3, 2\} \quad (1.1.1)$$

Um conjunto não é ordenado, por exemplo  $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ . O conjunto que não contém nenhum elemento é chamado **o conjunto vazio**, símbolo  $\emptyset$ . Denotamos de  $|X|$  o **número de elementos de um conjunto** quando o número é finito. Neste caso  $X$  é chamado de **conjunto finito**.

Um **subconjunto** de um conjunto  $X$  é um conjunto  $A$  tal que cada um elemento de  $A$  é elemento de  $X$ , notação  $A \subset X$ . Observe que conforme esta definição, o conjunto vazio  $\emptyset$  é subconjunto de todos conjuntos: para todo conjunto  $X$  temos  $\emptyset \subset X$ .

**Definição 1.1.2.** O **produto cartesiano**  $X \times Y$  de dois conjuntos  $X$  e  $Y$  é o conjunto de todas listas ordenadas  $(x, y)$  dos elementos  $x \in X$  e  $y \in Y$ , ou seja

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Observe que se um fator fica vazio, ou seja  $X = \emptyset$  ou  $Y = \emptyset$ , então  $X \times Y = \emptyset$ .

#### 1.1.1 Grupo

**Definição 1.1.3.** Um conjunto não-vazio  $G \neq \emptyset$  munido de uma operação

$$* : G \times G \rightarrow G, \quad (f, g) \mapsto f * g$$

é chamado um **grupo**, notação  $(G, *)$ , se valem os três axiomas

1.  $f*(g*h) = (f*g)*h$  para todos os elementos  $f, g, h \in G$  (associatividade)

2. existe um elemento  $e \in G$  tal que (elemento neutro)

$$e * g = g, \quad g * e = g$$

para todos os elementos  $g \in G$ .

3. para todo  $g \in G$  existe um elemento, notação  $\bar{g} \in G$ , t.q. (inverso)

$$g * \bar{g} = e, \quad \bar{g} * g = e$$

Em palavras,

*um grupo é um conjunto não-vazio munido de uma operação associativa, contendo um elemento neutro, e tal que qualquer elemento admite um inverso.*

O seguinte lema diz que um grupo  $G$  tem exatamente um elemento neutro, notação comum  $e$ , e cada um elemento  $g$  de  $G$  tem exatamente um inverso, notação  $\bar{g}$ . Às vezes é comum e útil escrever o elemento neutro na forma  $0$  ou  $1$  e os inversos na forma  $-g$  ou  $g^{-1}$  — veja os dois exemplos em Exercício 1.1.6 a).

**Lema 1.1.4.** *Seja  $(G, *)$  um grupo. Então vale o seguinte.*

- 1) O elemento neutro é único.
- 2) Os elementos inversos são únicos.
- 3) Para todos os elementos  $f, g, h \in G$  vale:

- a)  $f * g = f * h \Rightarrow g = h$  (lei da corte)
- b)  $f * g = f \Rightarrow g = e$
- c)  $f * g = e \Rightarrow g = \bar{f}$

Note que b) e c) são consequências imediatas de a).

*Demonstração.* Lema A.1.1. □

**Definição 1.1.5.** Um grupo  $(G, *)$  é chamado de **abeliano** se a ordem dos dois elementos na operação não importa, em símbolos  $f * g = g * f$ . (comutatividade)

**Exercício 1.1.6.** Mostre que

- a) são grupos (ainda abelianos):  $(\mathbb{Z}, +)$  e  $(\mathbb{R}, \cdot)$
- b) não são grupos:  $(\mathbb{N}, +)$  e  $(\mathbb{N}_0, +)$  e  $(\mathbb{Z}, \cdot)$
- c) não são grupos abelianos: as matrizes  $3 \times 3$  e as rotações em  $\mathbb{R}^3$ .

## 1.1.2 Corpo

**Definição 1.1.7.** Um conjunto  $\mathbb{K}$  munido de duas operações<sup>1</sup>

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K} \quad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$$

é chamado um **corpo** se valem os três axiomas

<sup>1</sup> as quais vamos batizar aos nomes “+” e “·” — ainda que *geralmente não tem nada ver com adição e multiplicação de números*, mas esta escolha é motivada pelos exemplos principais (Exemplo 1.1.10) nos quais “+” e “·” são adição e multiplicação de números

1.  $(\mathbb{K}, +)$  é um grupo abeliano.  
(O elemento neutro seja denotado 0 e  $-\alpha$  denota o inverso de  $\alpha \in \mathbb{K}$ .)
2.  $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$  é um grupo abeliano.  
(O elemento neutro seja denotado 1 e  $\alpha^{-1}$  denota o inverso de  $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .)
3. Distributividade:  $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$  para todos  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ .  
(É costume escrever  $\alpha\beta$  em vez de  $\alpha \cdot \beta$ .)

Para distinguir chamamos o elemento neutro da primeira operação – para a qual temos usado o símbolo “+” ainda que geralmente não tem nada ver com adição de números – o **elemento neutro aditivo**. Chamamos o elemento neutro da segunda operação – motivado pelo uso do símbolo “.” – o **elemento neutro multiplicativo**. Como é feio escrever  $\alpha + (-\beta)$  para a soma de um elemento com um elemento inverso aditivo definimos  $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$ . Isso é uma abreviação só, não é, nem tem diferença. Analogamente simplificamos a notação escrevendo  $\alpha/\beta$  em vez de  $\alpha\beta^{-1}$ .

**Corolário 1.1.8.** *Um corpo contém pelo menos dois elementos.*

*Demonstração.* Pelas axiomas 1 e 2 cada uma operação tem um elemento neutro as quais não podem ser iguais por causa de 2.  $\square$

**Lema 1.1.9.** *Seja  $\mathbb{K}$  um corpo e  $0 \in K$  é o elemento neutro da adição. Então  $0\beta = 0$  e  $\beta 0 = 0$  para todos os elementos  $\beta \in \mathbb{K}$ .*

*Demonstração.* Lema A.1.2.  $\square$

### Exemplos de corpos

**Exemplo 1.1.10.** São corpos

- a)  $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$  e  $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$
- b)  $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$  onde as operações são definidas assim

$$\begin{aligned}(a + ib) + (c + id) &:= (a + c) + i(b + d) \\ (a + ib) \cdot (c + id) &:= (ac - bd) + i(bc + ad)\end{aligned}$$

**Exercício 1.1.11.** Os números inteiros  $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$  não formam um corpo.

**Exemplo 1.1.12** (Adição e multiplicação modulo  $n$ ). Dado um número natural  $n \in \mathbb{N}$ , defina no conjunto  $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$  as duas operações

$$a +_n b := a + b \pmod{n}, \quad a \cdot_n b := ab \pmod{n}$$

para todos os elementos  $a, b \in \mathbb{Z}_n$ .<sup>2</sup>

**Fato.**  $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$  é um corpo  $\iff n$  é um número primo.

<sup>2</sup> Dado  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $\ell \in \mathbb{Z}$  um número inteiro. Pela definição o elemento  $\ell \pmod{n} \in \mathbb{Z}_n$  é o resto  $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  que falta depois você “enche”  $\ell$  com múltiplos de  $n$ . Em símbolos,  $\ell \pmod{n} := r$  onde  $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  é o único elemento tal que  $\ell = kn + r$  para um  $k \in \mathbb{Z}$ .

Para valores pequenos de  $n$  pode-se checar da mão se  $\mathbb{Z}_n$  é um corpo ou não. Só precisa-se calcular as tabelas de adição e de multiplicação. Vamos ilustrar isso num exemplo.

**Exemplo 1.1.13** ( $\mathbb{Z}_4$  não é um corpo.). Para checar se  $(\mathbb{Z}_4, +_4)$  e  $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{e_{+4}\}, \cdot_4)$  são grupos abelianos é útil calcular as tabelas de adição e de multiplicação.

- $(\mathbb{Z}_4, +_4)$  é um grupo abeliano? Para responder calculamos os valores na tabela

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

São 4 passos:

1. Determinar o elemento neutro de  $+_4$ : Checamos se a linha em cima da linha solida horizontal, ou seja a linha 0 1 2 3, tem uma cópia nas linhas embaixo. Sim, tem 0 1 2 3. Neste caso o elemento em frente da cópia é o elemento neutro de  $+_4$ , certo? No nosso caso  $e_{+4} = 0$ . Se não tem copia, não tem elemento neutro, então não temos um grupo.
2. Inversos: Na cada dos (neste caso 4) linhas de valores na tabela localiza o elemento neutro 0 (se existir). Então o elemento  $g$  em frente da linha de 0 e o elemento em cima da coluna de 0, notação  $\bar{g}$ , são inversos um do outro. Caso uma linha nao contem 0, então este  $g$  não tem inverso, então não temos um grupo. No nosso caso todo elemento  $g$  tem um inverso:

$g$	$\bar{g}$ (denotado $-g$ )
0	0
1	3
2	2
3	1

3. Associatividade: Calculando caso por caso temos que checar se  $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$  para todas as possibilidades. No nosso caso vale.
4. Grupo abeliano (comutatividade): Vale se a tabela é simétrica em respeito à diagonal. No nosso caso vale.

Na verdade temos esquecido um passo: No inicio de tudo temos que checar se a operação é bem definida, ou seja os valores da operação (os valores na tabela) realmente são elementos do conjunto, ou não. Olhamos a tabela - sim.

Nosso resultado é que  $(\mathbb{Z}_4, +_4)$  é um grupo abeliano.

- $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$  é um grupo abeliano? Para responder calculamos a tabela

$\cdot_4$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1



Como o valor 0 não é elemento de  $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$  a multiplicação  $\cdot_4$  não é uma operação em  $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ , então não pode ser um grupo.

Ainda assim vamos repetir os 4 passos para  $\cdot_4$  (em vez de  $+_4$ ) para ver se tem outras falhas ainda. As respostas são:

1. Elemento neutro de  $\cdot_4$ : Tem, é o elemento  $e_{\cdot_4} = 1$ .
2. Inversos: Na cada dos (neste caso 3) linhas de valores na tabela localizamos o elemento neutro 1 (se existir). No nosso caso

$g$	$\bar{g}$ (denotado $g^{-1}$ )
1	1
2	não tem!
3	3

o elemento 2 não tem um inverso e já por isso não temos um grupo.

3. Associatividade: Ainda que a fórmula  $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$  vale, os valores não são todos em  $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ .
4. Grupo abeliano (comutatividade): A tabela é simétrica em respeito à diagonal, mas os valores não são todos em  $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ .

Nosso resultado é que  $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$  não é um grupo abeliano.

**Exercício 1.1.14.** Seja  $n = 6$ :

1. Calcule a tabela da adição e da multiplicação no caso  $\mathbb{Z}_6$ .
2. Identifique os elementos neutros da adição e multiplicação em  $\mathbb{Z}_6$ . Eles sempre existem?
3. Para todo  $a \in \mathbb{Z}_6$  identifique o elemento inverso aditivo.
4. Para todo  $a \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$  identifique o elemento inverso multiplicativo, se existir.
5. Cheque que  $\mathbb{Z}_6$  não é um corpo. Quais dos axiomas não valem?

## Matéria avançada

Motivado pelas perguntas da Turma C na 1ª aula 2016-2 vamos dar um exemplo de um corpo onde a primeira operação não está relacionada à adição de números nem a segunda à multiplicação de números.

**Exercício 1.1.15** (Corpo  $(P, \cdot, \circ)$  onde  $\cdot$  não é adição e  $\circ$  não é multiplicação). Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , considere a função  $p_\alpha : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $x \mapsto x^\alpha$ . Seja o conjunto

$$P := \{p_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

composto de todas funções  $p_\alpha(x) = x^\alpha$  com  $\alpha \in \mathbb{R}$  e munido das operações

$$\begin{aligned} \cdot : P \times P &\rightarrow P & \circ : P \times P &\rightarrow P \\ (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \cdot p_\beta & (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \circ p_\beta \end{aligned}$$

chamado de **multiplicação**<sup>3</sup> e **composição**<sup>4</sup> de funções, respectivamente. Mostre que:

1. As duas operações são bem definidas:  $p_\alpha \cdot p_\beta \in P$  e  $p_\alpha \circ p_\beta \in P$ , de fato

$$p_\alpha \cdot p_\beta = p_{\alpha+\beta}, \quad p_\alpha \circ p_\beta = p_{\alpha\beta}$$

2.  $(P, \cdot)$  é um grupo abeliano com elemento neutro  $p_0$ .
3.  $(P \setminus \{p_0\}, \circ)$  é um grupo abeliano com elemento neutro  $p_1$ .
4. Distributividade:  $(p_\alpha \cdot p_\beta) \circ p_\gamma = (p_\alpha \circ p_\gamma) \cdot (p_\beta \circ p_\gamma)$ ,  $\forall p_\alpha, p_\beta, p_\gamma \in P$ .

### 1.1.3 Espaço vetorial

**Definição 1.1.16.** Um **espaço vetorial**  $E$  sobre um **corpo**  $\mathbb{K}$ <sup>5</sup> é um quádruplo  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$  composto de um conjunto  $E$ , um corpo  $\mathbb{K}$ , e duas operações

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E & \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (v, w) &\mapsto v + w & (\alpha, v) &\mapsto \alpha v \end{aligned}$$

chamado de *adição* e *multiplicação escalar*, respectivamente, tal que vale

1.  $(E, +)$  é um grupo abeliano.  
(O *elemento neutro* é denotado  $\mathcal{O}$  e chamado o **vetor nulo**.)
2. Distributividade: 
$$\begin{cases} (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \\ \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \end{cases}$$
3. Compatibilidade: 
$$\begin{cases} (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \\ 1v = v \end{cases}$$

Onde as identidades tem que ser válidas para todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  e todos  $v, w \in E$ . Chama-se **escalares** os elementos do corpo  $\mathbb{K}$  e **vetores** os elementos de  $E$ .

**Lema 1.1.17.** *Seja  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$  um espaço vetorial e  $0 \in \mathbb{K}$  e  $\mathcal{O} \in E$ , então:*

- (i)  $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$  para todos os escalares  $\alpha \in \mathbb{K}$ .
- (ii)  $0v = \mathcal{O}$  para todos os vetores  $v \in E$ .
- (iii) Para todo o escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$  e todo o vetor  $w \in E$  são equivalentes:

$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O} \quad (1.1.2)$$

*Demonstração.* Lema A.1.3. □

<sup>3</sup>  $(p_\alpha \cdot p_\beta)(x) := p_\alpha(x) \cdot p_\beta(x)$

<sup>4</sup>  $(p_\alpha \circ p_\beta)(x) := p_\alpha(p_\beta(x))$

<sup>5</sup> fala-se abreviando “ $E$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ ” ou ainda “ $E$  é um espaço vetorial”.

**Corolário 1.1.18** (Compatibilidade dos inversos aditivos com multiplicação).  
*Para todo o escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$  e todo o vetor  $w \in E$  vale:*

a)  $(-\alpha)w = -(\alpha w)$

b)  $\alpha(-w) = -(\alpha w)$

*Demonstração.* Corolário A.1.4.

□



# Aula 2



## 1.2 Exemplos de espaços vetoriais

**Exemplo 1.2.1** (O espaço vetorial trivial  $\{\mathcal{O}\}$ ). Seja  $E$  um conjunto com 1 elemento só. Vamos já denotar aquele elemento com o símbolo  $\mathcal{O}$  (porque?). Então  $E = \{\mathcal{O}\}$ . Seja  $\mathbb{K}$  um corpo qualquer. Não tem escolha nenhuma para definir as duas operações

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E & \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\mathcal{O}, \mathcal{O}) &\mapsto \mathcal{O} & (\alpha, \mathcal{O}) &\mapsto \mathcal{O} \end{aligned}$$

Então  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$  satisfaz os axiomas de um espaço vetorial, denotado simplesmente  $E = \{\mathcal{O}\}$  e chamado de **espaço vetorial trivial**.

**Exemplo 1.2.2** (Um corpo  $\mathbb{K}$  como um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ ). Usa-se as duas operações chegando com o corpo  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  como as duas operações necessárias para tornar um conjunto, escolhemos  $E := \mathbb{K}$ , num espaço vetorial sobre um corpo, escolhemos  $\mathbb{K}$ . Com efeito  $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K})$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ .

### 1.2.1 Listas ordenadas

**Exemplo 1.2.3** (O espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{R}$ ). Seja

$$\mathbb{R}^n := \{u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto de todas as listas ordenadas de  $n$  números reais. Chamamos  $\alpha_i$  o  $i$ -ésimo membro da lista. As duas operações

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n & \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

são definidas como adição membro-por-membro e multiplicação de todos membros com um escalar  $\beta \in \mathbb{R}$ . Checando todos axiomas vê-se que  $\mathbb{R}^n$  é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais, notação  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$  ou  $\mathbb{R}^n$  só. O vetor nulo, também chamado de **origem**, é a lista

$$\mathcal{O} = (0, \dots, 0)$$

e o inverso de um elemento  $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  é a lista  $(-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)$  a qual denotamos com o símbolo  $-u$ .

O  **$i$ -ésimo vetor canônico** é a lista de  $n$  membros

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

cujos  $i$ -ésimo membro é o número 1 e todos outros são nulo 0. O conjunto

$$\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\} \tag{1.2.1}$$

de todos os vetores canônicos é chamado de **base canônica** de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 1.2.4** (O espaço vetorial  $\mathbb{R}^\infty$  sobre  $\mathbb{R}$ ). O conjunto

$$\mathbb{R}^\infty := \{u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \in \mathbb{R}\}$$

de todas as sequências reais é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  sob adição e multiplicação membro-por-membro, notação  $(\mathbb{R}^\infty, +, \cdot, \mathbb{R})$ .

**Exemplo 1.2.5** (O espaço vetorial  $\mathbb{R}_0^\infty$  sobre  $\mathbb{R}$ ). O conjunto

$$\mathbb{R}_0^\infty := \{u \in \mathbb{R}^\infty \mid \text{só um número finito de membros são não-nulos}\}$$

é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  sob adição e multiplicação membro-por-membro como no exemplo prévio, notação  $(\mathbb{R}_0^\infty, +, \cdot, \mathbb{R})$ .

Dado  $i \in \mathbb{N}$ , a sequência com todos membros nulos exceto o  $i$ -ésimo qual é 1 denotamos também de  $e_i$ . O conjunto de todos os  $e_i$ 's é denotado de

$$\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\} \quad (1.2.2)$$

e chamado de **base canônica** de  $\mathbb{R}_0^\infty$ .

**Comentário 1.2.6** ( $\mathbb{K}^n$  e  $\mathbb{K}^\infty$ ). Os espaços vetoriais  $\mathbb{K}^n$  e  $\mathbb{K}^\infty$  sobre qualquer corpo  $\mathbb{K}$  são definidos analogamente Exemplos 1.2.3 e 1.2.4.

## 1.2.2 Matrizes

**Exemplo 1.2.7** (Espaço vetorial das matrizes  $m \times n$ ). O **espaço vetorial das matrizes  $m \times n$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$**  é o conjunto

$$M(m \times n; \mathbb{K}) := \left\{ \mathbf{a} = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \right\}$$

onde a matriz  $\mathbf{a} = (a_{ij})$  é o quadro de escalares com  $m$  linhas e  $n$  colunas <sup>6</sup>

$$\mathbf{a} = (a_{ij}) := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

munido com a adição (entrada por entrada)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (c_{ij}), \quad c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

e a multiplicação escalar (entrada por entrada)

$$\beta \mathbf{a} = \beta (a_{ij}) := (c_{ij}), \quad c_{ij} := \beta a_{ij}$$

para qualquer escalar  $\beta \in \mathbb{K}$ . Uma **matriz quadrada** é uma matriz  $n \times n$ .

O vetor nulo é a matriz nula  $\mathbf{0}$  cujas entradas são todas o escalar nulo  $0 \in \mathbb{K}$ . O elemento inverso aditivo, notação  $-\mathbf{a}$ , de uma matriz  $\mathbf{a} = (a_{ij})$  tem como entradas os inversos aditivos dos  $a_{ij}$ , notação  $-a_{ij}$ .

No caso do corpo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  usamos a notação  $M(m \times n) := M(m \times n; \mathbb{R})$  para o **espaço vetorial dos matrizes reais  $m \times n$** .

<sup>6</sup>Os escalares  $a_{ij}$  são chamadas as **entradas da matriz**. Observe que a entrada  $a_{ij}$  está localizada na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna.



**Definição 1.2.8** (Linhas e colunas de uma matriz). Seja  $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in M(m \times n)$  uma matriz  $m \times n$ . Note-se que o primeiro índice  $i$  de uma entrada  $a_{ij}$  indica a linha e o segundo  $j$  a coluna dela. Tendo isso na vista vamos denotar a  **$k$ -ésima coluna**, respectivamente a  **$\ell$ -ésima linha**, de uma matriz  $\mathbf{a}$  com os símbolos

$$\mathbf{a}_{\bullet k} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{\ell \bullet} = [a_{\ell 1} \quad \dots \quad a_{\ell n}]$$

Temos escolhido o símbolo  $\bullet$  para sugerir “este índice é aberto” – ele corre e assim gera uma lista, ou vertical ou horizontal dependendo se  $\bullet$  fica no primeiro ou no segundo lugar. Assim podemos escrever a matriz  $\mathbf{a}$  nas formas seguintes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\bullet} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\bullet} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_{\bullet 1} \quad \dots \quad \mathbf{a}_{\bullet n}]$$

### 1.2.3 Funções e polinômios

**Exercício 1.2.9.** Dado um conjunto não-vazio  $X \neq \emptyset$  e um corpo  $\mathbb{K}$ , seja

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) := \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ função}\}$$

o conjunto de todas as funções  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ . Adição de funções e multiplicação com um escalar são definidas assim

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

para todos os  $x \in X$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Mostre que  $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ .

**Comentário 1.2.10.** A próxima observação ilustra o poder da matemática e um *ponto fundamental* dela - economizar através de abstração e *encontrar o certo ponto da vista*.

**Observação 1.2.11.**

- Se  $X = \{1, \dots, n\}$ , então  $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ .
- Se  $X = \mathbb{N}$ , então  $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^\infty$ .
- Se  $X = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ , então  $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = M(m \times n)$ .

**Exercício 1.2.12** (Polinômios  $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ ). Dados escalares  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ , então chama-se uma soma finita

$$p = p(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$$

de **polinômio** na variável  $x \in \mathbb{K}$  e, no caso  $\alpha_n \neq 0$ , de **grau  $n$** . Forneça o conjunto dos polinômios com uma estrutura de um espaço vetorial  $(\mathcal{P}(\mathbb{K}), +, \cdot, \mathbb{K})$ .

### 1.2.4 Excurso: Escalonamento de matrizes

**Definição 1.2.13** (Operações elementares). Pode-se aplicar para as linhas de uma matriz três tipos de operações, as chamadas **operações elementares**:

(oe1)<sub>↓</sub> trocar duas linhas

(oe2)<sub>·</sub> multiplicar uma linha com um escalar  $\alpha$

(oe3)<sub>+</sub> adicionar uma linha para uma outra

#### Processo de escalonamento

Chama-se uma matriz **escalonada** se em cada linha o **primeiro elemento não-nulo está à esquerda** do primeiro elemento não-nulo da próxima linha. Exemplos

$$\text{escalonadas: } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{não é: } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Numa matriz *escalonada* os primeiros elementos não-nulos das linhas são chamados de **pivôs** da matriz escalonada.

**Definição 1.2.14.** Uma matriz pode ser transformada numa matriz escalonada aplicando operações elementares. O processo é repetir os três passos seguintes:

1. Localiza a primeira coluna não-nula e nela o primeiro elemento não-nulo, dizemos  $a$ . Troca a linha de  $a$  e a primeira linha.
2. Embaixo de  $a$  anulamos todo elemento não-nulo, dizemos  $b$ : Multiplique a linha de  $b$  com  $-a/b$ , depois adiciona a linha de  $a$ . Continue até todos elementos embaixo de  $a$  são nulos.
3. Esqueça a linha e a coluna de  $a$  e trata a matriz reduzida começando de novo com passo 1.

O processo de escalonar uma matriz  $\mathbf{a}$  termina com uma matriz escalonada a qual denotamos de  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$ .

**Exemplo 1.2.15.** Ilustramos o escalonamento. Seja  $L_i$  a  $i$ -ésima linha.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[1.]{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[2.]{-\frac{2}{4}L_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[2. na L_3]{adica. L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3. esq. linha]{e col. de 2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e agora começamos de novo com passo 1 tratando a matriz reduzida

$$\xrightarrow[1.]{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[2.]{-\frac{1}{1}L_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[2. na L_3]{adica. L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Aplicação: Sistemas lineares**

Seja  $\mathbf{a}$  uma matriz  $m \times n$  e  $b \in \mathbb{R}^m$  uma lista ordenada com  $m$  membros. Agora adiciona para as  $n$  colunas de  $\mathbf{a}$  a lista  $b$  como a  $(n + 1)$ -ésima coluna para obter a chamada **matriz aumentada**, notação

$$[\mathbf{a} : b] := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

**Definição 1.2.16.** Suponha a matriz  $\mathbf{a}$  e a lista  $b$  são dadas. Então queremos saber se existe uma solução  $x = (x_1, \dots, x_n)$  da equação  $\mathbf{a}x = b$ , ou seja do **sistema linear (SL) de  $m$  equações a  $n$  incógnitas**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.2.3)$$

É útil chamar a matriz aumentada  $[\mathbf{a} : b]$  o **sistema linear** definido por (1.2.3). A lista  $b = (b_1, \dots, b_m)$  é chamada de **inogeneidade** do sistema linear. O caso  $b = \mathcal{O} = (0, \dots, 0)$  chama-se de **sistema linear homogêneo (SLH)**.

O sistema linear pode ser escrito equivalentemente na forma

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (1.2.4)$$

O lado esquerdo é um exemplo de uma chamada “combinação linear” das colunas da matriz  $\mathbf{a}$  representando o vetor  $b$  – um conceito fundamental o qual vamos tratar no próximo parágrafo.

**Comentário 1.2.17.** Note-se que o lado esquerdo de (1.2.4) corre sobre toda a imagem da matriz  $\mathbf{a}$  se variamos  $x$  sobre todas as listas. Então um SL  $[\mathbf{a} : b]$  tem uma solução se e somente se a lista  $b$  é elemento da imagem da matriz  $\mathbf{a}$ .

Lembramos do curso MA141 “Geometria Analítica” o seguinte

**Teorema 1.2.18.** *Uma lista  $x$  é solução do sistema linear  $[\mathbf{a} : b]$  se e somente se  $x$  é solução do sistema linear associado à matriz escalonada  $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}}$ .*

**Exemplo 1.2.19** (Resolução de um sistema linear usando escalonamento). Para encontrar as soluções  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  do sistema linear

$$\begin{cases} y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x - 2z = 0 \end{cases}$$

primeiro, formamos a matriz aumentada  $[\mathbf{a} : b]$  onde  $b = (0, 0, 0) =: \mathcal{O}$ , segundo, escalonamos ela, e terceiro, **resolvemos “de baixo para cima”**. Segundo Teorema 1.2.18 uma solução de  $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}}$  também resolve  $[\mathbf{a} : b]$ , e vice versa. Exemplo 1.2.15 mostra as matrizes  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$ . Note-se que no caso especial quando um sistema linear é *homogêneo*, ou seja  $b = \mathcal{O}$ , vale a fórmula seguinte

$$[\mathbf{a} : \mathcal{O}]_{\text{esc}} = [\mathbf{a}_{\text{esc}} : \mathcal{O}]$$

No nosso caso o lado direito desta fórmula representa o SLH

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

### Resolução “de baixo para cima”:

LINHA 3. Começamos embaixo com a ultima linha  $0x + 0y + 0z = 0$  a qual não representa nenhuma restrição para  $x, y, z$ .

LINHA 2. Progredimos para cima, ou seja para a linha dois  $y + 2z = 0$ . Escolha uma variável para ser a variável dependente da(s) outra(s) variáveis, as quais variam livremente no corpo. No nosso caso só tem uma outra e o corpo é  $\mathbb{R}$ . Escolhemos por exemplo como variável dependente  $y = y(z) = -2z$  como função da variável  $z$  a qual varia livremente sobre os números reais, ou seja  $z \in \mathbb{R}$ .

LINHA 1. Progredimos para cima, ou seja para a primeira linha

$$0 = 2x + y(z) + z = 2x - 2z + z = 2x - z$$

lembrando que  $z \in \mathbb{R}$  é livre. Então  $x = x(z) = \frac{1}{2}z$  para qualquer  $z \in \mathbb{R}$ .

**Conclusão.** Toda solução do SL é da forma

$$\begin{bmatrix} x(z) \\ y(z) \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}z \\ -2z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde  $z \in \mathbb{R}$  é um número real arbitrário. Então o SL não tem só uma solução – tem uma para cada um numero real  $z$ . Isso conclui o Exemplo 1.2.19.

**Comentário 1.2.20** (Corpos gerais  $\mathbb{K}$ ). As construções nesta Seção 1.2.4 para matrizes e listas cujas entradas são elementos do corpo  $\mathbb{R}$  funcionam do mesmo jeito para matrizes com entradas num corpo geral  $\mathbb{K}$ .

## 1.3 Independência linear

### 1.3.1 Combinação linear

Depois da aula 3 foram adicionadas ou modificadas as **partes em marrom**:

**Definição 1.3.1.** Seja  $E$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e  $X \subset E$  um subconjunto. Uma **combinação linear estrita (CLE) em  $X$**  é uma soma *finita*

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell}_{=: w \in E} \quad (1.3.1)$$

de vetores  $v_1, \dots, v_\ell \in X \setminus \{\mathcal{O}\}$  *dois-a-dois diferentes* e escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , vetores e escalares todos não-nulos.<sup>7</sup>

A palavra mais importante em cima é “finita”. Ainda que os vetores  $v_1, \dots, v_\ell$  em (1.3.1) são elementos do conjunto  $X$ , a soma deles não necessariamente encontra-se mais em  $X$ . Encontra-se sim, quando  $X$  é um chamado “subespaço” (Lema 2.1.2).

**Definição 1.3.2.** Como encontra-se frequentemente somas finitas gerais

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell, \quad \alpha_j \in \mathbb{K}, \quad v_j \in E$$

vamos chamar tal de **combinação linear (CL)** como é costume na literatura. Dizemos que

“A CLe dos vetores  $v_1, \dots, v_\ell$  representa o vetor  $w$ .”

ou

“O vetor  $w$  é CLe dos vetores  $v_1, \dots, v_\ell$ .”

**Exercício 1.3.3.** Seja  $X \subset E$  não vazio, mostre que são conjuntos iguais

$$\begin{aligned} & \{\text{todas as combinações lineares em } X\} \cup \{\mathcal{O}\} \\ &= \{\text{todas as combinações lineares generalizadas em } X\} \end{aligned}$$

**Definição 1.3.4.** Por definição a frase

“**combinação linear dos vetores  $u, v, \dots$** ”

significa

“*combinação linear no conjunto  $\{u, v, \dots\}$* ”

A diferença é que assim *não precisamos usar todos os vetores*. (O que elimina qualquer necessidade de colocar o escalar 0 em frente dos não necessários.)

**Comentário 1.3.5** (Conceitos adicionados ou redefinidos depois da aula 3).

- CLe: Vetores e escalares nulos não são permitidos, nem repetições de vetores. São permitidos numa CL.

<sup>7</sup> Permitindo  $\mathcal{O}$  e 0, ou não, não faz nenhuma diferença para os valores de (1.3.1). Então permitir é desnecessário, mas na matemática a desnecessidade é o **inimigo da clareza**. Temos adicionado o adjetivo ‘estrito’ porque a terminologia ‘combinação linear’ já é ocupada.

- $\langle X \rangle$ : Temos adicionado  $\mathcal{O}$  na Definição 2.2.1. Assim  $\emptyset$  gera  $\{\mathcal{O}\}$ .

**Exercício 1.3.6.** a) Caso possível escreva o vetor  $b = (1, -3, 10)$  como combinação linear dos vetores  $u = (2, -3, 5)$ ,  $v = (1, 1, 0)$ , e  $w = (1, 0, 0)$ .

b) Sejam  $u = (1, 1)$ ,  $v = (1, 2)$  e  $w = (2, 1)$ . Encontre números  $a, b, c$  e  $\alpha, \beta, \gamma$  todos não-nulos, tais que

$$au + bv + cw = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

com  $a \neq \alpha$ ,  $b \neq \beta$  e  $c \neq \gamma$ .

[Dica: a) Determinar os coeficientes  $\alpha, \beta, \gamma$  na CL de  $u, v, w$  a qual representa  $b$  lida a um SL. Escalonamento.<sup>8</sup>

b) Defina  $x = a - \alpha$ ,  $y = b - \beta$ , e  $z = c - \gamma$  para obter um SLH. Resolva.]<sup>9</sup>

---

<sup>8</sup> encontre “o certo ponto da vista” (Comentário 1.2.10) e o SL vai chegar já escalonada..

<sup>9</sup> Respostas para seu controle: a)  $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, -6)$ . b)  $(x, y, z) = z(-3, 1, 1)$ . Escolha um  $z \neq 0$ , por exemplo  $z = 1$ . Então  $(a, b, c) = (\alpha - 3, 1 + \beta, 1 + \gamma)$ . Toda escolha de reais  $\alpha \neq 0, 3$  e  $\beta, \gamma \neq 0, -1$  da uma solução. A escolha  $\alpha = 5$  e  $\beta = \gamma = 1$  resulta em  $a = b = c = 2$ .

# Aula 3





### 1.3.2 Independência linear

**Definição 1.3.7** (Independência linear). Um subconjunto  $X$  de um espaço vetorial  $E$  é dito de **conjunto linearmente independente (LI)** se não existe nenhuma combinação linear estrita (CLE) em  $X$  representando o vetor nulo. Caso existisse, o  $X$  é chamado de **conjunto linearmente dependente (LD)**.

Nas outras palavras, chama-se  $X \subset E$  de **conjunto LI** se

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell = \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_\ell = 0 \quad (1.3.2)$$

para toda escolha (finita) de vetores  $v_1, \dots, v_\ell \in X$  *dois-a-dois diferentes*.<sup>10</sup>

#### Comentário 1.3.8.

- (i) O conjunto vazio  $\emptyset$  é LI: Com efeito, como não contem elementos, não admite nenhuma CL. Chama-se tal argumentação de **verdade vazia**.
- (ii) Um conjunto  $X = \{v\}$ , contendo só um vetor, é LI se e somente se  $v \neq \mathcal{O}$ .
- (iii) Se (1.3.2) vale para uma escolha  $v_1, \dots, v_\ell$ , então vale para qualquer sub-escolha destes vetores. [Use os coeficientes  $\alpha_i = 0$  nos restantes.]

Para provar a afirmação (ii), lembra (1.1.2).

**Lema 1.3.9.** *Seja  $X$  um subconjunto de um espaço vetorial  $E$ .*

- a)  $\mathcal{O} \in X \Rightarrow X$  LD. *(O vetor nulo rende conjuntos LD)*
- b) *Todo subconjunto  $A$  de um conjunto LI  $X$  é LI.*

*Demonstração.* a) O termo  $1\mathcal{O}$  é uma CLE em  $X$  representando o vetor nulo (segundo Lema 1.1.17). b) Os elementos de  $A$  são elementos de  $X$  – para as quais (1.3.2) vale pela hipótese.  $\square$

**Exemplo 1.3.10.** Para saber se o subconjunto  $X := \{(1, 0), (2, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^2$  é LI temos que checar (1.3.2) para todas escolhas finitas de elementos  $v_i$  de  $X$  dois-a-dois diferentes. Como  $X$  é um conjunto finito, e tendo em vista Comentário 1.3.8 (iii), começamos com a escolha máxima, ou seja todos os (dois) elementos. Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Conforme (1.3.2) suponhamos a primeira igualdade

$$(0, 0) = \alpha(1, 0) + \beta(2, 1) = (\alpha + 2\beta, \beta)$$

e recebemos a segunda igualdade pelas regras de multiplicação escalar e adição de vetores de  $\mathbb{R}^2$ . Comparando os segundos membros vemos que  $0 = \beta$  o qual usamos na comparação dos primeiros membros: recebemos  $0 = \alpha + 2 \cdot 0 = \alpha$ . Assim temos provado que ambos os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  são nulos. Então  $X$  é LI.

**Exercício 1.3.11.** Quais dos seguintes conjuntos  $X_i$  de vetores de  $\mathbb{R}^2$  são ou não são conjuntos linearmente independentes (LI)? Explique porque são ou não são.

1. Elementos de  $X_1$ : os vetores  $(1, 1)$  e  $(-1, -1)$ .

<sup>10</sup> Para que precisa-se a condição *dois-a-dois diferentes*?

2.  $X_2 := \{(2, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 2)\}$ .
3. Escolha dois vetores  $u, v \in \mathbb{R}^2$ . Então defina  $X_3 := \{u, v, (1, 1)\}$ .

**Exercício 1.3.12.** Prove as afirmações seguintes.

1. A base canônica  $\mathcal{E}^n$  em (1.2.1) é um conjunto LI no  $\mathbb{R}^n$  para  $n \in \mathbb{N}$ .
2. A base canônica  $\mathcal{E}^\infty$  em (1.2.2) é um conjunto LI no  $\mathbb{R}_0^\infty$  e no  $\mathbb{R}^\infty$ .
3. Suponha  $u, v \in \mathbb{K}^2$  não são múltiplos um do outro. Prove que o conjunto  $\{u, v\}$  é LI.  
[Dica: Seja  $\alpha u + \beta v = \mathcal{O}$ . Considere  $\beta \neq 0$  e, lembrando (1.1.2),  $\beta = 0$ .]
4. Sejam  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  vetores de  $\mathbb{R}^n$ . Prove que um deles é múltiplo do outro se, e somente se, para todo  $i, j = 1, \dots, n$  temos  $x_i y_j = x_j y_i$ .
5. O subconjunto  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subset M(2 \times 2)$  composto das matrizes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é um conjunto LI.

6. O conjunto  $X$  composto dos três polinômios

$$p = p(x) = x^3 - 5x^2 + 1$$

$$q = q(x) = 2x^4 + 5x - 6$$

$$r = r(x) = x^2 - 5x + 2$$

é um conjunto LI no espaço vetorial  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  dos polinômios.

7. Se o conjunto de vetores  $\{v_1, \dots, v_m\}$  é LI, prove que o mesmo se dá com o conjunto  $\{v_1, v_2 - v_1, \dots, v_m - v_1\}$ . Vale a recíproca?

## Capítulo 2

# Subespaços

Subespaços de um espaço vetorial  $E$  são subconjuntos  $F$  as quais são invariante pelas duas operações chegando com  $E$ . Assim faz sentido restringir as duas operações a  $F$ . Munidos das restrições  $F$  torna-se um espaço vetorial mesmo.

### 2.1 Definição e exemplos

**Definição 2.1.1.** Um subconjunto  $F \subset E$  de um espaço vetorial  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$  é chamado de **subespaço** se é **fechado sob as duas operações**, ou seja

$$(i) \quad u, v \in F \Rightarrow u + v \in F \quad (F \text{ é fechado sob adição})$$

$$(ii) \quad \alpha \in \mathbb{K}, u \in F \Rightarrow \alpha u \in F \quad (F \text{ é fechado sob multiplicação escalar})$$

**Lema 2.1.2.** *Seja  $F$  um subespaço de um espaço vetorial  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ . Então*

$$a) \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}, v_1, \dots, v_k \in F \Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \in F \quad (\text{fechado sob CL})$$

b)  $F$  é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$  onde as duas operações são aquelas de  $E$  restrito ao subconjunto  $F \subset E$ . (subespaços são espaços vetoriais)

*Demonstração.* a) Indução. b) As restrições tomam valores em  $F$  segundo parte a) e as axiomas valem como os elementos de  $F$  são elementos de  $E$  para as quais os axiomas valem pela hipótese que  $E$  é um espaço vetorial.  $\square$

**Exercício 2.1.3** (Vetor nulo). O vetor nulo de um subespaço  $F$  é o vetor nulo  $\mathcal{O}$  do espaço vetorial ambiente. [Dica: Mostre  $\mathcal{O} \in F$ . O vetor nulo de  $F$  é único.]

Checar se um subconjunto  $F \subset E$  é um espaço vetorial é bastante trabalhoso dado os muitos axiomas. Isso mostra o valor alto da parte b) do lema dizendo que é suficiente checar “fechado sob as duas operações” – tarefa rapidinha.

**Exercício 2.1.4.** Mostre que são subespaços de um espaço vetorial  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ :

$$a) \quad F := \{\mathcal{O}\} \quad (\text{o subespaço mínimo / trivial})$$

- a)  $F := E$  (o subespaço máximo)  
 b)  $\mathbb{K}v := \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$  (a reta passando  $v$  e a origem  $\mathcal{O}$ )  
 onde  $v$  é um vetor não-nulo de  $E$ . Observe que  $\mathbb{K}\mathcal{O} = \{\mathcal{O}\}$  é um ponto só.

**Exemplo 2.1.5** (O subespaço  $\mathbb{R}_0^\infty$  de  $\mathbb{R}^\infty$ ). O subconjunto  $\mathbb{R}_0^\infty \subset \mathbb{R}^\infty$ , composto de todas sequências reais tal que só um número finito de membros são não-nulos, é um espaço vetorial: Se a lista  $u$  tem  $k$  membros não-nulos e  $v$  tem  $\ell$ , então (i)  $u + v$  tem no máximo  $k + \ell$  e (ii)  $\alpha u$  tem no máximo  $k$ .

**Exercício 2.1.6** (Espaços vetoriais de funções). O conjunto  $\mathcal{F}(\mathbb{R}) := \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  das funções reais é um espaço vetorial sob adição e multiplicação com constantes  $\alpha \in \mathbb{R}$ , veja Exercício 1.2.9. Para  $n \in \mathbb{N}_0$  seja

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) := \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto dos **polinômios reais do grau menor ou igual  $n$**  e  $\mathcal{P}(\mathbb{R}) := \bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  o conjunto de todos os **polinômios reais**. Seja

$$C^0(\mathbb{R}) := C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$$

o conjunto das **funções contínuas**. Para  $k \in \mathbb{N}$  seja  $C^k(\mathbb{R}) := C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  o conjunto das **funções  $k$  vezes continuamente diferenciáveis**. Chama-se

$$C^\infty(\mathbb{R}) := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\mathbb{R})$$

o conjunto das **funções suaves**. Sejam  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $k \in \mathbb{N}$ . Mostre que

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^k(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

são subespaços do espaço vetorial  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  do Exercício 1.2.9. Segundo parte b) do Lema 2.1.2 todos estes conjuntos são espaços vetoriais sob adição de funções e multiplicação com constantes.

**Exemplo 2.1.7** (Hiperplanos no  $\mathbb{R}^n$ ). Dada uma lista  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , o subconjunto

$$H_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\}$$

é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ . O vetor nulo lida ao subespaço máximo  $H_\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$ . No caso não-nulo  $\alpha \neq \mathcal{O}$  chama-se  $H_\alpha$  de **hiperplano** no  $\mathbb{R}^n$  passando a origem  $\mathcal{O}$ .

**Lema 2.1.8** (Conjunto de subespaços é fechado sob interseções). *Cada interseção  $F := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  de subespaços  $F_\lambda$  de um espaço vetorial  $E$  é um subespaço.*

*Demonstração.* Dado  $u, v \in F := \bigcap_{\lambda} F_\lambda$ , ou seja  $u, v \in F_\lambda \forall \lambda$ . Como subespaço cada um  $F_\lambda$  é fechado sob adição, ou seja  $u + v \in F_\lambda$  para todos os  $\lambda \in \Lambda$ . Em símbolos  $u + v \in \bigcap_{\lambda} F_\lambda =: F$ . Analogamente  $F$  é fechado sob mult. escalar.  $\square$

**Exemplo 2.1.9.** Dada uma matriz  $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in M(m \times n)$ , então o conjunto

$$F_{\mathbf{a}} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}x = \mathcal{O}\}$$

é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ . Para ver isso lembramos de (1.2.3) que  $\mathbf{a}x = \mathcal{O}$  é o SLH

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

para  $n$  incógnitas  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , notação  $x := (x_1, \dots, x_n)$ . Note-se que as soluções  $x$  da primeira linha formam o hiperplano  $H_1 := H_{\mathbf{a}_1\bullet}$  associado à primeira linha  $\mathbf{a}_1\bullet$  da matriz  $\mathbf{a}$ . Isso é o certo ponto da vista, com efeito assim

$$F_{\mathbf{a}} = H_1 \cap \cdots \cap H_m$$

é uma interseção de subespaços e por isso é um subespaço segundo Lema 2.1.8.

**Exercício 2.1.10.**

- Quais dos seguintes subconjuntos  $X_j$  são subespaços de  $\mathbb{R}^2$ ? Em cada caso faça um desenho e explique porque é subespaço ou não é.
  - $X_1 := \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ ;
  - $X_2 := \{(\alpha + 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ ;
  - $X_3 := \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \text{ reais não-negativos}\} \subset \mathbb{R}^2$ .
- (LI transfere-se a espaços vetoriais *ambientes*). Seja  $F$  um subespaço de um espaço vetorial  $E$ . Mostre que se um subconjunto de  $F$  é LI em respeito ao espaço vetorial  $F$  então o também é LI em respeito ao espaço vetorial ambiente  $E$ .

## 2.2 Conjuntos gerandos

**Definição 2.2.1** (Subespaço gerado por um subconjunto). Seja  $E$  um espaço vetorial e  $X$  um subconjunto. O **subespaço de  $E$  gerado por  $X$**  é o conjunto<sup>1</sup>

$$\langle X \rangle := \{\text{todas as combinações lineares estritas em } X\} \cup \{\mathcal{O}\}$$

veja Exercício 1.3.3. Note: O conjunto vazio gera o subespaço trivial  $\{\mathcal{O}\} = \langle \emptyset \rangle$ . Se  $\langle X \rangle = E$  dizemos que **o conjunto  $X$  gera  $E$** . Neste caso cada um elemento de  $E$  é uma CL de elementos de  $X$ . Veja Comentário 1.3.5 para “ $\cup\{\mathcal{O}\}$ ”.

**Exercício 2.2.2.** Mostre que  $\langle X \rangle$  é um subespaço de  $E$  e que  $\mathbb{K}v = \langle \{v\} \rangle =: \langle v \rangle$ .

**Lema 2.2.3.** *Seja  $X$  um subconjunto de um espaço vetorial  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ . Então*

<sup>1</sup> Lembre-se da nossa convenção (1.1.1) para conjuntos, por exemplo  $\{2, 2\} = \{2\}$ .

- (i)  $X \subset \langle X \rangle$  (contido no subespaço gerado)
- (ii)  $Y \subset X \Rightarrow \langle Y \rangle \subset \langle X \rangle$  (naturalidade sob inclusão)
- (iii)  $F \subset E$  subespaço  $\Rightarrow \langle F \rangle = F$  (não muda subespaços)
- (iv) Um subespaço  $F \subset E$  contendo  $X$  contém  $\langle X \rangle$ . (respeita subespaços)

*Demonstração.* (i) Seja  $v \in X$ , então  $v \stackrel{(\text{comp.})}{=} 1v \in \langle X \rangle$ . (ii) Como  $Y \subset X$ , CLe's em  $Y$  são CLe's em  $X$ . (iii) Igualdade é consequência das duas inclusões  $F \subset \langle F \rangle \subset F$ , onde a primeira é (i) e para a segunda usamos que os elementos de  $\langle F \rangle$  são CL's em  $F$ , mas um subespaço é fechado sob CL's segundo Lema 2.1.2 a). (iv) Com efeito  $F \stackrel{(\text{iii})}{=} \langle F \rangle \stackrel{(\text{ii})}{\supset} \langle X \rangle$ .  $\square$

**Lema 2.2.4.** *Todo subconjunto LI  $\{u, v\} \subset \mathbb{R}^2$  de dois elementos já gera  $\mathbb{R}^2$ .*

*Demonstração.* Lema A.2.1.  $\square$

**Lema 2.2.5** (Os subespaços de  $\mathbb{R}^2$ ).  $\{\mathcal{O}\}, \mathbb{R}^2$ , e as retas passando a origem.

*Demonstração.* '⊃' Exercício 2.1.4. '⊂' Seja  $F$  um subespaço de  $\mathbb{R}^2$ . Caso  $F = \{\mathcal{O}\}$ , pronto. Caso contrario existe  $u \in F$  não-nulo. Se os demais  $f \in F$  são múltiplos de  $u$  temos  $F = \mathbb{R}u$ , pronto. Caso contrario existe um  $v \in F$ , não múltiplo de  $u$ . Então  $\{u, v\}$  é LI segundo Exercício 1.3.12 parte 2. Mas neste caso segundo Lema 2.2.4 e Lema 2.2.3 (iv) obtemos  $\mathbb{R}^2 = \langle \{u, v\} \rangle \subset F \subset \mathbb{R}^2$ .  $\square$

**Exemplo 2.2.6** (Os espaços  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^\infty, \mathbb{R}^\infty$ ).

- a) A base canônica  $\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$ , veja (1.2.1), gera  $\mathbb{R}^n$ . Com efeito

$$\mathbb{R}^n \ni v = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A base canônica  $\mathcal{E}^0 := \emptyset$  gera o subespaço vetorial trivial  $\{0\} =: \mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}$ .

- b) Dado  $i \in \mathbb{N}$ , a sequência com todos membros nulos exceto o  $i$ -ésimo qual é 1 denotamos também de  $e_i$ . A **base canônica**  $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$  gera  $\mathbb{R}_0^\infty$ .
- c) A base canônica  $\mathcal{E}^\infty$  não gera  $\mathbb{R}^\infty$ : Uma CLe deve ser uma soma *finita*, tente escrever a sequência cujos membros são todos 1 como uma CL.

**Exemplo 2.2.7** (Polinômios). O conjunto de **monômios**  $\{x^0, x, x^2, \dots, x^n\}$  onde  $x^0 := 1$  gera  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ . Todos os monômios  $\{1, x, x^2, \dots\}$  geram  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

**Exemplo 2.2.8** (Sistemas lineares). Dado um sistema linear  $[\mathbf{a} : b]$  onde  $\mathbf{a}$  é uma matriz  $m \times n$ . Sabemos de (1.2.4) que existe uma solução  $x$  se e somente se a lista  $b$  é CL das colunas da matriz  $\mathbf{a}$ . Consequentemente se as colunas de  $\mathbf{a}$  formam um conjunto de geradores de  $\mathbb{R}^m$ , então para cada uma inomogeneidade  $b \in \mathbb{R}^m$  o SL admite uma solução.

# Aula 4





## 2.3 Soma direta

**Definição 2.3.1** (Soma de subconjuntos). A soma de subconjuntos  $X$  e  $Y$  de um espaço vetorial  $E$  é o conjunto de todas as somas

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\} \subset E$$

Em vez de  $\{u\} + Y$  escreve-se  $u + Y$  e chama-se a **translação de  $Y$  por  $u$** .

**Lema 2.3.2.** A soma de dois subespaços é gerado da união deles, em símbolos

$$F, G \subset E \text{ subespaços} \Rightarrow F + G = \langle F \cup G \rangle$$

Particularmente, a soma de dois subespaços é um subespaço mesmo.

*Demonstração.* Para provar igualdade de dois conjuntos prova-se as duas inclusões. ' $\subset$ ' Os elementos de  $F + G$  são CL's da forma especial  $f + g$  enquanto  $\langle F \cup G \rangle$  contem todas as CL's em  $F \cup G$ .

' $\supset$ ' Pegue um elemento  $h$  de  $\langle F \cup G \rangle$  e use comutatividade para re-escrever a soma finita com os somandos em  $F$  no frente e depois aqueles em  $G$ . Assim recebemos um elemento, igual  $h$ , em  $F + G$ .  $\square$

**Definição 2.3.3** (Soma direta de subespaços). Sejam  $F_1, F_2 \subset E$  subespaços de um espaço vetorial  $E$ . No caso da interseção trivial  $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$  escreve-se  $F_1 \oplus F_2$  em vez de  $F_1 + F_2$  e chama-se **soma direta dos subespaços  $F_1$  e  $F_2$** .

O símbolo  $F \oplus G$  é simplesmente uma abreviação para duas informações, com efeito

$$F \oplus G = H \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{\mathcal{O}\} \\ F + G = H \end{cases}$$

Use-se a soma direta para decompor um vetor unicamente em componentes.

**Teorema 2.3.4.** Sejam  $F_1, F_2 \subset F$  três subespaços de um espaço vetorial  $E$ :

$$F = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow \forall f \in F, \exists! f_1 \in F_1, f_2 \in F_2 \text{ tal que } f = f_1 + f_2$$

*Demonstração.* Teorema A.2.2.  $\square$

**Exercício 2.3.5.** No espaço vetorial  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  das funções  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sejam

$$F_1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ que se anulam em todos os pontos do intervalo } [0,1]\}$$

$$F_2 = \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ que se anulam em todos os pontos do intervalo } [2,3]\}$$

Mostre que  $F_1$  e  $F_2$  são subespaços de  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ , que  $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = F_1 + F_2$ , mas não se tem  $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_2$ .

**Exercício 2.3.6.** Verdadeiro ou falso? Para todos subconjuntos  $X, Y \subset E$  vale

$$(i) \quad \langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$$

$$(ii) \quad \langle X \cap Y \rangle = \langle X \rangle \cap \langle Y \rangle$$

**Exercício 2.3.7.** Uma matriz quadrada  $\mathbf{a} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  chama-se

**simétrica** se  $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$       **anti-simétrica** se  $a_{ij} = -a_{ji} \forall i, j$

Prove que a) o conjunto  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(n)$  das matrizes simétricas  $n \times n$  e o conjunto  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(n)$  das anti-simétricas são subespaços de  $M(n \times n; \mathbb{K})$  e b) que

$$M(n \times n; \mathbb{K}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

[Dica: b) Considere as duas matrizes  $\mathbf{a}^{\pm} := \frac{1}{2}(\mathbf{a} \pm \mathbf{a}^T)$ .]

# Capítulo 3

## Bases

Durante o Capítulo 3 denotamos de  $E$  um espaço vetorial

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K})$$

sobre um corpo  $\mathbb{K}$ .

Bases de um espaço vetorial  $E$  são subconjuntos LI as quais geram  $E$  no sentido que todo vetor de  $E$  pode ser escrito como combinação linear (CL) dos elementos da base. Os coeficientes escalares na CL são únicos (propriedade LI) e chamados de coordenadas de um vetor em respeito à base. Quando  $E$  admite uma base finita de  $n$  elementos chama-se  $n$  a dimensão de  $E$ . Se escolhermos uma outra base, recebemos uma outra dimensão? Veremos na Seção 3.1.2 que não: Se  $E$  admite uma base finita todas as bases tem o mesmo número de elementos.

Então bases são LI, contem suficientemente muitos elementos para que todo vetor pode ser escrito como CL deles, e na dimensão finita bases ainda são conjuntos máximos no sentido que só adicionando mais um outro vetor já recebe-se um conjunto LD.

**Definição 3.0.8 (Base).** Para um subconjunto  $\mathcal{B}$  de  $E$  definimos

$$\mathcal{B} \text{ base de } E \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{B} \text{ gera } E \\ \mathcal{B} \text{ é LI} \end{cases}$$

Uma **base ordenada** é uma base  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$  cujos elementos são enumerados. Conjuntos enumerados correspondem a sequências, listas caso finito.

**Exercício 3.0.9.** Se  $E = F_1 \oplus F_2$ , mostre que uma união  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  de bases de  $F_1$  e  $F_2$  é uma base de  $E$ . [Dica: União LI – ideia de (A.2.1).]

**Exemplo 3.0.10.** Sejam  $u = (1, 1)$  e  $v = (2, 0)$ . Os conjuntos  $\{e_1, u\}$  e  $\{u, v\}$  são bases de  $\mathbb{R}^2$ . Ambos conjuntos são LI segundo Teorema 3.1.1 (os elementos não são múltiplos um do outro), e por isso geram  $\mathbb{R}^2$  (Lema A.2.1). Um exemplo para LD é o conjunto  $\{e_1, v\}$ , no qual um elemento é múltiplo do outro.

**Exemplo 3.0.11** (Bases canônicas).

a) **Listas.** Base canônica  $\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$  onde  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Caso  $n \geq 1$ . Exercício 1.3.12 confirma LI, Exercício 2.2.6 diz que gera  $\mathbb{R}^n$ .  
 Caso  $n = 0$ . Note que  $\mathbb{R}^0 = \{0\}$  é o espaço vetorial trivial. O conjunto vazio  $\mathcal{E}^0 = \emptyset$  é LI (Comentário 1.3.8) e gera o espaço trivial (Definição 2.2.1).  
 $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$ , veja Exemplo 2.2.6, não é base do  $\mathbb{R}^\infty$ , é sim do  $\mathbb{R}_0^\infty$ .

b) **Matrizes.** Seja  $e^{ij} \in M(m \times n)$  a matriz com todas entradas nulas exceto a  $ij$ -ésima entrada a qual é  $(e^{ij})_{ij} = 1$ . A base canônica de  $M(m \times n)$  é

$$\mathcal{E}^{m \times n} := \{e^{ij} \mid i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\} \subset M(m \times n)$$

Note-se que a base canônica tem  $|\mathcal{E}^{m \times n}| = mn$  elementos.

c) **Polinômios.** Base canônica são monômios  $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

Gerando: Por definição de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ . LI: Uma CL de monômios é um polinômio  $p \neq 0$  (não constantemente nulo). Se  $p$  representa o vetor nulo (o polinômio constantemente nulo) todos coeficientes devem se anular porque polinômios de grau  $\ell \geq 1$  tem um numero finito de raízes. Caso  $p$  é de grau zero, ele é da forma  $p(x) = \alpha_0 x^0$  e para se anular  $\alpha_0$  deve-se anular. Analogamente  $\{1, x, \dots, x^n\}$  é uma base de  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ .

d) **Hiperplanos.** Dado uma lista  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  com  $\alpha_n \neq 0$ , o hiperplano

$$H_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}$$

tem como base o conjunto  $\mathcal{B}_\alpha := \{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$  no qual a lista

$$\xi_i := \left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -\frac{\alpha_i}{\alpha_n}\right) \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n-1$$

tem todos membros nulos exceto o  $i$ -ésimo e o último. É óbvio que  $\mathcal{B}_\alpha$  é LI e que gera  $\mathbb{R}^n$  podemos ver assim: Para  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  vale

$$\begin{aligned} x &\in H_\alpha \\ \Leftrightarrow 0 &= \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \\ \Leftrightarrow x_n &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} x_1 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1} \\ \Leftrightarrow x &= \left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} x_1 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1}\right) \in \mathbb{R}^n \\ \Leftrightarrow x &= x_1 \xi_1 + \dots + x_{n-1} \xi_{n-1} \end{aligned}$$

## 3.1 Aplicações

### 3.1.1 Coordenadas de um vetor

**Teorema 3.1.1.** *Seja  $X \subset E$  um subconjunto tal que  $|X| \geq 2$ . Então*

- a)  $X$  é LI  $\Leftrightarrow$  nenhum elemento de  $X$  é CL de outros elementos de  $X$   
 b)  $X$  é LD  $\Leftrightarrow$  existe um elemento de  $X$  que é CL de outros elementos de  $X$

*Demonstração.* a) ' $\Rightarrow$ ' Seja  $X$  LI, suponha por absurdo que um elemento  $u \in X$  fosse CL  $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$  de outros elementos  $v_j$  (tem outros como  $|X| \geq 2$ ). Adicionando  $-u$  em ambos lados obtemos  $\mathcal{O} = (-1)u + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ . Como  $-1 \neq 0$ , e depois descartar os termos com coeficientes nulos, trata-se de uma CL em  $X$  representando o vetor nulo. Assim  $X$  é LD. Contradição.

' $\Leftarrow$ ' Suponhamos por absurdo  $X$  fosse LD. Então existe uma CL em  $X$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \mathcal{O}$$

representando o vetor nulo. Caso  $k = 1$ . Então  $\alpha_1 v_1 = \mathcal{O}$  e assim  $v_1 = \alpha_1^{-1} \mathcal{O} = \mathcal{O}$ . Contradição. Caso  $k \geq 2$ . Então  $v_1 = -\alpha_1^{-1} \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_1^{-1} \alpha_k v_k$  é CL de outros elementos de  $X$ . Contradição. b) é equivalente à parte a).  $\square$

**Corolário 3.1.2** (Unicidade dos coeficientes de CL's em conjuntos LI). *Seja  $\{v_1, \dots, v_k\}$  um subconjunto LI de  $E$ , então*

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_k = \beta_k$$

*Em palavras, se duas CL's num conjunto LI representam o mesmo vetor, então os coeficientes escalares coincidem.*

*Demonstração.*  $\alpha_1 - \beta_1 = 0$ : Suponha por absurdo  $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$ . Então o vetor

$$v_1 = (\alpha_1 - \beta_1)^{-1} ((\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_k - \beta_k)v_k)$$

é CL de outros elementos. Contradição. Análogo para os outros  $\alpha_j - \beta_j$ . Outro argumento (usando LI): Pela hipótese  $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_k - \beta_k)v_k = \mathcal{O}$ . LI diz que todos coeficientes são nulos.  $\square$

**Lema 3.1.3.**

- a) Um subconjunto  $Y$  de um conjunto LI  $X$  é LI. (Subconjuntos herdam LI)  
 b) Um conjunto  $X$  contendo um  $Y$  LD é LD. (Superconjuntos herdam LD)  
 c) Um subconjunto LI  $X$  num subespaço  $F \subset E$ , também é LI em  $E$ .  
 (LI transfere-se para superespaços)

*Demonstração.* a) Como  $X$  é LI, toda CL em  $X$  representando  $\mathcal{O}$  tem todos coeficientes nulos. Como  $Y \subset X$ , toda tal CL em  $Y$  é uma em  $X$  e assim tem todos coeficientes nulos. b) Como  $Y \subset X$ , uma CL em  $Y$  representando  $\mathcal{O}$  é uma tal em  $X$ . c) Isso é simplesmente o fato que o vetor nulo de um subespaço é o vetor nulo do espaço vetorial ambiente, veja Exercício 2.1.3.  $\square$



# Aula 5





**Comentário 3.1.4** (Consequências das duas propriedades de ser base  $\mathcal{B}$  de  $E$ ).  $\langle \mathcal{B} \rangle = E$ : Assim todo  $v \neq \mathcal{O}$  pode ser escrita como CL em  $\mathcal{B}$ , com efeito

$$v = \alpha_1 \xi_1 + \cdots + \alpha_k \xi_k \quad (3.1.1)$$

para escalares  $\alpha_i \in \mathbb{K}$  e vetores da base  $\xi_j \in \mathcal{B}$ .

$\mathcal{B}$  é LI: Assim os coeficientes  $\alpha_j$  em cima são únicos (Corolário 3.1.2).

**Definição 3.1.5** (Coordenadas). As **coordenadas de um vetor  $v$  em respeito a uma base  $\mathcal{B}$**  são os coeficientes  $\alpha_j$  em (3.1.1).

*Todo vetor  $v \in E$  admite coordenadas únicas  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$  em respeito a uma base  $\mathcal{B}$  de  $E$ .*

**Exercício 3.1.6.** Mostre que os polinômios  $1$ ,  $x - 1$ , e  $x^2 - 3x + 1$  formam uma base de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ . Exprima o polinômio  $2x^2 - 5x + 6$  como CL nessa base.

### 3.1.2 Dimensão de um espaço vetorial

**Teorema 3.1.7.** *Se um conjunto finito gera  $E$ , então qualquer conjunto  $Y \subset E$  com mais elementos é LD.*

**Corolário 3.1.8.** *Suponha um conjunto finito  $X$  gera  $E$ , então*

$$Y \subset E \text{ LI} \quad \Rightarrow \quad |Y| \leq |X|.$$

Para provar Teorema 3.1.7 vamos usar o seguinte resultado sobre SLH's.

**Teorema 3.1.9** (Existência de soluções não-triviais de um SLH). *Dado uma matriz  $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K})$ . Se tem menos linhas como colunas ( $m < n$ ), então o SLH  $\mathbf{a}x = 0$ , compare (1.2.3), admite soluções  $x = (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ .*

*Demonstração.* Indução sobre o número  $m$  de linhas. Veja Teorema A.3.1.  $\square$

*Demonstração de Teorema 3.1.7.* Suponha que o conjunto  $X = \{v_1, \dots, v_m\}$  gera o espaço vetorial  $E$  e seja  $Y \subset E$  um outro subconjunto com mais elementos, ou seja  $|Y| > m$ . Para mostrar que  $Y$  é LD, basta mostrar segundo Lema 3.1.3 b) que um subconjunto  $U = \{u_1, \dots, u_{m+1}\} \subset Y$  de  $m+1$  elementos é LD. Como  $X$  gera  $E$  e cada um  $u_j$  pertence a  $E$  existem escalares  $a_{ij}$  tal que

$$u_j = a_{1j}v_1 + \cdots + a_{mj}v_m \quad (*_j)$$

para  $j = 1, \dots, m+1$ .

Para  $U$  é LD resta mostrar: existem escalares não-nulos  $x_1, \dots, x_{m+1}$  tal que

$$x_1 u_1 + \cdots + x_{m+1} u_{m+1} = \mathcal{O} \quad (3.1.2)$$

Para este fim considere o SLH de  $m$  equações de  $n = m+1$  incógnitas  $x_j$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1,m+1}x_{m+1} = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{m,m+1}x_{m+1} = 0 \end{cases} \quad (\text{SLH})$$

o qual tem uma solução não-trivial  $x = (x_1, \dots, x_{m+1}) \neq (0, \dots, 0)$  segundo Teorema 3.1.9 como  $m < n$ . Obtemos (3.1.2) assim: usando  $(*_1 - *_m)$  temos

$$\begin{aligned}
 & x_1 u_1 + \dots + x_{m+1} u_{m+1} \\
 &= x_1 (a_{11} v_1 + \dots + a_{m1} v_m) \\
 &\quad + x_2 (a_{12} v_1 + \dots + a_{m2} v_m) \\
 &\quad \vdots \\
 &\quad + x_{m+1} (\alpha_{1,m+1} v_1 + \dots + \alpha_{m,m+1} v_m) \\
 &= v_1 \underbrace{\sum_{j=1}^{m+1} a_{1j} x_j}_{= 0 \text{ (SLH)}_1} + \dots + v_m \underbrace{\sum_{j=1}^{m+1} a_{mj} x_j}_{= 0 \text{ (SLH)}_m} \\
 &= \mathcal{O}
 \end{aligned}$$

□

**Proposição 3.1.10.** *Se uma base  $\mathcal{B}$  de  $E$  tem  $m$  elementos, então todas tem.*

*Demonstração.* Sejam  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$  e  $\tilde{\mathcal{B}}$  bases de  $E$ .

1)  $\langle \mathcal{B} \rangle = E$  e  $Y := \tilde{\mathcal{B}}$  LI implicam (Corolário 3.1.8)  $\ell := |\tilde{\mathcal{B}}| \leq |\mathcal{B}| = m < \infty$ .

2) Analogamente como  $\langle \tilde{\mathcal{B}} \rangle = E$  e  $Y := \mathcal{B}$  é LI, temos que  $m = |\mathcal{B}| \leq |\tilde{\mathcal{B}}| = \ell$ . □

**Definição 3.1.11** (Dimensão). Se um espaço vetorial  $E$  admite uma base finita  $\mathcal{B}$ , o número dos elementos é dito a **dimensão de  $E$** , em símbolos

$$\dim E := |\mathcal{B}|$$

Caso  $E$  não admite nenhuma base finita dizemos que  $E$  é de **dimensão infinita** e escrevemos  $\dim E = \infty$ .

**Comentário 3.1.12** (Dimensão do espaço vetorial trivial). O conjunto vazio é uma base do espaço vetorial trivial  $E = \{\mathcal{O}\}$ , Exemplo 1.3.8, assim  $\dim\{\mathcal{O}\} = 0$ .

**Lema 3.1.13** (Aumentando conjuntos LI). *Seja  $X = \{v_1, \dots, v_n\}$  um subconjunto LI e seja  $u \in E$  um vetor fora do subespaço gerado, ou seja  $\langle X \rangle$ . Então o conjunto estendido  $\{v_1, \dots, v_n, u\}$  também é LI.*

*Demonstração.* Se  $X = \emptyset$ , então  $u \neq \mathcal{O}$  e  $\{u\}$  é LI segundo Corolário 1.3.8. Se  $X \neq \emptyset$ , suponha por absurdo que  $\{v_1, \dots, v_n, u\}$  fosse LD. Assim existe uma CLe  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta u = \mathcal{O}$ . Caso  $\beta = 0$ , então  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$  e  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \mathcal{O}$ . Assim  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é LD. Contradição. Caso  $\beta \neq 0$ , então  $u = -\beta^{-1}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \in \langle X \rangle$ . Contradição. □

**Exercício 3.1.14.** Sejam  $X_1, X_2, \dots$  subconjuntos LI de um espaço vetorial  $E$ .

1. Caso encaixado  $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ , prove que  $X = \bigcup X_n$  é LI.

2. Se cada  $X_n$  tem  $n$  elementos, prove que existe um conjunto LI  $\tilde{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$  com  $x_j \in X_j$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ .
3. Supondo  $E = \mathbb{R}^\infty$  e as hipóteses em 1. e 2., é verdade que  $X = \bigcup X_n$  seja uma base de  $E$ ?

**Corolários do Teorema 3.1.7**

**Corolário 3.1.15.**  $Y \subset E, |Y| > n := \dim E \Rightarrow Y$  LD

*Demonstração.* Como  $\dim E = n$  existe uma base  $\mathcal{B}$  de  $E$  com  $n$  elementos.  $\square$

**Corolário 3.1.16.** *Suponha  $X \subset E$  tem  $n := \dim E$  elementos, então*

$$X \text{ gera } E \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ é LI}$$

*Demonstração.*  $n = 0$ . Assim  $X = \emptyset$ , ambos lados valem automaticamente.

$n = 1$ . Assim  $X = \{v\}$  onde  $v \in E$ , ambos lados são equivalentes a  $v \neq \mathcal{O}$ .

$n = 2$ . ' $\Rightarrow$ ' Suponha que  $X = \{v_1, \dots, v_n\}$  gera  $E$ . Por absurdo suponha que  $X$  é LD. Segundo Teorema 3.1.1 b) um elemento de  $X$ , dizemos  $v_n$ , é CL de outros elementos de  $X$ . Então  $E = \langle X \rangle = \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle = \langle \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \rangle$ . Qualquer base  $\mathcal{B}$  de  $E$  tem  $n$  elementos pela hipótese  $n = \dim E$  – mais elementos como o conjunto  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  gerando  $E$ . Então  $\mathcal{B}$  é LD segundo Teorema 3.1.7. Contradição. ' $\Leftarrow$ ' Suponha que  $X = \{v_1, \dots, v_n\}$  é LI. Por absurdo suponha que  $X$  não gera  $E$ . Então existe  $u \in E$  não elemento de  $\langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$ . Assim o conjunto aumentado  $\{v_1, \dots, v_n, u\}$  é LI segundo Lema 3.1.13. Mas um subconjunto com mais elementos ( $n + 1$ ) como a dimensão ( $n$ ) é LD segundo Corolário 3.1.15. Contradição.  $\square$

**Corolário 3.1.17.** *Um subconjunto LI com  $n = \dim E$  elementos é uma base.*

*Demonstração.* Tal subconjunto LI gera  $E$  segundo Corolário 3.1.16 ' $\Leftarrow$ '.  $\square$

**Lema 3.1.18.** *Se um conjunto finito  $X$  gera  $E$ , então  $|X| \geq \dim E$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $X = \{v_1, \dots, v_m\}$  gera  $E$ .

CASO  $X = \{v_1, \dots, v_m\}$  LI. Então  $X$  é base e assim  $|X| = \dim E$ .

CASO  $X = \{v_1, \dots, v_m\}$  LD. Assim  $X \neq \emptyset$ .

Caso  $m = 1$ : Então  $v_1 = \mathcal{O}$  e  $E = \langle v_1 \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle$ . Assim  $|X| = 1 > 0 = \dim E$ .

Caso  $m \geq 2$ : Como  $\{v_1, \dots, v_m\}$  é LD, pelo menos um elemento, dizemos  $v_m$ , deve ser CL de outros. Iterando até chegamos num conjunto LI obtemos que

$$E = \langle \{v_1, \dots, v_m\} \rangle = \langle \{v_1, \dots, v_{m-1}\} \rangle = \dots = \langle \{v_1, \dots, v_\ell\} \rangle$$

onde  $\{v_1, \dots, v_\ell\}$  é LI e  $\ell \geq 1$ . Então  $\{v_1, \dots, v_\ell\} =: \mathcal{B}$  é base de  $E$  e assim  $|X| > \ell = |\mathcal{B}| =: \dim E$ .  $\square$

**Exemplo 3.1.19** (Dimensão). Veja Exemplo 3.0.11.

- (a)  $\dim \mathbb{R}^n = |\mathcal{E}^n| = n$  e  $\dim \mathbb{R}_0^\infty = |\mathcal{E}^\infty| = \infty$ . (Análogo para corpos  $\mathbb{K}$ .)  
 $\dim \mathbb{R}^\infty = \infty$ : Suponha por absurdo que é finita a dimensão  $n := \dim \mathbb{R}^\infty$ . Segundo Corolário 3.1.15 para  $Y = \mathcal{E}^\infty$  e  $E = \mathbb{R}^\infty$ , como  $|Y| = |\mathcal{E}^\infty| = \infty > n = \dim \mathbb{R}^\infty$ , segue que  $\mathcal{E}^\infty$  é LD em  $\mathbb{R}^\infty$ . Mas  $\mathcal{E}^\infty$  é LI em  $\mathbb{R}^\infty$  segundo Exercício 1.3.12. (Outro argumento: Como  $\mathcal{E}^\infty$  é LI em  $\mathbb{R}_0^\infty$ , deve ser LI em  $\mathbb{R}^\infty$  segundo parte c) do Lema 3.1.3.) Contradição.
- (b)  $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1$  e  $\dim \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \infty$ .
- (c)  $\dim M(m \times n) = mn$ .
- (d) Hiperplanos  $H_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ , onde  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  não-nulo, tem dimensão  $n - 1$ . Aquele 'hiper' refere-se ao fato de que na dimensão falta 1 para a dimensão do espaço vetorial ambiente.

# Aula X



## 3.2 Existência e extensão

**Teorema 3.2.1.** *Seja  $E$  de dimensão finita  $\dim E = n \in \mathbb{N}_0$ .*

- (a) *Todo conjunto gerando  $E$  contém uma base de  $E$ .*
- (b) *Todo subconjunto LI é contido numa base.*
- (c) *A dimensão de qualquer subespaço de  $E$  é  $\leq n$ .*
- (d) *Um subespaço  $F$  de  $E$  da mesma dimensão  $n$  é igual a  $E$ .*

**Corolário 3.2.2.** *Todo espaço vetorial  $E$  gerado por um conjunto finito  $X$  admite uma base  $\mathcal{B}$  tal que  $|\mathcal{B}| \leq |X|$ .*

**Lema 3.2.3.** *Sejam  $F, G \subset E$  subespaços e  $\dim E < \infty$ , então:*

$$F \oplus G = E \quad \Leftrightarrow \quad \dim F + \dim G = \dim E \quad \text{e} \quad F \cap G = \{\mathcal{O}\}$$

**Exercício 3.2.4.** *Sejam  $F_1, F_2 \subset E$  subespaços de dimensão finita. Obtenha uma base do subespaço  $F_1 + F_2$  que contenha uma base de  $F_1$ , uma base de  $F_2$  e uma base de  $F_1 \cap F_2$ .*

**Exercício 3.2.5** (Subespaços das matrizes quadradas).

1. Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{S} \subset M(n \times n)$  os subespaços das matrizes anti-/simétricas.

- (a) Para cada par  $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$  seja  $\mathbf{e}_+^{ij}$  a matriz  $n \times n$  cujos elementos nas posições  $ij$  e  $ji$  são iguais a 1 e os demais são zero. Prove que estas matrizes constituem uma base  $\{\mathbf{e}_+^{ij}\}$  para  $\mathcal{S}$ .
- (b) De modo análogo, obtenha uma base  $\{\mathbf{e}_-^{ij}\}$  para  $\mathcal{A}$ .
- (c) Conclua que

$$\dim \mathcal{S} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Calcule  $\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{A}$  e lembre-se que  $\dim M(n \times n) = n^2$ . Conclua que

$$M(n \times n) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$$

2. As matrizes  $\mathbf{t} = (t_{ij}) \in M(n \times n)$  tais que  $t_{ij} = 0$  quando  $i < j$  são chamadas **triangulares inferiores**. Prove que elas constituem um subespaço  $\mathcal{T} \subset M(n \times n)$ . Obtenha uma base para  $\mathcal{T}$  e determine a sua dimensão.
3. Obtenha uma base e conseqüentemente determine a dimensão de cada um dos seguintes subespaços de  $M(n \times n)$  os quais são compostos de
  - (a) matrizes  $\mathbf{a} = (a_{ij})$  de **traço** (a soma dos elementos da diagonal) nulo

$$\text{tr } \mathbf{a} := \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0$$

- (b) matrizes cuja primeira e última linha são iguais
- (c) matrizes cuja segunda linha e terceira coluna são iguais





Parte II

Teoria das transformações  
lineares



## Capítulo 4

# Transformações lineares

4.1 Exemplos

4.2 Matriz de uma transformação linear

4.3 Rotações e projeções

4.4 Produto de transformações lineares



## Capítulo 5

# Núcleo e imagem



# Apêndice A

## Demonstrações restantes

### A.1 Espaços vetoriais

**Lema A.1.1** (Lema 1.1.4). *Seja  $(G, *)$  um grupo. Então vale o seguinte.*

- 1) *O elemento neutro é único.*
- 2) *Os elementos inversos são únicos.*
- 3) *Para todos os elementos  $f, g, h \in G$  vale:*

- a)  $f * g = f * h \Rightarrow g = h$  *(lei da corte)*
- b)  $f * g = f \Rightarrow g = e$
- c)  $f * g = e \Rightarrow g = \bar{f}$

*Demonstração.* 1) Se  $e, \tilde{e} \in G$  satisfazem o axioma (elemento neutro), então usando o axioma para  $e$  e depois para  $\tilde{e}$  obtemos que  $e = e * \tilde{e} = \tilde{e}$ .

2) Seja  $g \in G$ . Se  $\bar{g}, \tilde{g} \in G$  satisfazem o axioma (inverso) para  $g$ , então obtemos

$$\bar{g} = e * \bar{g} = \underbrace{(\tilde{g} * g)}_{=e} * \bar{g} = \tilde{g} * \underbrace{(g * \bar{g})}_{=e} = \tilde{g} * e = \tilde{g}$$

usando (elem. neutro) no início e fim, (inverso) $_{\tilde{g}}$ , (associatividade), (inverso) $_{\bar{g}}$ .

- 3) a)  $g = e * g = (\bar{f} * f) * g = \bar{f} * (f * g) \stackrel{\text{hip.}}{=} \bar{f} * (f * h) = (\bar{f} * f) * h = e * h = h$ .
- b) Use a) com  $h = e$ . c) Use a) com  $h = \bar{f}$ . □

**Lema A.1.2** (Lema 1.1.9). *Seja  $\mathbb{K}$  um corpo e  $0 \in K$  é o elemento neutro da adição. Então  $0\beta = 0$  e  $\beta 0 = 0$  para todos os elementos  $\beta \in \mathbb{K}$ .*

*Demonstração.* Seja  $\beta \in \mathbb{K}$ , denotamos o inverso aditivo de  $-\beta$ . Então

$$\beta \stackrel{(\text{el.n.})}{=} 1\beta \stackrel{(\text{el.n.})_+}{=} (1+0)\beta \stackrel{(\text{distr.})}{=} 1\beta + 0\beta \stackrel{(\text{el.n.})}{=} \beta + 0\beta$$

Usamos esta identidade para obter a segunda igualdade no seguinte

$$0 \stackrel{(\text{inv.})}{=} (-\beta) + \beta = -\beta + (\beta + 0\beta) \stackrel{(\text{ass.})_+}{=} (-\beta + \beta) + 0\beta \stackrel{(\text{inv.})}{=} 0 + 0\beta \stackrel{(\text{el.n.})}{=} 0\beta$$

□

**Lema A.1.3** (Lema 1.1.17). *Para o vetor nulo  $\mathcal{O} \in E$  de um espaço vetorial e o elemento neutro aditivo  $0 \in \mathbb{K}$  do corpo vale o seguinte.*

- (i)  $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$  para todos os escalares  $\alpha \in \mathbb{K}$ .
- (ii)  $0v = \mathcal{O}$  para todos os vetores  $v \in E$ .
- (iii) Para todo o escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$  e todo o vetor  $w \in E$  são equivalentes:

$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O}$$

*Demonstração.* (i) CASO  $\alpha = 0$ . Como  $\alpha\mathcal{O} + 0\mathcal{O} = (\alpha + 0)\mathcal{O} = \alpha\mathcal{O}$ , então  $0\mathcal{O} = \mathcal{O}$  pela lei da corte (Lema A.1.1 3b) para  $(G, *) = (E, +)$ . CASO  $\alpha \neq 0$ . Tal  $\alpha$  tem um inverso aditivo, notação  $\alpha^{-1}$ . Seja  $v \in E$ , então

$$v \stackrel{(\text{comp.})}{=} 1v \stackrel{(\text{inv.})_{\mathbb{K}}}{=} (\alpha\alpha^{-1})v \stackrel{(\text{comp.})}{=} \alpha(\alpha^{-1}v)$$

Usando este resultado no início e no fim do seguinte obtemos que

$$v + \alpha\mathcal{O} = \alpha(\alpha^{-1}v) + \alpha\mathcal{O} \stackrel{(\text{distr.})_E}{=} \alpha((\alpha^{-1}v) + \mathcal{O}) \stackrel{(\text{el.n.})_{E,+}}{=} \alpha(\alpha^{-1}v) = v$$

Então  $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$  pela lei da corte (Lema A.1.1 3b) para  $(G, *) = (E, +)$ .

- (ii) Como  $v + 0v = 1v + 0v = (1 + 0)v = 1v = v$  a lei da corte diz que  $0v = \mathcal{O}$ .
- (iii) '⇒' Suponha  $\alpha w = \mathcal{O}$ . Caso  $\alpha = 0$ , pronto. Caso  $\alpha \neq 0$  concluímos que

$$w \stackrel{(\text{comp.})}{=} 1w \stackrel{(\text{el.n.})_{\mathbb{K}}}{=} (\alpha^{-1}\alpha)w \stackrel{(\text{comp.})}{=} \alpha^{-1}(\alpha w) \stackrel{\text{hip.}}{=} \alpha^{-1}\mathcal{O} \stackrel{(i)}{=} \mathcal{O}$$

'⇐' Se  $w = \mathcal{O}$ , então  $\alpha\mathcal{O} \stackrel{(i)}{=} \mathcal{O}$ , pronto. Se  $\alpha = 0$ , então  $0w \stackrel{(ii)}{=} \mathcal{O}$ , pronto. □

**Corolário A.1.4** (Corolário 1.1.18). *Para todos os  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $w \in E$  vale:*

- a)  $\alpha(-w) = -(\alpha w)$
- b)  $(-\alpha)w = -(\alpha w)$

*Demonstração.* a) Temos que mostrar que a soma de  $\alpha w$  e o candidato para ser seu inverso aditivo iguale o vetor nulo. Com efeito

$$\alpha w + \alpha(-w) \stackrel{(\text{distr.})_E}{=} \alpha(w + (-w)) \stackrel{(\text{el.n.})_{E,+}}{=} \alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$$

onde o último passo é parte (i) de Lema A.1.3.

b) Temos o objetivo análogo de chegar ao vetor nulo, com efeito

$$\alpha w + (-\alpha)w \stackrel{(\text{distr.})_E}{=} (\alpha + (-\alpha))w \stackrel{(\text{el.n.})_{\mathbb{K},+}}{=} 0w = \mathcal{O}$$

onde o último passo é parte (ii) de Lema A.1.3. □



## A.2 Subespaços

**Lema A.2.1** (Lema 2.2.4). *Todo subconjunto LI  $\{u, v\} \subset \mathbb{R}^2$  gera  $\mathbb{R}^2$ .*

*Demonstração.* Vai ter 4 passos. I. Os vetores  $u, v$  não são múltiplos um do outro: Suponha por absurdo que  $u = \alpha v$  para um  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então  $1u + (-\alpha)v = 1\alpha v - (\alpha v) = \mathcal{O}$  contradizendo LI. II.  $u \neq \mathcal{O}$ : Caso contrario  $u = \mathcal{O} = 0v$  contradizendo I. III.  $v \neq \mathcal{O}$ : Análogo. IV. Seja  $v \in \mathbb{R}^2$ . Caso  $w = \mathcal{O}$  escrevemos  $w = 0u$ , pronto. Caso  $v \neq \mathcal{O}$ : Agora identificamos  $\mathbb{R}^2$  com o plano usando dois eixos  $OXY$ , veja Figura 2. Segundo II. e III. temos duas retas  $\mathbb{R}u$  e  $\mathbb{R}v$  passando ambas a origem  $O$ , mas não são iguais segundo I. Recebemos um paralelogramo com dois lados parte das retas e dois vértices sendo  $O$  e  $v$ ; pensa Figura 2 com  $OX$  e  $OY$  substituto para  $Ou$  e  $Ov$ . Então a flecha  $v$  é a soma de duas flechas do paralelogramo, uma flecha sendo um múltiplo de  $u$  e a outra de  $v$ . Pronto.  $\square$

**Teorema A.2.2** (Teorema 2.3.4). *Sejam  $F_1, F_2 \subset F$  três subespaços de um espaço vetorial  $E$ , então são equivalentes*

$$F = F_1 \oplus F_2 \iff \forall f \in F, \exists! f_1 \in F_1, f_2 \in F_2 \text{ tal que } f = f_1 + f_2$$

*Demonstração.* ' $\Rightarrow$ ' Seja  $f \in F$ . Como hipótese temos duas informações, a saber (i)  $F = F_1 + F_2$  e (ii)  $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$ , dando existência e unicidade.

EXISTÊNCIA: De (i) sabemos que  $f = f_1 + f_2$  para um  $f_1 \in F_1$  e um  $f_2 \in F_2$ .

UNICIDADE. Suponha que  $f = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$  também para um  $\tilde{f}_1 \in F_1$  e um  $\tilde{f}_2 \in F_2$ . Então  $F_1 \ni f_1 - \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 - f_2 \in F_2$ . Assim cada um lado pertence a ambos espaços, então a  $F_1 \cap F_2$  o qual segundo (ii) iguale  $\{\mathcal{O}\}$ . Como não tem outro elemento, cada um lado deve ser o vetor nulo.

' $\Leftarrow$ '  $F_1 + F_2 = F$ : A hipótese *existência* disponibiliza a primeira inclusão  $F \subset F_1 + F_2 \subset F$  e a segunda vale como  $F_1, F_2 \subset F$ .

$F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$ : Seja  $f \in F_1 \cap F_2$ , a mostrar  $f = \mathcal{O}$ . Note que  $f \in F$  como  $F_1, F_2 \subset F$ . Então segundo a propriedade do vetor nulo

$$\underbrace{f}_{\in F_1} + \underbrace{\mathcal{O}}_{\in F_2} = f = \underbrace{\mathcal{O}}_{\in F_1} + \underbrace{f}_{\in F_2} \quad (\text{A.2.1})$$

Mas pela hipótese *unicidade* escrever  $f$  como soma de um elemento de  $F_1$  e um elemento de  $F_2$  é único, então  $f = \mathcal{O}$  e  $\mathcal{O} = f$ .  $\square$

## A.3 Bases

**Teorema A.3.1** (Teorema 3.1.9). *Dado uma matriz  $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K})$ . Se tem menos linhas como colunas ( $m < n$ ), então o sistema linear homogêneo (SLH)*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

*admite soluções  $x = (x_1, \dots, x_n)$  não triviais (não todos  $x_j$  nulos).*

*Demonstração.* Indução sobre o número  $m$  de equações.  $m = 1$ : □

# Índice Remissivo

- $C^0(\mathbb{R})$  funções contínuas  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 32  
 $C^k(\mathbb{R})$  funções  $k$  vezes continuamente diferenciáveis, 32  
 $C^\infty(\mathbb{R})$  funções suaves  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 32  
 CL combinação linear, 25  
 CLe combinação linear estrita, 25  
 $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$  espaço vetorial, 14  
 $e_i \in \mathbb{K}^n$   $i$ -ésimo vetor canônico, 19  
 $\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\}$  base canônica, 19, 34, 40  
 $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$  base canônica, 20, 34, 40  
 $\mathcal{E}^{m \times n} := \{\mathbf{e}^{ij}\}_{i,j}$  base canônica, 40  
 $\mathbf{e}_{\mp}^{ij} := \frac{1}{2}(\mathbf{e}^{ij} \mp \mathbf{e}^{ji}) \in \mathcal{A}/\mathcal{S}$   $i \leq j$ , 51  
 $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) := \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{K}\}$ , 21  
 $(G, *)$  grupo, 9  
 $H_\alpha$  hiperplano no  $\mathbb{R}^n$ , 32, 40, 48  
 $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  corpo, 10  
 $\mathbb{K}v$  reta passando  $v$  e  $\mathcal{O}$ , 32  
 LI/LD linearmente in/dep., 29  
 $M(m \times n)$  matrizes  $m \times n$ , 20, 38, 48  
 $\mathcal{A}, \mathcal{S}$  matrizes anti-/simétricas, 38  
 $\mathcal{O}$  vetor nulo, 14  
 (oe) operações elementares, 22  
 $\mathcal{P}(\mathbb{K})$  polinômios, 21  
 $\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  polinômios reais e aqueles do grau  $\leq n$ , 32, 48  
 $R^n$  listas ordenadas de  $n$  reais, 19, 48  
 $R^\infty$  seqüências reais, 20  
 $\mathbb{R}_0^\infty$  quase todos membros nulos, 20, 32, 48  
 SL sistema linear, 23  
 SLH sistema linear homogêneo, 23, 45  
 $\forall, \exists, \exists!$  “para todos”, “existe”, “existe unicamente”, 5  
 $\langle X \rangle$  subespaço gerado por  $X$ , 33  
 $\langle v \rangle := \langle \{v\} \rangle$ , 33  
 $|X|$  numero de elementos de um conjunto  $X$ , 9  
 $|\alpha|$  absoluto de um numero  $\alpha$ , 5  
 $\mathbf{a} = (a_{ij})$  matriz, 20  
 $a_{ij}$   $i$ -ésima linha,  $j$ -ésima coluna, 20  
 $\mathbf{a}_{\bullet k}, \mathbf{a}_{k \bullet}$   $k$ -ésima coluna, linha, 21  
 $\mathbf{a}_{\text{esc}}$  matriz escalonada, 22  
 $:=$  “definido por”, 5  
 $[a, b], (a, b)$  intervalo fechado, aberto, 5  
 $[\mathbf{a} : b]$  matriz aumentada, 23  
 $X \times Y$  produto cartesiano, 9  
 $F \oplus G$  soma direta, 37  
 $X + Y$  soma de subconjuntos, 37  
 $\text{tr } \mathbf{a} := \sum_{i=1}^n a_{ii}$  traço, 51  
 adição de funções, 21  
 base, 39  
     canônica, 19, 20, 34, 40  
     das matrizes  $m \times n$ , 40  
     ordenada, 39  
 combinação linear, 25  
     ‘de vetores’, 25  
 combinação linear estrita (num conjunto), 25  
 composição de funções, 14  
 conjunto, 9  
     finito, 9  
     gerando, 33  
     linearmente independente LI, 29  
     que gera, 33  
 coordenadas de um vetor, 45

- no plano, 4
- corpo, 10
- decomposição
  - de vetores, 37
- eixo, 4
- elemento neutro
  - aditivo, 11
  - multiplicativo, 11
- escalares, 14
- espaço vetorial, 14
  - base, 39
  - subespaço, 31
  - trivial, 19
- fechado sob uma operação, 31
- funções
  - adição de  $-$ , 21
  - composição de  $-$ , 14
  - multiplicação de  $-$ , 14
- grau
  - de um polinômio, 21
- grupo, 9
  - abeliano, 10
- hiper, 48
- hiperplano, 32, 40
- independência linear
  - de um conjunto, 29
- inimigo da clareza
  - desnecessidade, 25
- lei
  - da corte, 10
- linearmente in/dependente, 29
- matriz
  - anti-/simétrica, 38
  - entradas da  $-$ , 20
  - escalonada, 22
    - pivôs, 22
  - linhas e colunas, 21
  - operações elementares numa  $-$ , 22
  - traço de uma  $-$  quadrada, 51
- matriz aumentada, 23
- matrizes
  - triangulares
    - inferiores, 51
- monômios, 34, 40
- multiplicação
  - de funções, 14
- operações elementares numa matriz, 22
- origem, 19
- pivôs, 22
- polinômio, 21
  - grau de um  $-$ , 21
- produto
  - cartesiano, 9
- rotação
  - no plano, 3
- sistema de
  - coordenadas
    - no plano, 4
- sistema linear (SL), 23
  - inogeneidade, 23
  - resolver “de baixo para cima”, 24
- sistema linear homogêneo (SLH), 23, 45
- soma
  - de subconjuntos, 37
    - direta, 37
- subconjunto
  - translação de  $-$ , 37
- subconjuntos
  - herdam LI, 41
  - soma de  $-$ , 37
- subespaço
  - vetorial, 31
- subespaços
  - soma direta de  $-$ , 37
- teorema
  - decomposição única de vetores, 37
- traço, 51
- translação, 37
- verdade vazia, 29

- vetor
  - coordenadas de um  $-$ , 45
  - decomposição, 37
- vetor nulo, 14
- vetores, 14