

Álgebra Linear

Notas da aula¹
MA327 2020-2

manuscrito em progresso

Joa Weber
UNICAMP

29 de setembro de 2020

¹versão final estará lá: www.math.stonybrook.edu/~joa/PUBLICATIONS/MA327.pdf

Sumário

I	Teoria dos espaços vetoriais	7
1	Espaços vetoriais	9
1.1	Axiomas	9
1.1.1	Grupo	9
1.1.2	Corpo	10
1.1.3	Espaço vetorial	14
1.2	Exemplos	19
1.2.1	Listas ordenadas	19
1.2.2	Matrizes	20
1.2.3	Funções e polinômios	21
1.2.4	Excursão: Escalonamento de matrizes	21
1.3	Independência linear	24
1.3.1	Combinação linear	24
1.3.2	Independência linear	29
2	Subespaços	31
2.1	Definição e exemplos	31
2.2	Conjuntos gerandos	33
2.3	Soma direta	37
3	Bases	39
3.1	Definição e exemplos	39
3.1.1	Coordenadas de um vetor	41
3.1.2	Dimensão de um espaço vetorial	41
3.2	Existência e extensão	48
II	Teoria das transformações lineares	49
4	Transformações lineares	51
4.1	Exemplos	51
4.2	Matriz de uma transformação linear	51
4.3	Rotações e projeções	51
4.4	Produto de transformações lineares	51

5	Núcleo e imagem	53
A	Demonstrações restantes	55
A.1	Espaços vetoriais	55
A.2	Subespaços	57
A.3	Bases	57
	Índice Remissivo	59

Aula 1

Introdução

Álgebra Linear

é o estudo dos espaços lineares e das transformações lineares.

Uma outra palavra para espaço linear é espaço vetorial.

Exemplo 0.0.1 (Flechas equivalentes no plano). Seja F o conjunto das flechas equivalentes v (mesma direção e comprimento) no plano Π munido das operações de multiplicar uma flecha v com um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ e de adicionar duas flechas v e w .

Multiplicação (escalar). Pela definição αv é a flecha na direção de v cujo comprimento é α vezes aquele de v (muda-se a direção caso o número α é negativo).

Adição (vetorial). Pela definição $v + w$ é a flecha cujo ponto inicial é aquela de v e cujo ponto termino p é obtido depois fazer uma translação de w movendo o ponto inicial de w no ponto termino de v . Então p é definido como o ponto termino do novo w .

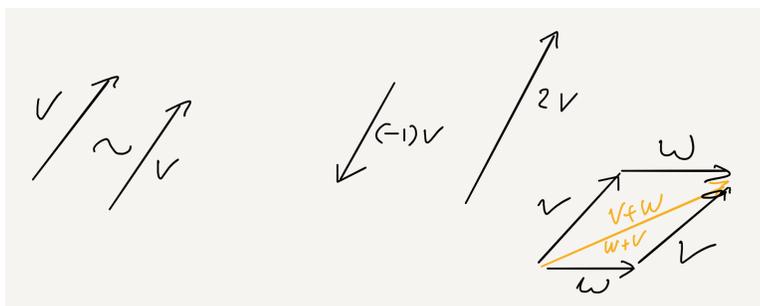


Figura 1: Adição de flechas e multiplicação escalar

Tal F é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{R} e um exemplo de uma transformação linear em F é dado pela rotação $r_\theta : F \rightarrow F$ de uma flecha v pelo ângulo θ em torno do ponto inicial.

Exemplo 0.0.2 (Pares de números reais). Seja $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ o conjunto de todas listas ordenadas de dois membros reais munido da adição

membro-por-membro e multiplicação com um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ também membro-por-membro. Então \mathbb{R}^2 é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{R} .

Comentário 0.0.3 (Identificação dos conjuntos e operações – isomorfismo). Os dois exemplos anteriores são “iguais” no sentido seguinte. Suponhamos que na reta podemos medir a distância 1. No plano Π escolha um **eixo** OX , ou seja uma reta com dois pontos diferentes O e X da distância 1, e um segundo eixo OY cujo primeiro ponto O é aquele do OX e qual intersecta OX exatamente no ponto O . Uma tal escolha de dois eixos é chamado um **sistema de coordenadas** no plano, símbolo OXY .

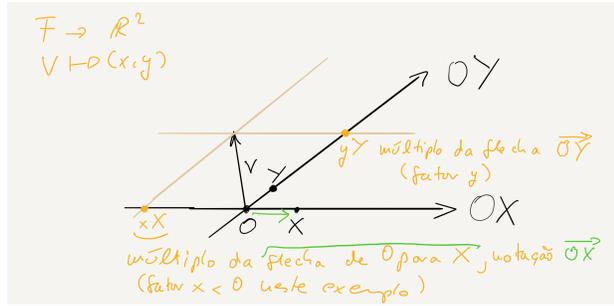


Figura 2: Sistema de coordenadas OXY composto de dois eixos OX e OY

Observe-se que um eixo OX chega com uma direção (de O para X) e com um comprimento unitário (o comprimento do segmento entre O e X). Uma escolha de coordenadas OXY no plano Π nos dá uma aplicação

$$F \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto (x, y)$$

a qual identifica os elementos de F com os elementos de \mathbb{R}^2 unicamente (bijetora) – e ainda é **linear**, ou seja compatível com as duas operações no domínio e as duas no contradomínio. Uma tal aplicação (bijetora linear) é chamado um **isomorfismo** entre espaços vetoriais. Deixamos ao leitor definir esta aplicação. [Dica: Os pontos O, X e O, Y dão duas flechas. Represente um elemento de F por uma flecha equivalente com ponto inicial O . Pensa num paralelogramo tal que O e o ponto termino da flecha equivalente são dois vértices opostos.]

Exemplo 0.0.4 (Funções contínuas e integração). Sejam $a < b$ dois números reais. Então o quadruplo $V = (C^0([a, b], \mathbb{C}), +, \cdot, \mathbb{R})$ que é composto do conjunto das funções contínuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ munido com as duas operações de adicionar $f + g$ duas funções e multiplicar αf uma função com um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{R} .

Também $W = (\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R})$ composto das números reais \mathbb{R} munido das operações óbvias é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{R} .

Integração $T : V \rightarrow W, f \mapsto \int_a^b f(x) dx$, é compatível com as duas adições e multiplicações (em V e em W) no sentido que

$$T(f + g) = Tf + Tg, \quad T(\alpha f) = \alpha Tf$$

para todos os vetores $f, g \in V$ e escalares α do corpo \mathbb{R} . Uma aplicação T entre espaços vetoriais qual respeita as duas operações no domínio e no contradomínio é chamada uma transformação linear.

Notações

Comentário 0.0.5 (Números). Vamos trabalhar com os seguintes **números**

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$	naturais
$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	inteiros
$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$	racionais
$\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ “a reta real”	reais
$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ “o plano complexo”	complexos

Com $|\alpha|$ denotamos o absoluto de um número α . Denotamos **intervalos** fechados de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e abertos de $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Usamos os símbolos

\forall “para todos os” \exists “existe um” $\exists!$ “existe um único”

A notação $w := v$ significa que o objeto w é **definido** pelo lado direito v .

Convenções

Cor cinza. Parágrafos e maiores partes de texto em cinza indicam matéria avançada direcionado às turmas A e B do “cursão”, mas não às outras turmas. Palavras individuais em cinza geralmente são nomes ou informações complementares.

Parte I

Teoria dos espaços vetoriais

Capítulo 1

Espaços vetoriais

1.1 Axiomas

Definição 1.1.1. Um **conjunto** X é composto de elementos os quais são dois-a-dois diferentes. Consequentemente

$$\{2, 3\} \cup \{2\} = \{2, 3, 2\} = \{2, 3\} = \{3, 2\} \quad (1.1.1)$$

Um conjunto não é ordenado, por exemplo $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. O conjunto que não contém nenhum elemento é chamado **o conjunto vazio**, símbolo \emptyset . Denotamos de $|X|$ o **número de elementos de um conjunto** quando o número é finito. Neste caso X é chamado de **conjunto finito**.

Um **subconjunto** de um conjunto X é um conjunto A tal que cada um elemento de A é elemento de X , notação $A \subset X$. Observe que conforme esta definição, o conjunto vazio \emptyset é subconjunto de todos conjuntos: para todo conjunto X temos $\emptyset \subset X$.

Definição 1.1.2. O **produto cartesiano** $X \times Y$ de dois conjuntos X e Y é o conjunto de todas listas ordenadas (x, y) dos elementos $x \in X$ e $y \in Y$, ou seja

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Observe que se um fator fica vazio, ou seja $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$, então $X \times Y = \emptyset$.

1.1.1 Grupo

Definição 1.1.3. Um conjunto não-vazio $G \neq \emptyset$ munido de uma operação

$$* : G \times G \rightarrow G, \quad (f, g) \mapsto f * g$$

é chamado um **grupo**, notação $(G, *)$, se valem os três axiomas

1. $f*(g*h) = (f*g)*h$ para todos os elementos $f, g, h \in G$ (associatividade)

2. existe um elemento $e \in G$ tal que (elemento neutro)

$$e * g = g, \quad g * e = g$$

para todos os elementos $g \in G$.

3. para todo $g \in G$ existe um elemento, notação $\bar{g} \in G$, t.q. (inverso)

$$g * \bar{g} = e, \quad \bar{g} * g = e$$

Em palavras,

um grupo é um conjunto não-vazio munido de uma operação associativa, contendo um elemento neutro, e tal que qualquer elemento admite um inverso.

O seguinte lema diz que um grupo G tem exatamente um elemento neutro, notação comum e , e cada um elemento g de G tem exatamente um inverso, notação \bar{g} . Às vezes é comum e útil escrever o elemento neutro na forma 0 ou 1 e os inversos na forma $-g$ ou g^{-1} — veja os dois exemplos em Exercício 1.1.6 a).

Lema 1.1.4. *Seja $(G, *)$ um grupo. Então vale o seguinte.*

- 1) *O elemento neutro é único.*
- 2) *Os elementos inversos são únicos.*
- 3) *Para todos os elementos $f, g, h \in G$ vale:*

- a) $f * g = f * h \Rightarrow g = h$ *(lei da corte)*
- b) $f * g = f \Rightarrow g = e$
- c) $f * g = e \Rightarrow g = \bar{f}$

Note que b) e c) são consequências imediatas de a).

Demonstração. Lema A.1.1. □

Definição 1.1.5. Um grupo $(G, *)$ é chamado de **abeliano** se a ordem dos dois elementos na operação não importa, em símbolos $f * g = g * f$. (comutatividade)

Exercício 1.1.6. Mostre que

- a) são grupos (ainda abelianos): $(\mathbb{Z}, +)$ e (\mathbb{R}, \cdot)
- b) não são grupos: $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{N}_0, +)$ e (\mathbb{Z}, \cdot)
- c) não são grupos abelianos: as matrizes 3×3 e as rotações em \mathbb{R}^3 .

1.1.2 Corpo

Definição 1.1.7. Um conjunto \mathbb{K} munido de duas operações¹

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K} \quad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$$

é chamado um **corpo** se valem os três axiomas

¹ as quais vamos batizar aos nomes “+” e “·” — ainda que *geralmente não tem nada ver com adição e multiplicação de números*, mas esta escolha é motivada pelos exemplos principais (Exemplo 1.1.10) nos quais “+” e “·” são adição e multiplicação de números

1. $(\mathbb{K}, +)$ é um grupo abeliano.
(O elemento neutro seja denotado 0 e $-\alpha$ denota o inverso de $\alpha \in \mathbb{K}$.)
2. $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.
(O elemento neutro seja denotado 1 e α^{-1} denota o inverso de $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.)
3. Distributividade: $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$.
(É costume escrever $\alpha\beta$ em vez de $\alpha \cdot \beta$.)

Para distinguir chamamos o elemento neutro da primeira operação – para a qual temos usado o símbolo “+” ainda que geralmente não tem nada ver com adição de números – o **elemento neutro aditivo**. Chamamos o elemento neutro da segunda operação – motivado pelo uso do símbolo “.” – o **elemento neutro multiplicativo**. Como é feio escrever $\alpha + (-\beta)$ para a soma de um elemento com um elemento inverso aditivo definimos $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$. Isso é uma abreviação só, não é, nem tem diferença. Analogamente simplificamos a notação escrevendo α/β em vez de $\alpha\beta^{-1}$.

Corolário 1.1.8. *Um corpo contém pelo menos dois elementos.*

Demonstração. Pelas axiomas 1 e 2 cada uma operação tem um elemento neutro as quais não podem ser iguais por causa de 2. \square

Lema 1.1.9. *Seja \mathbb{K} um corpo e $0 \in K$ é o elemento neutro da adição. Então $0\beta = 0$ e $\beta 0 = 0$ para todos os elementos $\beta \in \mathbb{K}$.*

Demonstração. Lema A.1.2. \square

Exemplos de corpos

Exemplo 1.1.10. São corpos

- a) $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$
- b) $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ onde as operações são definidas assim

$$\begin{aligned}(a + ib) + (c + id) &:= (a + c) + i(b + d) \\ (a + ib) \cdot (c + id) &:= (ac - bd) + i(bc + ad)\end{aligned}$$

Exercício 1.1.11. Os números inteiros $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ não formam um corpo.

Exemplo 1.1.12 (Adição e multiplicação modulo n). Dado um número natural $n \in \mathbb{N}$, defina no conjunto $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$ as duas operações

$$a +_n b := a + b \pmod{n}, \quad a \cdot_n b := ab \pmod{n}$$

para todos os elementos $a, b \in \mathbb{Z}_n$.²

Fato. $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ é um corpo $\iff n$ é um número primo.

² Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\ell \in \mathbb{Z}$ um número inteiro. Pela definição o elemento $\ell \pmod{n} \in \mathbb{Z}_n$ é o resto $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ que falta depois você “enche” ℓ com múltiplos de n . Em símbolos, $\ell \pmod{n} := r$ onde $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ é o único elemento tal que $\ell = kn + r$ para um $k \in \mathbb{Z}$.

Para valores pequenos de n pode-se checar da mão se \mathbb{Z}_n é um corpo ou não. Só precisa-se calcular as tabelas de adição e de multiplicação. Vamos ilustrar isso num exemplo.

Exemplo 1.1.13 (\mathbb{Z}_4 não é um corpo.). Para checar se $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ e $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{e_{+4}\}, \cdot_4)$ são grupos abelianos é útil calcular as tabelas de adição e de multiplicação.

• $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ é um grupo abeliano? Para responder calculamos os valores na tabela

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

São 4 passos:

1. Determinar o elemento neutro de $+_4$: Checamos se a linha em cima da linha solida horizontal, ou seja a linha 0 1 2 3, tem uma cópia nas linhas embaixo. Sim, tem 0 1 2 3. Neste caso o elemento em frente da cópia é o elemento neutro de $+_4$, certo? No nosso caso $e_{+4} = 0$. Se não tem copia, não tem elemento neutro, então não temos um grupo.
2. Inversos: Na cada dos (neste caso 4) linhas de valores na tabela localiza o elemento neutro 0 (se existir). Então o elemento g em frente da linha de 0 e o elemento em cima da coluna de 0, notação \bar{g} , são inversos um do outro. Caso uma linha nao contem 0, então este g não tem inverso, então não temos um grupo. No nosso caso todo elemento g tem um inverso:

g	\bar{g} (denotado $-g$)
0	0
1	3
2	2
3	1

3. Associatividade: Calculando caso por caso temos que checar se $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$ para todas as possibilidades. No nosso caso vale.
4. Grupo abeliano (comutatividade): Vale se a tabela é simétrica em respeito à diagonal. No nosso caso vale.

Na verdade temos esquecido um passo: No inicio de tudo temos que checar se a operação é bem definida, ou seja os valores da operação (os valores na tabela) realmente são elementos do conjunto, ou não. Olhamos a tabela - sim.

Nosso resultado é que $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ é um grupo abeliano.

• $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$ é um grupo abeliano? Para responder calculamos a tabela

\cdot_4	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

Como o valor 0 não é elemento de $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ a multiplicação \cdot_4 não é uma operação em $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$, então não pode ser um grupo.

Ainda assim vamos repetir os 4 passos para \cdot_4 (em vez de $+_4$) para ver se tem outras falhas ainda. As respostas são:

1. Elemento neutro de \cdot_4 : Tem, é o elemento $e_{\cdot_4} = 1$.
2. Inversos: Na cada dos (neste caso 3) linhas de valores na tabela localizamos o elemento neutro 1 (se existir). No nosso caso

g	\bar{g} (denotado g^{-1})
1	1
2	não tem!
3	3

o elemento 2 não tem um inverso e já por isso não temos um grupo.

3. Associatividade: Ainda que a fórmula $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$ vale, os valores não são todos em $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$.
4. Grupo abeliano (comutatividade): A tabela é simétrica em respeito à diagonal, mas os valores não são todos em $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$.

Nosso resultado é que $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$ não é um grupo abeliano.

Exercício 1.1.14. Seja $n = 6$:

1. Calcule a tabela da adição e da multiplicação no caso \mathbb{Z}_6 .
2. Identifique os elementos neutros da adição e multiplicação em \mathbb{Z}_6 . Eles sempre existem?
3. Para todo $a \in \mathbb{Z}_6$ identifique o elemento inverso aditivo.
4. Para todo $a \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$ identifique o elemento inverso multiplicativo, se existir.
5. Cheque que \mathbb{Z}_6 não é um corpo. Quais dos axiomas não valem?

Matéria avançada

Motivado pelas perguntas da Turma C na 1ª aula 2016-2 vamos dar um exemplo de um corpo onde a primeira operação não está relacionada à adição de números nem a segunda à multiplicação de números.

Exercício 1.1.15 (Corpo (P, \cdot, \circ) onde \cdot não é adição e \circ não é multiplicação). Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a função $p_\alpha : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $x \mapsto x^\alpha$. Seja o conjunto

$$P := \{p_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

composto de todas funções $p_\alpha(x) = x^\alpha$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ e munido das operações

$$\begin{aligned} \cdot : P \times P &\rightarrow P & \circ : P \times P &\rightarrow P \\ (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \cdot p_\beta & (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \circ p_\beta \end{aligned}$$

chamado de **multiplicação**³ e **composição**⁴ de funções, respectivamente. Mostre que:

1. As duas operações são bem definidas: $p_\alpha \cdot p_\beta \in P$ e $p_\alpha \circ p_\beta \in P$, de fato

$$p_\alpha \cdot p_\beta = p_{\alpha+\beta}, \quad p_\alpha \circ p_\beta = p_{\alpha\beta}$$

2. (P, \cdot) é um grupo abeliano com elemento neutro p_0 .
3. $(P \setminus \{p_0\}, \circ)$ é um grupo abeliano com elemento neutro p_1 .
4. Distributividade: $(p_\alpha \cdot p_\beta) \circ p_\gamma = (p_\alpha \circ p_\gamma) \cdot (p_\beta \circ p_\gamma)$, $\forall p_\alpha, p_\beta, p_\gamma \in P$.

1.1.3 Espaço vetorial

Definição 1.1.16. Um **espaço vetorial** E sobre um **corpo** \mathbb{K} ⁵ é um quádruplo $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ composto de um conjunto E , um corpo \mathbb{K} , e duas operações

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E & \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (v, w) &\mapsto v + w & (\alpha, v) &\mapsto \alpha v \end{aligned}$$

chamado de *adição* e *multiplicação escalar*, respectivamente, tal que vale

1. $(E, +)$ é um grupo abeliano.
(O *elemento neutro* é denotado \mathcal{O} e chamado o **vetor nulo**.)
2. Distributividade:
$$\begin{cases} (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \\ \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \end{cases}$$
3. Compatibilidade:
$$\begin{cases} (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \\ 1v = v \end{cases}$$

Onde as identidades tem que ser válidas para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e todos $v, w \in E$. Chama-se **escalares** os elementos do corpo \mathbb{K} e **vetores** os elementos de E .

Lema 1.1.17. *Seja $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ um espaço vetorial e $0 \in \mathbb{K}$ e $\mathcal{O} \in E$, então:*

- (i) $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ para todos os escalares $\alpha \in \mathbb{K}$.
- (ii) $0v = \mathcal{O}$ para todos os vetores $v \in E$.
- (iii) Para todo o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo o vetor $w \in E$ são equivalentes:

$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O} \quad (1.1.2)$$

Demonstração. Lema A.1.3. □

³ $(p_\alpha \cdot p_\beta)(x) := p_\alpha(x) \cdot p_\beta(x)$

⁴ $(p_\alpha \circ p_\beta)(x) := p_\alpha(p_\beta(x))$

⁵ fala-se abreviando “ E é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} ” ou ainda “ E é um espaço vetorial”.

Corolário 1.1.18 (Compatibilidade dos inversos aditivos com multiplicação).
Para todo o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo o vetor $w \in E$ vale:

a) $(-\alpha)w = -(\alpha w)$

b) $\alpha(-w) = -(\alpha w)$

Demonstração. Corolário A.1.4.

□

Aula 2

1.2 Exemplos de espaços vetoriais

Exemplo 1.2.1 (O espaço vetorial trivial $\{\mathcal{O}\}$). Seja E um conjunto com 1 elemento só. Vamos já denotar aquele elemento com o símbolo \mathcal{O} (porque?). Então $E = \{\mathcal{O}\}$. Seja \mathbb{K} um corpo qualquer. Não tem escolha nenhuma para definir as duas operações

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E & \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\mathcal{O}, \mathcal{O}) &\mapsto \mathcal{O} & (\alpha, \mathcal{O}) &\mapsto \mathcal{O} \end{aligned}$$

Então $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ satisfaz os axiomas de um espaço vetorial, denotado simplesmente $E = \{\mathcal{O}\}$ e chamado de **espaço vetorial trivial**.

Exemplo 1.2.2 (Um corpo \mathbb{K} como um espaço vetorial sobre \mathbb{K}). Usa-se as duas operações chegando com o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ como as duas operações necessárias para tornar um conjunto, escolhemos $E := \mathbb{K}$, num espaço vetorial sobre um corpo, escolhemos \mathbb{K} . Com efeito $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K})$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} .

1.2.1 Listas ordenadas

Exemplo 1.2.3 (O espaço vetorial \mathbb{R}^n sobre \mathbb{R}). Seja

$$\mathbb{R}^n := \{u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto de todas as listas ordenadas de n números reais. Chamamos α_i o i -ésimo membro da lista. As duas operações

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n & \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

são definidas como adição membro-por-membro e multiplicação de todos membros com um escalar $\beta \in \mathbb{R}$. Checando todos axiomas vê-se que \mathbb{R}^n é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais, notação $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ ou \mathbb{R}^n só. O vetor nulo, também chamado de **origem**, é a lista

$$\mathcal{O} = (0, \dots, 0)$$

e o inverso de um elemento $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é a lista $(-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)$ a qual denotamos com o símbolo $-u$.

O **i -ésimo vetor canônico** é a lista de n membros

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

cujos i -ésimo membro é o número 1 e todos outros são nulo 0. O conjunto

$$\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\} \tag{1.2.1}$$

de todos os vetores canônicos é chamado de **base canônica** de \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.2.4 (O espaço vetorial \mathbb{R}^∞ sobre \mathbb{R}). O conjunto

$$\mathbb{R}^\infty := \{u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \in \mathbb{R}\}$$

de todas as sequências reais é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} sob adição e multiplicação membro-por-membro como no exemplo prévio, notação $(\mathbb{R}^\infty, +, \cdot, \mathbb{R})$.

Comentário 1.2.5 (\mathbb{K}^n e \mathbb{K}^∞). Os espaços vetoriais \mathbb{K}^n e \mathbb{K}^∞ sobre qualquer corpo \mathbb{K} são definidos analogamente Exemplos 1.2.3 e 1.2.4.

1.2.2 Matrizes

Exemplo 1.2.6 (Espaço vetorial das matrizes $m \times n$). O espaço vetorial das matrizes $m \times n$ sobre um corpo \mathbb{K} é o conjunto

$$M(m \times n; \mathbb{K}) := \left\{ \mathbf{a} = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \right\}$$

onde a matriz $\mathbf{a} = (a_{ij})$ é o quadro de escalares com m linhas e n colunas ⁶

$$\mathbf{a} = (a_{ij}) := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

munido com a adição (entrada por entrada)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (c_{ij}), \quad c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

e a multiplicação escalar (entrada por entrada)

$$\beta \mathbf{a} = \beta (a_{ij}) := (c_{ij}), \quad c_{ij} := \beta a_{ij}$$

para qualquer escalar $\beta \in \mathbb{K}$. Uma **matriz quadrada** é uma matriz $n \times n$.

O vetor nulo é a matriz nula $\mathbf{0}$ cujas entradas são todas o escalar nulo $0 \in \mathbb{K}$. O elemento inverso aditivo, notação $-\mathbf{a}$, de uma matriz $\mathbf{a} = (a_{ij})$ tem como entradas os inversos aditivos dos a_{ij} , notação $-a_{ij}$.

No caso do corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ usamos a notação $M(m \times n) := M(m \times n; \mathbb{R})$ para o **espaço vetorial dos matrizes reais $m \times n$** .

Definição 1.2.7 (Linhas e colunas de uma matriz). Seja $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in M(m \times n)$ uma matriz $m \times n$. Note-se que o primeiro índice i de uma entrada a_{ij} indica a linha e o segundo j a coluna dela. Tendo isso na vista vamos denotar a **k -ésima coluna**, respectivamente a **ℓ -ésima linha**, de uma matriz \mathbf{a} com os símbolos

$$\mathbf{a}_{\bullet k} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{\ell \bullet} = [a_{\ell 1} \quad \dots \quad a_{\ell m}]$$

⁶Os escalares a_{ij} são chamadas as **entradas da matriz**. Observe que a entrada a_{ij} está localizada na i -ésima linha e j -ésima coluna.

Temos escolhido o símbolo \bullet para sugerir “este índice é aberto” – ele corre e assim gera uma lista, ou vertical ou horizontal dependendo se \bullet fica no primeiro ou no segundo lugar. Assim podemos escrever a matriz \mathbf{a} nas formas seguintes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\bullet} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\bullet} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_{\bullet 1} \quad \dots \quad \mathbf{a}_{\bullet n}]$$

1.2.3 Funções e polinômios

Exercício 1.2.8. Dado um conjunto não-vazio $X \neq \emptyset$ e um corpo \mathbb{K} , seja

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) := \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ função}\}$$

o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{K}$. Adição de funções e multiplicação com um escalar são definidas assim

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

para todos os $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostre que $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} .

Comentário 1.2.9. A próxima observação ilustra o poder da matemática e um *ponto fundamental* dela - economizar através de abstração e *encontrar o certo ponto da vista*.

Observação 1.2.10.

- a) Se $X = \{1, \dots, n\}$, então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$.
- b) Se $X = \mathbb{N}$, então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^\infty$.
- c) Se $X = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$, então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = M(m \times n)$.

Exercício 1.2.11 (Polinômios $\mathcal{P}(\mathbb{K})$). Dados escalares $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, então chama-se uma soma finita

$$p = p(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$$

de **polinômio** na variável $x \in \mathbb{K}$ e, no caso $\alpha_n \neq 0$, de **grau** n . Forneça o conjunto dos polinômios com uma estrutura de um espaço vetorial $(\mathcal{P}(\mathbb{K}), +, \cdot, \mathbb{K})$.

1.2.4 Excurso: Escalonamento de matrizes

Definição 1.2.12 (Operações elementares). Pode-se aplicar para as linhas de uma matriz três tipos de operações, as chamadas **operações elementares**:

- (oe1) \downarrow trocar duas linhas
- (oe2) multiplicar uma linha com um escalar α
- (oe3) \downarrow adicionar uma linha para uma outra

Processo de escalonamento

Chama-se uma matriz **escalonada** se em cada linha o primeiro elemento não-nulo está à esquerda do primeiro elemento não-nulo da próxima linha. Exemplos

$$\text{escalonadas: } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{não é: } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Numa matriz *escalonada* os primeiros elementos não-nulos das linhas são chamados de **pivôs** da matriz escalonada.

Definição 1.2.13. Uma matriz pode ser transformada numa matriz escalonada aplicando operações elementares. O processo é repetir os três passos seguintes:

1. Localiza a primeira coluna não-nula e nela o primeiro elemento não-nulo, dizemos a . Troca a linha de a e a primeira linha.
2. Embaixo de a anulamos todo elemento não-nulo, dizemos b : Multiplica a linha de b com $-a/b$, depois adiciona a linha de a . Continue até todos elementos embaixo de a são nulos.
3. Esqueça a linha e a coluna de a e trata a matriz reduzida começando de novo com passo 1.

O processo de escalonar uma matriz \mathbf{a} termina com uma matriz escalonada a qual denotamos de \mathbf{a}_{esc} .

Exemplo 1.2.14. Ilustramos o escalonamento. Seja L_i a i -ésima linha.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{1. \\ L1 \leftrightarrow L2}]{L1 \leftrightarrow L2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{2. \\ -\frac{2}{4}L3}]{-\frac{2}{4}L3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{2. na L3 \\ adic. L1}]{2. na L3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{3. esq. linha \\ e col. de 2}]{3. esq. linha} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e agora começamos de novo com passo 1 tratando a matriz reduzida

$$\xrightarrow[\substack{1. \\ L2 \leftrightarrow L3}]{L2 \leftrightarrow L3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{2. \\ -\frac{2}{1}L3}]{-\frac{2}{1}L3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{2. na L3 \\ adic. L2}]{2. na L3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicação: Sistemas lineares

Seja \mathbf{a} uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$ uma lista ordenada com m membros. Agora adiciona para as n colunas de \mathbf{a} a lista b como a $(n+1)$ -ésima coluna para obter a chamada **matriz aumentada**, notação

$$[\mathbf{a} : b] := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Definição 1.2.15. Suponha a matriz \mathbf{a} e a lista b são dadas. Então queremos saber se existe uma solução $x = (x_1, \dots, x_n)$ da equação $\mathbf{a}x = b$, ou seja do **sistema linear (SL) de m equações a n incógnitas**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.2.2)$$

É útil chamar a matriz aumentada $[\mathbf{a} : b]$ o **sistema linear** definido por (1.2.2). A lista $b = (b_1, \dots, b_m)$ é chamada de **inogeneidade** do sistema linear. O caso $b = \mathcal{O} = (0, \dots, 0)$ chama-se de **sistema linear homogêneo (SLH)**.

O sistema linear pode ser escrito equivalentemente na forma

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

O lado esquerdo é um exemplo de uma chamada “combinação linear” das colunas da matriz \mathbf{a} representando o vetor b – um conceito fundamental o qual vamos tratar no próximo parágrafo.

Comentário 1.2.16. Note-se que o lado esquerdo de (1.2.3) corre sobre toda a imagem da matriz \mathbf{a} se variamos x sobre todas as listas. Então um SL $[\mathbf{a} : b]$ tem uma solução se e somente se a lista b é elemento da imagem da matriz \mathbf{a} .

Lembramos do curso MA141 “Geometria Analítica” o seguinte

Teorema 1.2.17. *Uma lista x é solução do sistema linear $[\mathbf{a} : b]$ se e somente se x é solução do sistema linear associado à matriz escalonada $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}}$.*

Exemplo 1.2.18 (Resolução de um sistema linear usando escalonamento). Para encontrar as soluções $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ do sistema linear

$$\begin{cases} y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x - 2z = 0 \end{cases}$$

primeiro, formamos a matriz aumentada $[\mathbf{a} : b]$ onde $b = (0, 0, 0) =: \mathcal{O}$, segundo, escalonamos ela, e terceiro, **resolvemos “de baixo para cima”**. Segundo Teorema 1.2.17 uma solução de $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}}$ também resolve $[\mathbf{a} : b]$, e vice versa.

Exemplo 1.2.14 mostra as matrizes \mathbf{a} e \mathbf{a}_{esc} . Note-se que no caso especial quando um sistema linear é *homogêneo*, ou seja $b = \mathcal{O}$, vale a fórmula seguinte

$$[\mathbf{a} : \mathcal{O}]_{\text{esc}} = [\mathbf{a}_{\text{esc}} : \mathcal{O}]$$

No nosso caso o lado direito desta fórmula representa o SLH

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Resolução “de baixo para cima”:

LINHA 3. Começamos embaixo com a última linha $0x + 0y + 0z = 0$ a qual não representa nenhuma restrição para x, y, z .

LINHA 2. Progredimos para cima, ou seja para a linha dois $y + 2z = 0$. Escolha uma variável para ser a variável dependente da(s) outra(s) variáveis, as quais variam livremente no corpo. No nosso caso só tem uma outra e o corpo é \mathbb{R} . Escolhemos por exemplo como variável dependente $y = y(z) = -2z$ como função da variável z a qual varia livremente sobre os números reais, ou seja $z \in \mathbb{R}$.

LINHA 1. Progredimos para cima, ou seja para a primeira linha

$$0 = 2x + y(z) + z = 2x - 2z + z = 2x - z$$

lembrando que $z \in \mathbb{R}$ é livre. Então $x = x(z) = \frac{1}{2}z$ para qualquer $z \in \mathbb{R}$.

Conclusão. Toda solução do SL é da forma

$$\begin{bmatrix} x(z) \\ y(z) \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}z \\ -2z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde $z \in \mathbb{R}$ é um número real arbitrário. Então o SL não tem só uma solução – tem uma para cada um número real z . Isso conclui o Exemplo 1.2.18.

Comentário 1.2.19 (Corpos gerais \mathbb{K}). As construções nesta Seção 1.2.4 para matrizes e listas cujas entradas são elementos do corpo \mathbb{R} funcionam do mesmo jeito para matrizes com entradas num corpo geral \mathbb{K} .

1.3 Independência linear

1.3.1 Combinação linear

Depois da aula 3 foram adicionadas ou modificadas as **partes em marrom**:

Definição 1.3.1. Seja E um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} e $X \subset E$ um subconjunto. Uma **combinação linear estrita (CLe) em X** é uma soma *finita*

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell}_{=: w \in E} \tag{1.3.1}$$

de vetores $v_1, \dots, v_\ell \in X \setminus \{\mathcal{O}\}$ *dois-a-dois diferentes* e escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, vetores e escalares todos não-nulos.⁷

A palavra mais importante em cima é “finita”. Ainda que os vetores v_1, \dots, v_ℓ em (1.3.1) são elementos do conjunto X , a soma deles não necessariamente encontra-se mais em X . Encontra-se sim, quando X é um chamado “subespaço” (Lema 2.1.2).

⁷ Permitindo \mathcal{O} e 0, ou não, não faz nenhuma diferença para os valores de (1.3.1). Então permitir é desnecessário, mas na matemática a desnecessidade é o **inimigo da clareza**. Temos adicionado o adjetivo ‘estrito’ porque a terminologia ‘combinação linear’ já é ocupada.

Definição 1.3.2. Como encontra-se frequentemente somas finitas gerais

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell, \quad \alpha_j \in \mathbb{K}, \quad v_j \in E$$

vamos chamar tal de **combinação linear (CL)** como é costume na literatura. Dizemos que

“A CL dos vetores v_1, \dots, v_ℓ representa o vetor w .”

ou

“O vetor w é CL dos vetores v_1, \dots, v_ℓ .”

Exercício 1.3.3. Seja $X \subset E$ não vazio, mostre que são conjuntos iguais

$$\begin{aligned} & \{\text{todas as combinações lineares em } X\} \cup \{\mathcal{O}\} \\ &= \{\text{todas as combinações lineares generalizadas em } X\} \end{aligned}$$

Definição 1.3.4. Por definição a frase

“**combinação linear dos vetores u, v, \dots** ”

significa

“*combinação linear no conjunto $\{u, v, \dots\}$* ”

A diferença é que assim *não precisamos usar todos os vetores*. (O que elimina qualquer necessidade de colocar o escalar 0 em frente dos não necessários.)

Comentário 1.3.5 (Conceitos adicionados ou redefinidos depois da aula 3).

- CL: Vetores e escalares nulos não são permitidos, nem repetições de vetores. São permitidos numa CL.
- $\langle X \rangle$: Temos adicionado \mathcal{O} na Definição 2.2.1. Assim \emptyset gera $\{\mathcal{O}\}$.

Exercício 1.3.6. a) Caso possível escreva o vetor $b = (1, -3, 10)$ como combinação linear dos vetores $u = (2, -3, 5)$, $v = (1, 1, 0)$, e $w = (1, 0, 0)$.

b) Sejam $u = (1, 1)$, $v = (1, 2)$ e $w = (2, 1)$. Encontre números a, b, c e α, β, γ todos não-nulos, tais que

$$au + bv + cw = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

com $a \neq \alpha$, $b \neq \beta$ e $c \neq \gamma$.

[Dica: a) Determinar os coeficientes α, β, γ na CL de u, v, w a qual representa b lida a um SL. Escalonamento.⁸

b) Defina $x = a - \alpha$, $y = b - \beta$, e $z = c - \gamma$ para obter um SLH. Resolva.]⁹

⁸ encontre “o certo ponto da vista” (Comentário 1.2.9) e o SL vai chegar já escalonada..

⁹ Respostas para seu controle: a) $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, -6)$. b) $(x, y, z) = z(-3, 1, 1)$. Escolha um $z \neq 0$, por exemplo $z = 1$. Então $(a, b, c) = (\alpha - 3, 1 + \beta, 1 + \gamma)$. Toda escolha de reais $\alpha \neq 0, 3$ e $\beta, \gamma \neq 0, -1$ dá uma solução. A escolha $\alpha = 5$ e $\beta = \gamma = 1$ resulta em $a = b = c = 2$.

Aula 3

1.3.2 Independência linear

Definição 1.3.7 (Independência linear). Um subconjunto X de um espaço vetorial E é dito de **conjunto linearmente independente (LI)** se não existe nenhuma combinação linear estrita (CLE) em X representando o vetor nulo. Caso existisse, o X é chamado de **conjunto linearmente dependente (LD)**.

Nas outras palavras, chama-se $X \subset E$ de **conjunto LI** se

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell = \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_\ell = 0 \quad (1.3.2)$$

para toda escolha (finita) de vetores $v_1, \dots, v_\ell \in X$ *dois-a-dois diferentes*.¹⁰

Comentário 1.3.8.

- (i) O conjunto vazio \emptyset é LI: Com efeito, como não contem elementos, não admite nenhuma CL. Chama-se tal argumentação de **verdade vazia**.
- (ii) Um conjunto $X = \{v\}$, contendo só um vetor, é LI se e somente se $v \neq \mathcal{O}$.
- (iii) Se (1.3.2) vale para uma escolha v_1, \dots, v_ℓ , então vale para qualquer sub-escolha destes vetores. [Use os coeficientes $\alpha_i = 0$ nos restantes.]

Para provar a afirmação (ii), lembra (1.1.2).

Lema 1.3.9. *Seja X um subconjunto de um espaço vetorial E .*

- a) $\mathcal{O} \in X \Rightarrow X$ LD. *(O vetor nulo rende conjuntos LD)*
- b) *Todo subconjunto A de um conjunto LI X é LI.*

Demonstração. a) O termo $1\mathcal{O}$ é uma CLE em X representando o vetor nulo (segundo Lema 1.1.17). b) Os elementos de A são elementos de X – para as quais (1.3.2) vale pela hipótese. \square

Exemplo 1.3.10. Para saber se o subconjunto $X := \{(1, 0), (2, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 é LI temos que checar (1.3.2) para todas escolhas finitas de elementos v_i de X dois-a-dois diferentes. Como X é um conjunto finito, e tendo em vista Comentário 1.3.8 (iii), começamos com a escolha máxima, ou seja todos os (dois) elementos. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Conforme (1.3.2) suponhamos a primeira igualdade

$$(0, 0) = \alpha(1, 0) + \beta(2, 1) = (\alpha + 2\beta, \beta)$$

e recebemos a segunda igualdade pelas regras de multiplicação escalar e adição de vetores de \mathbb{R}^2 . Comparando os segundos membros vemos que $0 = \beta$ o qual usamos na comparação dos primeiros membros: recebemos $0 = \alpha + 2 \cdot 0 = \alpha$. Assim temos provado que ambos os coeficientes α e β são nulos. Então X é LI.

Exercício 1.3.11. Quais dos seguintes conjuntos X_i de vetores de \mathbb{R}^2 são ou não são conjuntos linearmente independentes (LI)? Explique porque são ou não são.

1. Elementos de X_1 : os vetores $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

¹⁰ Para que precisa-se a condição *dois-a-dois diferentes*?

2. $X_2 := \{(2, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 2)\}$.
3. Escolha dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$. Então defina $X_3 := \{u, v, (1, 1)\}$.

Exercício 1.3.12. Prove as afirmações seguintes.

1. A base canônica \mathcal{E}^n , veja (1.2.1), é um conjunto LI no \mathbb{R}^n .
2. Suponha $u, v \in \mathbb{K}^2$ não são múltiplos um do outro. Prove que o conjunto $\{u, v\}$ é LI.
[Dica: Seja $\alpha u + \beta v = \mathcal{O}$. Considere $\beta \neq 0$ e, lembrando (1.1.2), $\beta = 0$.]
3. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ vetores de \mathbb{R}^n . Prove que um deles é múltiplo do outro se, e somente se, para todo $i, j = 1, \dots, n$ temos $x_i y_j = x_j y_i$.
4. O subconjunto $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subset M(2 \times 2)$ composto das matrizes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é um conjunto LI.

5. O conjunto X composto dos três polinômios

$$p = p(x) = x^3 - 5x^2 + 1$$

$$q = q(x) = 2x^4 + 5x - 6$$

$$r = r(x) = x^2 - 5x + 2$$

é um conjunto LI no espaço vetorial $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios.

6. Se o conjunto de vetores $\{v_1, \dots, v_m\}$ é LI, prove que o mesmo se dá com o conjunto $\{v_1, v_2 - v_1, \dots, v_m - v_1\}$. Vale a recíproca?

Capítulo 2

Subespaços

Subespaços de um espaço vetorial E são subconjuntos F as quais são invariante pelas duas operações chegando com E . Assim faz sentido restringir as duas operações a F . Munidos das restrições F torna-se um espaço vetorial mesmo.

2.1 Definição e exemplos

Definição 2.1.1. Um subconjunto $F \subset E$ de um espaço vetorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ é chamado de **subespaço** se é **fechado sob as duas operações**, ou seja

$$(i) \quad u, v \in F \Rightarrow u + v \in F \quad (F \text{ é fechado sob adição})$$

$$(ii) \quad \alpha \in \mathbb{K}, u \in F \Rightarrow \alpha u \in F \quad (F \text{ é fechado sob multiplicação escalar})$$

Lema 2.1.2. *Seja F um subespaço de um espaço vetorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$. Então*

$$a) \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}, v_1, \dots, v_k \in F \Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \in F \quad (\text{fechado sob CL})$$

b) F é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} onde as duas operações são aquelas de E restrito ao subconjunto $F \subset E$. (subespaços são espaços vetoriais)

Demonstração. a) Indução. b) As restrições tomam valores em F segundo parte a) e as axiomas valem como os elementos de F são elementos de E para as quais os axiomas valem pela hipótese que E é um espaço vetorial. \square

Exercício 2.1.3 (Vetor nulo). O vetor nulo de um subespaço F é o vetor nulo \mathcal{O} do espaço vetorial ambiente. [Dica: Mostre $\mathcal{O} \in F$. O vetor nulo de F é único.]

Checar se um subconjunto $F \subset E$ é um espaço vetorial é bastante trabalhoso dado os muitos axiomas. Isso mostra o valor alto da parte b) do lema dizendo que é suficiente checar “fechado sob as duas operações” – tarefa rapidinha.

Exercício 2.1.4. Mostre que são subespaços de um espaço vetorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$:

$$a) \quad F := \{\mathcal{O}\} \quad (\text{o subespaço mínimo / trivial})$$

- a) $F := E$ (o subespaço máximo)
 b) $\mathbb{K}v := \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ (a reta passando v e a origem \mathcal{O})
 onde v é um vetor não-nulo de E . Observe que $\mathbb{K}\mathcal{O} = \{\mathcal{O}\}$ é um ponto só.

Exemplo 2.1.5 (O subespaço \mathbb{R}_0^∞ de \mathbb{R}^∞). O subconjunto $\mathbb{R}_0^\infty \subset \mathbb{R}^\infty$, composto de todas sequências reais tal que só um número finito de membros são não-nulos, é um espaço vetorial: Se a lista u tem k membros não-nulos e v tem ℓ , então (i) $u + v$ tem no máximo $k + \ell$ e (ii) αu tem no máximo k .

Exercício 2.1.6 (Espaços vetoriais de funções). O conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R}) := \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ das funções reais é um espaço vetorial sob adição e multiplicação com constantes $\alpha \in \mathbb{R}$, veja Exercício 1.2.8. Para $n \in \mathbb{N}_0$ seja

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) := \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto dos **polinômios reais do grau menor ou igual n** e $\mathcal{P}(\mathbb{R}) := \bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os **polinômios reais**. Seja

$$C^0(\mathbb{R}) := C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$$

o conjunto das **funções contínuas**. Para $k \in \mathbb{N}$ seja $C^k(\mathbb{R}) := C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o conjunto das **funções k vezes continuamente diferenciáveis**. Chama-se

$$C^\infty(\mathbb{R}) := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\mathbb{R})$$

o conjunto das **funções suaves**. Sejam $n \in \mathbb{N}_0$ e $k \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^k(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

são subespaços do espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ do Exercício 1.2.8. Segundo parte b) do Lema 2.1.2 todos estes conjuntos são espaços vetoriais sob adição de funções e multiplicação com constantes.

Exemplo 2.1.7 (Hiperplanos no \mathbb{R}^n). Dada uma lista $\alpha \in \mathbb{R}^n$, o subconjunto

$$H_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\}$$

é um subespaço de \mathbb{R}^n . O vetor nulo lida ao subespaço máximo $H_\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$. No caso não-nulo $\alpha \neq \mathcal{O}$ chama-se H_α de **hiperplano** no \mathbb{R}^n passando a origem \mathcal{O} .

Lema 2.1.8 (Conjunto de subespaços é fechado sob interseções). *Cada interseção $F := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ de subespaços F_λ de um espaço vetorial E é um subespaço.*

Demonstração. Dado $u, v \in F := \bigcap_{\lambda} F_\lambda$, ou seja $u, v \in F_\lambda \forall \lambda$. Como subespaço cada um F_λ é fechado sob adição, ou seja $u + v \in F_\lambda$ para todos os $\lambda \in \Lambda$. Em símbolos $u + v \in \bigcap_{\lambda} F_\lambda =: F$. Analogamente F é fechado sob mult. escalar. \square

- (i) $X \subset \langle X \rangle$ (contido no subespaço gerado)
- (ii) $Y \subset X \Rightarrow \langle Y \rangle \subset \langle X \rangle$ (naturalidade sob inclusão)
- (iii) $F \subset E$ subespaço $\Rightarrow \langle F \rangle = F$ (não muda subespaços)
- (iv) Um subespaço $F \subset E$ contendo X contém $\langle X \rangle$. (respeita subespaços)

Demonstração. (i) Seja $v \in X$, então $v \stackrel{(\text{comp.})}{=} 1v \in \langle X \rangle$. (ii) Como $Y \subset X$, CLe's em Y são CLe's em X . (iii) Igualdade é consequência das duas inclusões $F \subset \langle F \rangle \subset F$, onde a primeira é (i) e para a segunda usamos que os elementos de $\langle F \rangle$ são CL's em F , mas um subespaço é fechado sob CL's segundo Lema 2.1.2 a). (iv) Com efeito $F \stackrel{(\text{iii})}{=} \langle F \rangle \stackrel{(\text{ii})}{\supset} \langle X \rangle$. \square

Lema 2.2.4. *Todo subconjunto LI $\{u, v\} \subset \mathbb{R}^2$ de dois elementos já gera \mathbb{R}^2 .*

Demonstração. Lema A.2.1. \square

Lema 2.2.5 (Os subespaços de \mathbb{R}^2). $\{\mathcal{O}\}, \mathbb{R}^2$, e as retas passando a origem.

Demonstração. '⊃' Exercício 2.1.4. '⊂' Seja F um subespaço de \mathbb{R}^2 . Caso $F = \{\mathcal{O}\}$, pronto. Caso contrario existe $u \in F$ não-nulo. Se os demais $f \in F$ são múltiplos de u temos $F = \mathbb{R}u$, pronto. Caso contrario existe um $v \in F$, não múltiplo de u . Então $\{u, v\}$ é LI segundo Exercício 1.3.12 parte 2. Mas neste caso segundo Lema 2.2.4 e Lema 2.2.3 (iv) obtemos $\mathbb{R}^2 = \langle \{u, v\} \rangle \subset F \subset \mathbb{R}^2$. \square

Exemplo 2.2.6 (Os espaços $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^\infty, \mathbb{R}^\infty$).

- a) A base canônica $\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$, veja (1.2.1), gera \mathbb{R}^n . Com efeito

$$\mathbb{R}^n \ni v = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A base canônica $\mathcal{E}^0 := \emptyset$ gera o subespaço vetorial trivial $\{0\} =: \mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}$.

- b) Dado $i \in \mathbb{N}$, a seqüência com todos membros nulos exceto o i -ésimo qual é 1 denotamos também de e_i . A **base canônica** $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$ gera \mathbb{R}_0^∞ .
- c) A base canônica \mathcal{E}^∞ não gera \mathbb{R}^∞ : Uma CLe deve ser uma soma *finita*, tente escrever a seqüência cujos membros são todos 1 como uma CL.

Exemplo 2.2.7 (Polinômios). O conjunto de **monômios** $\{x^0, x, x^2, \dots, x^n\}$ onde $x^0 := 1$ gera $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Todos os monômios $\{1, x, x^2, \dots\}$ geram $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exemplo 2.2.8 (Sistemas lineares). Dado um sistema linear $[\mathbf{a} : b]$ onde \mathbf{a} é uma matriz $m \times n$. Sabemos de (1.2.3) que existe uma solução x se e somente se a lista b é CL das colunas da matriz \mathbf{a} . Consequentemente se as colunas de \mathbf{a} formam um conjunto de geradores de \mathbb{R}^m , então para cada uma inomogeneidade $b \in \mathbb{R}^m$ o SL admite uma solução.

Aula 4

2.3 Soma direta

Definição 2.3.1 (Soma de subconjuntos). A soma de subconjuntos X e Y de um espaço vetorial E é o conjunto de todas as somas

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\} \subset E$$

Em vez de $\{u\} + Y$ escreve-se $u + Y$ e chama-se **a translação de Y por u** .

Lema 2.3.2. A soma de dois subespaços é gerado da união deles, em símbolos

$$F, G \subset E \text{ subespaços} \Rightarrow F + G = \langle F \cup G \rangle$$

Particularmente, a soma de dois subespaços é um subespaço mesmo.

Demonstração. Para provar igualdade de dois conjuntos prova-se as duas inclusões. ' \subset ' Os elementos de $F + G$ são CL's da forma especial $f + g$ enquanto $\langle F \cup G \rangle$ contem todas as CL's em $F \cup G$.

' \supset ' Pegue um elemento h de $\langle F \cup G \rangle$ e use comutatividade para re-escrever a soma finita com os somandos em F no frente e depois aqueles em G . Assim recebemos um elemento, igual h , em $F + G$. \square

Definição 2.3.3 (Soma direta de subespaços). Sejam $F_1, F_2 \subset E$ subespaços de um espaço vetorial E . No caso da interseção trivial $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$ escreve-se $F_1 \oplus F_2$ em vez de $F_1 + F_2$ e chama-se **soma direta dos subespaços F_1 e F_2** .

O símbolo $F \oplus G$ é simplesmente uma abreviação para duas informações, com efeito

$$F \oplus G = H \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{\mathcal{O}\} \\ F + G = H \end{cases}$$

Use-se a soma direta para decompor um vetor unicamente em componentes.

Teorema 2.3.4. Sejam $F_1, F_2 \subset F$ três subespaços de um espaço vetorial E :

$$F = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow \forall f \in F, \exists! f_1 \in F_1, f_2 \in F_2 \text{ tal que } f = f_1 + f_2$$

Demonstração. Teorema A.2.2. \square

Exercício 2.3.5. No espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ das funções $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sejam

$$F_1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ que se anulam em todos os pontos do intervalo } [0,1]\}$$

$$F_2 = \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ que se anulam em todos os pontos do intervalo } [2,3]\}$$

Mostre que F_1 e F_2 são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, que $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = F_1 + F_2$, mas não se tem $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_2$.

Exercício 2.3.6. Verdadeiro ou falso? Para todos subconjuntos $X, Y \subset E$ vale

$$(i) \quad \langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$$

$$(ii) \quad \langle X \cap Y \rangle = \langle X \rangle \cap \langle Y \rangle$$

Exercício 2.3.7. Uma matriz quadrada $\mathbf{a} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ chama-se

simétrica se $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$ **anti-simétrica** se $a_{ij} = -a_{ji} \forall i, j$

Prove que a) o conjunto $\mathcal{S} = \mathcal{S}(n)$ das matrizes simétricas $n \times n$ e o conjunto $\mathcal{A} = \mathcal{A}(n)$ das anti-simétricas são subespaços de $M(n \times n; \mathbb{K})$ e b) que

$$M(n \times n; \mathbb{K}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

[Dica: b) Considere as duas matrizes $\mathbf{a}^{\pm} := \frac{1}{2}(\mathbf{a} \pm \mathbf{a}^T)$.]

Capítulo 3

Bases

Durante o Capítulo 3 denotamos de E um espaço vetorial

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K})$$

sobre um corpo \mathbb{K} .

Bases de um espaço vetorial E são subconjuntos LI as quais geram E no sentido que todo vetor de E pode ser escrito como combinação linear (CL) dos elementos da base. Os coeficientes escalares na CL são únicos (propriedade LI) e chamados de coordenadas de um vetor em respeito à base. Quando E admite uma base finita de n elementos chama-se n a dimensão de E . Se escolhermos uma outra base, recebemos uma outra dimensão? Veremos na Seção 3.1.2 que não: Se E admite uma base finita todas as bases tem o mesmo número de elementos.

Então bases são LI, contem suficientemente muitos elementos para que todo vetor pode ser escrito como CL deles, e na dimensão finita bases ainda são conjuntos máximos no sentido que só adicionando mais um outro vetor já recebe-se um conjunto LD.

3.1 Definição e exemplos

Teorema 3.1.1. *Seja $X \subset E$ um subconjunto tal que $|X| \geq 2$. Então*

- a) X é LI \Leftrightarrow nenhum elemento de X é CL de outros elementos de X
- b) X é LD \Leftrightarrow existe um elemento de X que é CL de outros elementos de X

Demonstração. a) ' \Rightarrow ' Seja X LI, suponha por absurdo que um elemento $u \in X$ fosse CL $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ de outros elementos v_j (tem outros como $|X| \geq 2$). Adicionando $-u$ em ambos lados obtemos $\mathcal{O} = (-1)u + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$. Como $-1 \neq 0$ todos coeficientes são não-nulos, trata-se de uma CLe em X representando o vetor nulo. Assim X é LD. Contradição.

' \Leftarrow ' Suponhamos por absurdo X fosse LD. Então existe uma CLe em X

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \mathcal{O}$$

representando o vetor nulo. Caso $k = 1$. Então $\alpha_1 v_1 = \mathcal{O}$ e assim $v_1 = \alpha_1^{-1} \mathcal{O} = \mathcal{O}$. Contradição. Caso $k \geq 2$. Então $v_1 = -\alpha_1^{-1} \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_1^{-1} \alpha_k v_k$ é CL de outros elementos de X . Contradição. b) é equivalente à parte a). \square

Corolário 3.1.2 (Unicidade dos coeficientes de CL's em conjuntos LI). *Seja $\{v_1, \dots, v_k\}$ um subconjunto LI de E , então*

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_k = \beta_k$$

Em palavras, se duas CL's num conjunto LI representam o mesmo vetor, então os coeficientes escalares coincidem.

Demonstração. $\alpha_1 - \beta_1 = 0$: Suponha por absurdo $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$. Então o vetor

$$v_1 = (\alpha_1 - \beta_1)^{-1} ((\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_k - \beta_k)v_k)$$

é CL de outros elementos. Contradição. Análogo para os outros $\alpha_j - \beta_j$.

Outro argumento (usando LI): Pela hipótese $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_k - \beta_k)v_k = \mathcal{O}$. LI diz que todos coeficientes são nulos. \square

Podemos supor que $\alpha_j \neq \beta_j$ para cada um j , no caso contrário adiciona $-\alpha_j v_j$ em ambos lados da hipótese para eliminar os dois j -ésimos termos.

Lema 3.1.3.

- a) Um subconjunto Y de um conjunto LI X é LI. (Subconjuntos herdam LI)
- b) Um conjunto X contendo um Y LD é LD. (Superconjuntos herdam LD)
- c) Um subconjunto LI X num subespaço $F \subset E$, também é LI em E .
(LI transfere-se para superespaços)

Demonstração. a) Como X é LI, toda CL em X representando \mathcal{O} tem todos coeficientes nulos. Como $Y \subset X$, toda tal CL em Y é uma em X e assim tem todos coeficientes nulos. b) Como $Y \subset X$, uma CL em Y representando \mathcal{O} é uma tal em X . c) Isso é simplesmente o fato que o vetor nulo de um subespaço é o vetor nulo do espaço vetorial ambiente, veja Exercício 2.1.3. \square

Exemplo 3.1.4 (Bases).

- a) **Base canônica** $\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ onde $n \in \mathbb{N}_0$.

Caso $n \geq 1$. Exercício 1.3.12 confirma LI, Exercício 2.2.6 diz que gera \mathbb{R}^n . Caso $n = 0$. Note que $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ é o espaço vetorial trivial. O conjunto vazio $\mathcal{E}^0 = \emptyset$ é LI (Comentário 1.3.8) e gera o espaço trivial (Definição 2.2.1).

- b) $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$, veja Exemplo 2.2.6, não é base do \mathbb{R}^∞ , é sim do \mathbb{R}_0^∞ .
- c) **Os monômios** $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Gerando: Por definição de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. LI: Uma CL de monômios é um polinômio $p \neq 0$ (não constantemente nulo). Se p representa o vetor nulo (o polinômio constantemente nulo) todos coeficientes devem se anular porque polinômios de grau $\ell \geq 1$ tem um numero finito de raízes. Caso p é de grau zero, ele é da forma $p(x) = \alpha_0 x^0$ e para se anular α_0 deve-se anular.

- d) Sejam $u = (1, 1)$ e $v = (2, 0)$. Os conjuntos $\{e_1, u\}$ e $\{u, v\}$ são bases. São LI segundo Teorema 3.1.1 (os elementos não são múltiplos um do outro), e por isso geram \mathbb{R}^2 (Lema A.2.1). Por exemplo, o conjunto $\{e_1, v\}$ é LD (um elemento é múltiplo do outro).

Definição 3.1.5 (Base). Para um subconjunto \mathcal{B} de E definimos

$$\mathcal{B} \text{ base de } E \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{B} \text{ gera } E \\ \mathcal{B} \text{ é LI} \end{cases}$$

Uma **base ordenada** é uma base $\mathcal{B} = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ cujos elementos são enumerados. Conjuntos enumerados correspondem a sequências, listas caso finito.

Exercício 3.1.6. Se $E = F_1 \oplus F_2$, mostre que uma união $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ de bases de F_1 e F_2 é uma base de E . [Dica: União LI – (A.2.1)]

3.1.1 Coordenadas de um vetor

Comentário 3.1.7 (Consequências das duas propriedades de ser base \mathcal{B} de E). $\langle \mathcal{B} \rangle = E$: Assim todo $v \neq \mathcal{O}$ pode ser escrita como CL em \mathcal{B} , com efeito

$$v = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k \quad (3.1.1)$$

para escalares $\alpha_i \in \mathbb{K}$ e vetores da base $\xi_j \in \mathcal{B}$.

\mathcal{B} é LI: Assim os coeficientes α_j em cima são únicos (Corolário 3.1.2).

Definição 3.1.8 (Coordenadas). As **coordenadas de um vetor v em respeito a uma base \mathcal{B}** são os coeficientes α_j em (3.1.1).

Todo vetor $v \in E$ admite coordenadas únicas $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ em respeito a uma base \mathcal{B} de E .

Exercício 3.1.9. Mostre que os polinômios 1 , $x - 1$, e $x^2 - 3x + 1$ formam uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Exprima o polinômio $2x^2 - 5x + 6$ como CL nessa base.

3.1.2 Dimensão de um espaço vetorial

Teorema 3.1.10. *Se um conjunto finito gera E , então qualquer conjunto $Y \subset E$ com mais elementos é LD.*

Corolário 3.1.11. *Suponha um conjunto finito X gera E , então*

$$Y \subset E \text{ LI} \quad \Rightarrow \quad |Y| \leq |X|.$$

Para provar Teorema 3.1.10 vamos usar o seguinte resultado sobre SLH's.

Teorema 3.1.12 (Existência de soluções não-triviais de um SLH). *Dado uma matriz $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K})$. Se tem menos linhas como colunas ($m < n$), então o SLH $\mathbf{a}x = 0$, compare (1.2.2), admite soluções $x = (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$.*

Demonstração. Indução sobre o número m de linhas. Veja Teorema A.3.1. \square

Demonstração de Teorema 3.1.10. Suponha que o conjunto $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ gera o espaço vetorial E e seja $Y \subset E$ um outro subconjunto com mais elementos, ou seja $|Y| > m$. Para mostrar que Y é LD, basta mostrar segundo Lema 3.1.3 b) que um subconjunto $U = \{u_1, \dots, u_{m+1}\} \subset Y$ de $m+1$ elementos é LD. Como X gera E e cada um u_j pertence a E existem escalares a_{ij} tal que

$$u_j = a_{1j}v_1 + \dots + a_{mj}v_m \quad (*_j)$$

para $j = 1, \dots, m+1$.

Para U é LD resta mostrar: existem escalares não-nulos x_1, \dots, x_{m+1} tal que

$$x_1u_1 + \dots + x_{m+1}u_{m+1} = \mathcal{O} \quad (3.1.2)$$

Para este fim considere o SLH de m equações de $n = m+1$ incógnitas x_j

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1,m+1}x_{m+1} = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{m,m+1}x_{m+1} = 0 \end{cases} \quad (\text{SLH})$$

o qual tem uma solução não-trivial $x = (x_1, \dots, x_{m+1}) \neq (0, \dots, 0)$ segundo Teorema 3.1.12 como $m < n$. Obtemos (3.1.2) assim: usando $(*_1 - *_{m+1})$ temos

$$\begin{aligned} & x_1u_1 + \dots + x_{m+1}u_{m+1} \\ &= x_1(a_{11}v_1 + \dots + a_{m1}v_m) \\ & \quad + x_2(a_{12}v_1 + \dots + a_{m2}v_m) \\ & \quad \vdots \\ & \quad + x_{m+1}(a_{1,m+1}v_1 + \dots + a_{m,m+1}v_m) \\ &= v_1 \underbrace{\sum_{j=1}^{m+1} a_{1j}x_j}_{=0 \text{ (SLH)}_1} + \dots + v_m \underbrace{\sum_{j=1}^{m+1} a_{mj}x_j}_{=0 \text{ (SLH)}_m} \\ &= \mathcal{O} \end{aligned}$$

\square

Proposição 3.1.13. *Se uma base \mathcal{B} de E tem m elementos, então todas tem.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ bases de E .

1) $\langle \mathcal{B} \rangle = E$ e $Y := \tilde{\mathcal{B}}$ LI implicam (Corolário 3.1.11) $\ell := |\tilde{\mathcal{B}}| \leq |\mathcal{B}| = m < \infty$.

2) Analogamente como $\langle \tilde{\mathcal{B}} \rangle = E$ e $Y := \mathcal{B}$ é LI, temos que $m = |\mathcal{B}| \leq |\tilde{\mathcal{B}}| = \ell$. \square

Definição 3.1.14 (Dimensão). Se um espaço vetorial E admite uma base finita \mathcal{B} , o numero dos elementos é dito a **dimensão de E** , em símbolos

$$\dim E := |\mathcal{B}|$$

Caso E não admite nenhuma base finita dizemos que E é de **dimensão infinita** e escrevemos $\dim E = \infty$.

Comentário 3.1.15 (Dimensão do espaço vetorial trivial). O conjunto vazio é uma base do espaço vetorial trivial $E = \{\mathcal{O}\}$, Exemplo 1.3.8, assim $\dim\{\mathcal{O}\} = 0$.

Lema 3.1.16 (Aumentando conjuntos LI). *Seja $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ um subconjunto LI e seja $u \in E$ um vetor fora do subespaço gerado, ou seja $\langle X \rangle$. Então o conjunto estendido $\{v_1, \dots, v_n, u\}$ também é LI.*

Demonstração. Se $X = \emptyset$, então $u \neq \mathcal{O}$ e $\{u\}$ é LI segundo Corolário 1.3.8. Se $X \neq \emptyset$, suponha por absurdo que $\{v_1, \dots, v_n, u\}$ fosse LD. Assim existe uma CLe $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta u = \mathcal{O}$. Caso $\beta = 0$, então $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$ e $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \mathcal{O}$. Assim $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LD. Contradição. Caso $\beta \neq 0$, então $u = -\beta^{-1}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \in \langle X \rangle$. Contradição. \square

Exercício 3.1.17. Sejam X_1, X_2, \dots subconjuntos LI de um espaço vetorial E .

1. Caso encaixado $X_1 \subset X_2 \subset \dots$, prove que $X = \bigcup X_n$ é LI.
2. Se cada X_n tem n elementos, prove que existe um conjunto LI $\tilde{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$ com $x_j \in X_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.
3. Supondo $E = \mathbb{R}^\infty$ e as hipóteses em 1. e 2., é verdade que $X = \bigcup X_n$ seja uma base de E ?

Aula X

Corolários do Teorema 3.1.10**Corolário 3.1.18.** $Y \subset E, |Y| > n := \dim E \Rightarrow Y \text{ LD}$ *Demonstração.* Como $\dim E = n$ existe uma base \mathcal{B} de E com n elementos. \square **Corolário 3.1.19.** *Suponha $X \subset E$ tem $n = \dim E$ elementos, então*

$$X \text{ gera } E \quad \Rightarrow \quad X \text{ é LI}$$

Demonstração. \square **Corolário 3.1.20.** *Um subconjunto LI com $n = \dim E$ elementos é uma base.**Demonstração.* Tal subconjunto LI gera E segundo Corolário 3.1.19 ' \Leftarrow ' e assim é uma base. \square **Lema 3.1.21.** *Se um conjunto finito X gera E , então $\dim E \leq |X|$.**Demonstração.* \square **Exemplo 3.1.22** (Dimensão). Veja Exemplo 3.1.4.

- (a) $\dim \mathbb{R}^n = n = \dim \mathbb{K}^n$ e $\dim \mathbb{R}_0^\infty = \infty$.
- (b) $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1$ e $\dim \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \infty$.
- (c) $\dim M(m \times n) = mn$.
- (d) Hiperplanos $H_\alpha \subset \mathbb{R}^n$

Exercício 3.1.23 (Matrizes quadradas).

1. Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{S} \subset M(n \times n)$ os subespaços das matrizes anti-/simétricas.
 - (a) Para cada par $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ seja \mathbf{e}_{ij} a matriz $n \times n$ cujos elementos nas posições ij e ji são iguais a 1 e os demais são zero. Prove que estas matrizes constituem uma base para \mathcal{S} .
 - (b) De modo análogo, obtenha uma base para \mathcal{A} .
 - (c) Conclua que

$$\dim \mathcal{S} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Lembre-se que $\dim M(n \times n) = n^2$. Conclua que

$$M(n \times n) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$$

2. As matrizes $\mathbf{t} = (t_{ij}) \in M(n \times n)$ tais que $t_{ij} = 0$ quando $i < j$ são chamadas **triangulares inferiores**. Prove que elas constituem um subespaço $\mathcal{T}_* \subset M(n \times n)$. Obtenha uma base para \mathcal{T}_* e determine a sua dimensão.

3. Obtenha uma base e conseqüentemente determine a dimensão de cada um dos seguintes subespaços de $M(n \times n)$ as quais são composto de

(a) matrizes $\mathbf{a} = (a_{ij})$ de **traço** (a soma dos elementos da diagonal) nulo

$$\text{tr } \mathbf{a} := \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0$$

(b) matrizes cuja primeira e última linha são iguais

(c) matrizes cuja segunda linha e terceira coluna são iguais

3.2 Existência e extensão

Teorema 3.2.1. *Seja E de dimensão finita $\dim E = n \in \mathbb{N}_0$.*

- (a) *Todo conjunto gerando E contém uma base de E .*
- (b) *Todo subconjunto LI é contido numa base.*
- (c) *A dimensão de qualquer subespaço de E é $\leq n$.*
- (d) *Um subespaço F de E da mesma dimensão n é igual a E .*

Corolário 3.2.2. *Todo espaço vetorial E gerado por um conjunto finito X admite uma base \mathcal{B} tal que $|\mathcal{B}| = |X|$.*

Exercício 3.2.3. *Sejam $F_1, F_2 \subset E$ subespaços de dimensão finita. Obtenha uma base do subespaço $F_1 + F_2$ que contenha uma base de F_1 , uma base de F_2 e uma base de $F_1 \cap F_2$.*

Parte II

Teoria das transformações
lineares

Capítulo 4

Transformações lineares

4.1 Exemplos

4.2 Matriz de uma transformação linear

4.3 Rotações e projeções

4.4 Produto de transformações lineares

Capítulo 5

Núcleo e imagem

Apêndice A

Demonstrações restantes

A.1 Espaços vetoriais

Lema A.1.1 (Lema 1.1.4). *Seja $(G, *)$ um grupo. Então vale o seguinte.*

- 1) *O elemento neutro é único.*
- 2) *Os elementos inversos são únicos.*
- 3) *Para todos os elementos $f, g, h \in G$ vale:*

- a) $f * g = f * h \Rightarrow g = h$ *(lei da corte)*
- b) $f * g = f \Rightarrow g = e$
- c) $f * g = e \Rightarrow g = \bar{f}$

Demonstração. 1) Se $e, \tilde{e} \in G$ satisfazem o axioma (elemento neutro), então usando o axioma para e e depois para \tilde{e} obtemos que $e = e * \tilde{e} = \tilde{e}$.

2) Seja $g \in G$. Se $\bar{g}, \tilde{g} \in G$ satisfazem o axioma (inverso) para g , então obtemos

$$\bar{g} = e * \bar{g} = \underbrace{(\tilde{g} * g)}_{=e} * \bar{g} = \tilde{g} * \underbrace{(g * \bar{g})}_{=e} = \tilde{g} * e = \tilde{g}$$

usando (elem. neutro) no início e fim, (inverso) $_{\tilde{g}}$, (associatividade), (inverso) $_{\bar{g}}$.

- 3) a) $g = e * g = (\bar{f} * f) * g = \bar{f} * (f * g) \stackrel{\text{hip.}}{=} \bar{f} * (f * h) = (\bar{f} * f) * h = e * h = h$.
- b) Use a) com $h = e$. c) Use a) com $h = \bar{f}$. □

Lema A.1.2 (Lema 1.1.9). *Seja \mathbb{K} um corpo e $0 \in K$ é o elemento neutro da adição. Então $0\beta = 0$ e $\beta 0 = 0$ para todos os elementos $\beta \in \mathbb{K}$.*

Demonstração. Seja $\beta \in \mathbb{K}$, denotamos o inverso aditivo de $-\beta$. Então

$$\beta \stackrel{(\text{el.n.})}{=} 1\beta \stackrel{(\text{el.n.})_+}{=} (1+0)\beta \stackrel{(\text{distr.})}{=} 1\beta + 0\beta \stackrel{(\text{el.n.})}{=} \beta + 0\beta$$

Usamos esta identidade para obter a segunda igualdade no seguinte

$$0 \stackrel{(\text{inv.})}{=} (-\beta) + \beta = -\beta + (\beta + 0\beta) \stackrel{(\text{ass.})_+}{=} (-\beta + \beta) + 0\beta \stackrel{(\text{inv.})}{=} 0 + 0\beta \stackrel{(\text{el.n.})}{=} 0\beta$$

□

Lema A.1.3 (Lema 1.1.17). *Para o vetor nulo $\mathcal{O} \in E$ de um espaço vetorial e o elemento neutro aditivo $0 \in \mathbb{K}$ do corpo vale o seguinte.*

- (i) $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ para todos os escalares $\alpha \in \mathbb{K}$.
- (ii) $0v = \mathcal{O}$ para todos os vetores $v \in E$.
- (iii) Para todo o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo o vetor $w \in E$ são equivalentes:

$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O}$$

Demonstração. (i) CASO $\alpha = 0$. Como $\alpha\mathcal{O} + 0\mathcal{O} = (\alpha + 0)\mathcal{O} = \alpha\mathcal{O}$, então $0\mathcal{O} = \mathcal{O}$ pela lei da corte (Lema A.1.1 3b) para $(G, *) = (E, +)$. CASO $\alpha \neq 0$. Tal α tem um inverso aditivo, notação α^{-1} . Seja $v \in E$, então

$$v \stackrel{(\text{comp.})}{=} 1v \stackrel{(\text{inv.})_{\mathbb{K}}}{=} (\alpha\alpha^{-1})v \stackrel{(\text{comp.})}{=} \alpha(\alpha^{-1}v)$$

Usando este resultado no início e no fim do seguinte obtemos que

$$v + \alpha\mathcal{O} = \alpha(\alpha^{-1}v) + \alpha\mathcal{O} \stackrel{(\text{distr.})_E}{=} \alpha((\alpha^{-1}v) + \mathcal{O}) \stackrel{(\text{el.n.})_{E,+}}{=} \alpha(\alpha^{-1}v) = v$$

Então $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ pela lei da corte (Lema A.1.1 3b) para $(G, *) = (E, +)$.

- (ii) Como $v + 0v = 1v + 0v = (1 + 0)v = 1v = v$ a lei da corte diz que $0v = \mathcal{O}$.
- (iii) '⇒' Suponha $\alpha w = \mathcal{O}$. Caso $\alpha = 0$, pronto. Caso $\alpha \neq 0$ concluímos que

$$w \stackrel{(\text{comp.})}{=} 1w \stackrel{(\text{el.n.})_{\mathbb{K}}}{=} (\alpha^{-1}\alpha)w \stackrel{(\text{comp.})}{=} \alpha^{-1}(\alpha w) \stackrel{\text{hip.}}{=} \alpha^{-1}\mathcal{O} \stackrel{(i)}{=} \mathcal{O}$$

'⇐' Se $w = \mathcal{O}$, então $\alpha\mathcal{O} \stackrel{(i)}{=} \mathcal{O}$, pronto. Se $\alpha = 0$, então $0w \stackrel{(ii)}{=} \mathcal{O}$, pronto. □

Corolário A.1.4 (Corolário 1.1.18). *Para todos os $\alpha \in \mathbb{K}$ e $w \in E$ vale:*

- a) $\alpha(-w) = -(\alpha w)$
- b) $(-\alpha)w = -(\alpha w)$

Demonstração. a) Temos que mostrar que a soma de αw e o candidato para ser seu inverso aditivo iguale o vetor nulo. Com efeito

$$\alpha w + \alpha(-w) \stackrel{(\text{distr.})_E}{=} \alpha(w + (-w)) \stackrel{(\text{el.n.})_{E,+}}{=} \alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$$

onde o último passo é parte (i) de Lema A.1.3.

b) Temos o objetivo análogo de chegar ao vetor nulo, com efeito

$$\alpha w + (-\alpha)w \stackrel{(\text{distr.})_E}{=} (\alpha + (-\alpha))w \stackrel{(\text{el.n.})_{\mathbb{K},+}}{=} 0w = \mathcal{O}$$

onde o último passo é parte (ii) de Lema A.1.3. □

A.2 Subespaços

Lema A.2.1 (Lema 2.2.4). *Todo subconjunto LI $\{u, v\} \subset \mathbb{R}^2$ gera \mathbb{R}^2 .*

Demonstração. Vai ter 4 passos. I. Os vetores u, v não são múltiplos um do outro: Suponha por absurdo que $u = \alpha v$ para um $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $1u + (-\alpha)v = 1\alpha v - (\alpha v) = \mathcal{O}$ contradizendo LI. II. $u \neq \mathcal{O}$: Caso contrario $u = \mathcal{O} = 0v$ contradizendo I. III. $v \neq \mathcal{O}$: Análogo. IV. Seja $v \in \mathbb{R}^2$. Caso $w = \mathcal{O}$ escrevemos $w = 0u$, pronto. Caso $v \neq \mathcal{O}$: Agora identificamos \mathbb{R}^2 com o plano usando dois eixos OXY , veja Figura 2. Segundo II. e III. temos duas retas $\mathbb{R}u$ e $\mathbb{R}v$ passando ambas a origem O , mas não são iguais segundo I. Recebemos um paralelogramo com dois lados parte das retas e dois vértices sendo O e v ; pensa Figura 2 com OX e OY substituto para Ou e Ov . Então a flecha v é a soma de duas flechas do paralelogramo, uma flecha sendo um múltiplo de u e a outra de v . Pronto. \square

Teorema A.2.2 (Teorema 2.3.4). *Sejam $F_1, F_2 \subset F$ três subespaços de um espaço vetorial E , então são equivalentes*

$$F = F_1 \oplus F_2 \iff \forall f \in F, \exists! f_1 \in F_1, f_2 \in F_2 \text{ tal que } f = f_1 + f_2$$

Demonstração. ' \Rightarrow ' Seja $f \in F$. Como hipótese temos duas informações, a saber (i) $F = F_1 + F_2$ e (ii) $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$, dando existência e unicidade.

EXISTÊNCIA: De (i) sabemos que $f = f_1 + f_2$ para um $f_1 \in F_1$ e um $f_2 \in F_2$.

UNICIDADE. Suponha que $f = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ também para um $\tilde{f}_1 \in F_1$ e um $\tilde{f}_2 \in F_2$. Então $F_1 \ni f_1 - \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 - f_2 \in F_2$. Assim cada um lado pertence a ambos espaços, então a $F_1 \cap F_2$ o qual segundo (ii) iguale $\{\mathcal{O}\}$. Como não tem outro elemento, cada um lado deve ser o vetor nulo.

' \Leftarrow ' $F_1 + F_2 = F$: A hipótese *existência* disponibiliza a primeira inclusão $F \subset F_1 + F_2 \subset F$ e a segunda vale como $F_1, F_2 \subset F$.

$F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$: Seja $f \in F_1 \cap F_2$, a mostrar $f = \mathcal{O}$. Note que $f \in F$ como $F_1, F_2 \subset F$. Então segundo a propriedade do vetor nulo

$$\underbrace{f}_{\in F_1} + \underbrace{\mathcal{O}}_{\in F_2} = f = \underbrace{\mathcal{O}}_{\in F_1} + \underbrace{f}_{\in F_2} \quad (\text{A.2.1})$$

Mas pela hipótese *unicidade* escrever f como soma de um elemento de F_1 e um elemento de F_2 é único, então $f = \mathcal{O}$ e $\mathcal{O} = f$. \square

A.3 Bases

Teorema A.3.1 (Teorema 3.1.12). *Dado uma matriz $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K})$. Se tem menos linhas como colunas ($m < n$), então o sistema linear homogêneo (SLH)*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

admite soluções $x = (x_1, \dots, x_n)$ não triviais (não todos x_j nulos).

Demonstração. Indução sobre o número m de equações. $m = 1$: □

Índice Remissivo

- $C^0(\mathbb{R})$ funções contínuas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 32
 $C^k(\mathbb{R})$ funções k vezes continuamente diferenciáveis, 32
 $C^\infty(\mathbb{R})$ funções suaves $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 32
 CL combinação linear, 25
 CLe combinação linear estrita, 24
 $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ espaço vetorial, 14
 $e_i \in \mathbb{K}^n$ i -ésimo vetor canônico, 19
 $\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\}$ base canônica, 19, 34, 40
 $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$ base canônica, 34
 $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) := \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{K}\}$, 21
 $(G, *)$ grupo, 9
 H_α hiperplano no \mathbb{R}^n , 32
 $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ corpo, 10
 $\mathbb{K}v$ reta passando v e \mathcal{O} , 32
 LI/LD linearmente in/dep., 29
 $M(m \times n)$ matrizes $m \times n$, 20
 \mathcal{A}, \mathcal{S} matrizes anti-/simétricas, 38
 \mathcal{O} vetor nulo, 14
 (oe) operações elementares, 21
 $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ polinômios, 21
 $\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ polinômios reais e aqueles do grau $\leq n$, 32
 R^n listas ordenadas de n reais, 19
 R^∞ sequências reais, 20
 \mathbb{R}_0^∞ , 32
 SL sistema linear, 23
 SLH sistema linear homogêneo, 23, 41
 $\forall, \exists, \exists!$ “para todos”, “existe”, “existe unicamente”, 5
 $\langle X \rangle$ subespaço gerado por X , 33
 $\langle v \rangle := \langle \{v\} \rangle$, 33
 $|X|$ número de elementos de um conjunto X , 9
 $|\alpha|$ absoluto de um número α , 5
 $\mathbf{a} = (a_{ij})$ matriz, 20
 a_{ij} i -ésima linha, j -ésima coluna, 20
 $\mathbf{a}_{\bullet k}, \mathbf{a}_{k\bullet}$ k -ésima coluna, linha, 20
 \mathbf{a}_{esc} matriz escalonada, 22
 $:=$ “definido por”, 5
 $[a, b], (a, b)$ intervalo fechado, aberto, 5
 $[\mathbf{a} : b]$ matriz aumentada, 22
 $X \times Y$ produto cartesiano, 9
 $F \oplus G$ soma direta, 37
 $X + Y$ soma de subconjuntos, 37
 $\text{tr } \mathbf{a} := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ traço, 48
 adição
 de funções, 21
 base, 41
 canônica, 19, 34, 40
 ordenada, 41
 combinação linear, 25
 ‘de vetores’, 25
 combinação linear estrita (num conjunto), 24
 composição
 de funções, 14
 conjunto, 9
 finito, 9
 gerando, 33
 linearmente independente LI, 29
 que gera, 33
 coordenadas
 de um vetor, 41
 no plano, 4
 corpo, 10
 decomposição
 de vetores, 37

- eixo, 4
- elemento neutro
 - aditivo, 11
 - multiplicativo, 11
- escalares, 14
- espaço vetorial, 14
 - base, 41
 - subespaço, 31
 - trivial, 19
- fechado sob uma operação, 31
- funções
 - adição de $-$, 21
 - composição de $-$, 14
 - multiplicação de $-$, 14
- grau
 - de um polinômio, 21
- grupo, 9
 - abeliano, 10
- independência linear
 - de um conjunto, 29
- inimigo da clareza
 - desnecessidade, 24
- lei
 - da corte, 10
- linearmente in/dependente, 29
- matriz
 - anti-/simétrica, 38
 - entradas da $-$, 20
 - escalonada, 22
 - pivôs, 22
 - linhas e colunas, 20
 - operações elementares numa $-$, 21
 - traço de uma $-$ quadrada, 48
- matriz aumentada, 22
- matrizes
 - triangulares
 - inferiores, 47
- monômios, 34, 40
- multiplicação
 - de funções, 14
- operações elementares numa matriz, 21
- origem, 19
- pivôs, 22
- polinômio, 21
 - grau de um $-$, 21
- produto
 - cartesiano, 9
- rotação
 - no plano, 3
- sistema de
 - coordenadas
 - no plano, 4
- sistema linear (SL), 23
 - inogeneidade, 23
 - resolver “de baixo para cima”, 23
- sistema linear homogêneo (SLH), 23, 41
- soma
 - de subconjuntos, 37
 - direta, 37
- subconjunto
 - translação de $-$, 37
- subconjuntos
 - herdam LI, 40
 - soma de $-$, 37
- subespaço
 - vetorial, 31
- subespaços
 - soma direta de $-$, 37
- teorema
 - decomposição única de vetores, 37
- traço, 48
- translação, 37
- verdade vazia, 29
- vetor
 - coordenadas de um $-$, 41
 - decomposição, 37
- vetor nulo, 14
- vetores, 14