# Álgebra Linear

Notas da aula[1]
MA327 2020-2

manuscrito em progresso

Joa Weber
UNICAMP

23 de setembro de 2020

[1] versão final estará la: www.math.stonybrook.edu/∼joa/PUBLICATIONS/MA327.pdf

# Sumário

# Aula 1

# Introdução

*Àlgebra Linear*

*é o estudo dos espaços lineares e das transformações lineares.*

Uma outra palavra para espaço linear é espaço vetorial.

**Exemplo 0.0.1** (Flechas equivalentes no plano)**.** Seja $F$ o conjunto das flechas equivalentes $v$ (mesma direção e comprimento) no plano $\Pi$ munido das operações de multiplicar uma flecha $v$ com um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ e de adicionar duas flechas $v$ e $w$.

*Multiplicação (escalar).* Pela definição $\alpha v$ é a flecha na direção de $v$ cujo comprimento é $\alpha$ vezes aquele de $v$ (muda-se a direção caso o número $\alpha$ é negativo).

*Adição (vetorial).* Pela definição $v + w$ é a flecha cujo ponto inicial é aquela de $v$ e cujo ponto termino $p$ é obtido depois fazer uma translação de $w$ movendo o ponto inicial de $w$ no ponto termino de $v$. Então $p$ é definido como o ponto termino do novo $w$.

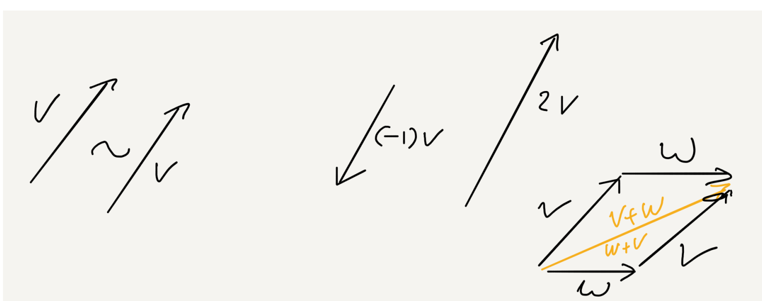


Figura 1: Adição de flechas e multiplicação escalar

Tal $F$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ e um exemplo de uma transformação linear em $F$ é dado pela rotação $r_\theta : F \to F$ de uma flecha $v$ pelo angulo $\theta$ em torno do ponto inicial.

**Exemplo 0.0.2** (Pares de números reais)**.** Seja $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ o conjunto de todas listas ordenadas de dois membros reais munido da adição membro-por-membro e multiplicação com um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ também membro-por-membro. Então $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

**Comentário 0.0.3** (Identificação dos conjuntos e operações – isomorfismo)**.** Os dois exemplos anteriores são "iguais" no sentido seguinte. Suponhamos que na reta podemos medir a distância 1. No plano $\Pi$ escolha um **eixo** $OX$, ou seja uma reta com dois pontos diferentes $O$ e $X$ da distância 1, e um segundo eixo $OY$ cujo primeiro ponto $O$ é aquele do $OX$ e qual intersecta $OX$ exatamente no ponto $O$. Uma tal escolha de dois eixos é chamado um **sistema de coordenadas** no plano, símbolo $OXY$.

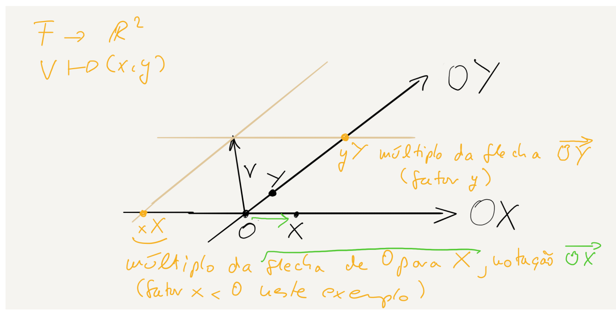


Figura 2: Sistema de coordenadas $OXY$ composto de dois eixos $OX$ e $OY$

Observe-se que um eixo $OX$ chega com uma direção (de $O$ para $X$) e com um comprimento unitário (o comprimento do segmento entre $O$ e $X$). Uma escolha de coordenadas $OXY$ no plano $\Pi$ nos das uma aplicação

$$F \to \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto (x, y)$$

a qual identifica os elementos de $F$ com os elementos de $\mathbb{R}^2$ unicamente (bijetora) – e ainda é **linear**, ou seja compatível com as duas operações no domínio e as duas no contradomínio. Uma tal aplicação (bijetora linear) é chamado um **isomorfismo** entre espaços vetoriais. Deixamos ao leitor definir esta aplicação.

[Dica: Os pontos $O, X$ e $O, Y$ dão duas flechas. Represente um elemento de $F$ por uma flecha equivalente com ponto inicial $O$. Pensa num paralelogramo tal que $O$ e o ponto termino da flecha equivalente são dois vértices opostos.]

**Exemplo 0.0.4** (Funções continuas e integração)**.** Sejam $a < b$ dois números reais. Então o quadruplo $V = (C^0([a, b], \mathbb{C}), +, \cdot, \mathbb{R})$ que é composto do conjunto das funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ munido com as duas operações de adicionar $f + g$ duas funções e multiplicar $\alpha f$ uma função com um numero real $\alpha \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Também $W = (\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R})$ composto das números reais $\mathbb{R}$ munido das operações óbvias é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Integração $T : V \to W$, $f \mapsto \int_a^b f(x)\, dx$, é compatível com as duas adições e multiplicações (em $V$ e em $W$) no sentido que

$$T(f + g) = Tf + Tg, \qquad T(\alpha f) = \alpha Tf$$

para todos os vetores $f, g \in V$ e escalares $\alpha$ do corpo $\mathbb{R}$. Uma aplicação $T$ entre espaços vetoriais qual respeita as duas operações no domínio e no contradomínio é chamada uma transformação linear.

## Notações

**Comentário 0.0.5** (Números)**.** Vamos trabalhar com os seguintes **números**

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$ | naturais |
| $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ | inteiros |
| $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$ | racionais |
| $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ "a reta real" | reais |
| $\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ "o plano complexo" | complexos |

Com $|\alpha|$ denotamos o absoluto de um numero $\alpha$. Denotamos **intervalos** fechados de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e abertos de $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Usamos os símbolos

$\forall$ "para todos os" $\exists$ "existe um" $\exists!$ "existe um único"

A notação $w := v$ significa que o objeto $w$ **é definido** pelo lado direito $v$.

## Convenções

**Cor cinza**. Parágrafos e maiores partes de texto em cinza indicam matéria avançada direcionado às turmas A e B do "cursão", mas não às outras turmas. Palavras individuais em cinza geralmente são nomes ou informações complementares.

# Parte I

# Teoria dos espaços vetoriais

# Capítulo 1

# Espaços vetoriais

## 1.1 Axiomas

**Definição 1.1.1.** Um **conjunto** $X$ é composto de elementos os quais são dois-a-dois diferentes. Consequentemente $\{2,3\} \cup \{2\} = \{2,3,2\} = \{2,3\}$. Um conjunto não é ordenado, por exemplo $\{1,2\} = \{2,1\}$. O conjunto que não contem nenhum elemento é chamado **o conjunto vazio**, símbolo $\emptyset$. Denotamos de $|X|$ o **número de elementos de um conjunto** quando o número é finito. Neste caso $X$ é chamado de **conjunto finito**.

Um **subconjunto** de um conjunto $X$ é um conjunto $A$ tal que cada um elemento de $A$ é elemento de $X$, notação $A \subset X$. Observe que conforme esta definição, o conjunto vazio $\emptyset$ é subconjunto de todos conjuntos: para todo conjunto $X$ temos $\emptyset \subset X$.

**Definição 1.1.2.** O **produto cartesiano** $X \times Y$ de dois conjuntos $X$ e $Y$ é o conjunto de todas listas ordenadas $(x, y)$ dos elementos $x \in X$ e $y \in Y$, ou seja

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X,\, y \in Y\}$$

Observe que se um fator fica vazio, ou seja $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$, então $X \times Y = \emptyset$.

### 1.1.1 Grupo

**Definição 1.1.3.** Um conjunto não-vazio $G \neq \emptyset$ munido de uma operação

$$* : G \times G \to G, \quad (f, g) \mapsto f * g$$

é chamado um **grupo**, notação $(G, *)$, se valem os três axiomas

1. $f*(g*h) = (f*g)*h$ para todos os elementos $f, g, h \in G$ (associatividade)
2. existe um elemento $e \in G$ tal que (elemento neutro)

   $$e * g = g, \qquad g * e = g$$

   para todos os elementos $g \in G$.

3. para todo $g \in G$ existe um elemento, notação $\bar{g} \in G$, t.q. (inverso)

$$g * \bar{g} = e, \quad \bar{g} * g = e$$

Em palavras,

> *um grupo é um conjunto não-vazio munido de uma operação associativa, contendo um elemento neutro, e tal que qualquer elemento admite um inverso.*

O seguinte lema diz que um grupo $G$ tem exatamente um elemento neutro, notação comum $e$, e cada um elemento $g$ de $G$ tem exatamente um inverso, notação $\bar{g}$. Ás vezes é comum e útil escrever o elemento neutro na forma 0 ou 1 e os inversos na forma $-g$ ou $g^{-1}$ — veja os dois exemplos em Exercício 1.1.6 a).

**Lema 1.1.4.** *Seja $(G, *)$ um grupo. Então vale o seguinte.*
1) *O elemento neutro é único.*
2) *Os elementos inversos são únicos.*
3) *Para todos os elementos $f, g, h \in G$ vale:*
   a) $f * g = f * h \;\Rightarrow\; g = h$ *(lei da corte)*
   b) $f * g = f \;\Rightarrow\; g = e$
   c) $f * g = e \;\Rightarrow\; g = \bar{f}$

Note que b) e c) são consequências imediatas de a).

*Demonstração.* Lema A.1.1. □

**Definição 1.1.5.** Um grupo $(G, *)$ é chamado de **abeliano** se a ordem dos dois elementos na operação nao importa, em símbolos $f * g = g * f$. (comutatividade)

**Exercício 1.1.6.** Mostre que
a) sao grupos (ainda abelianos): $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, \cdot)$
b) nao sao grupos: $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{N}_0, +)$ e $(\mathbb{Z}, \cdot)$
c) nao sao grupos abelianos: as matrizes $3 \times 3$ e as rotações em $\mathbb{R}^3$.

### 1.1.2 Corpo

**Definição 1.1.7.** Um conjunto $\mathbb{K}$ munido de duas operações[1]

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K} \qquad\qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$$

é chamado um **corpo** se valem os três axiomas

1. $(\mathbb{K}, +)$ é um grupo abeliano.
   (O *elemento neutro* seja denotado 0 e $-\alpha$ denota o *inverso* de $\alpha \in \mathbb{K}$.)

[1] as quais vamos batizar aos nomes "+" e "·" – ainda que *geralmente não tem nada ver com adição e multiplicação de números*, mas esta escolha é motivada pelos exemplos principais (Exemplo 1.1.10) nos quais "+" e "·" são adição e multiplicação de números

2. $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.
   (O *elemento neutro* seja denotado 1 e $\alpha^{-1}$ denota o *inverso* de $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.)

3. Distributividade: $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$.
   (É costume escrever $\alpha\beta$ em vez de $\alpha \cdot \beta$.)

Para distinguir chamamos o elemento neutro da primeira operação – para a qual temos usado o símbolo "+" ainda que geralmente não tem nada ver com adição de números – o **elemento neutro aditivo**. Chamamos o elemento neutro da segunda operação – motivado pelo uso do símbolo "$\cdot$" – o **elemento neutro multiplicativo**. Como é feio escrever $\alpha + (-\beta)$ para a soma de um elemento com um elemento inverso aditivo definimos $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$. Isso é uma abreviação só, não é, nem tem diferença. Analogamente simplificamos a notação escrevendo $\alpha/\beta$ em vez de $\alpha\beta^{-1}$.

**Corolário 1.1.8.** *Um corpo contem pelo menos dois elementos.*

*Demonstração.* Pelas axiomas 1 e 2 cada uma operação tem um elemento neutro as quais não podem ser iguais por causa de 2. □

**Lema 1.1.9.** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $0 \in K$ é o elemento neutro da adição. Então $0\beta = 0$ e $\beta 0 = 0$ para todos os elementos $\beta \in \mathbb{K}$.*

*Demonstração.* Lema A.1.2. □

### Exemplos de corpos

**Exemplo 1.1.10.** Sao corpos
a) $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$
b) $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ onde as operações sao definidas assim

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)$$
$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(bc + ad)$$

**Exercício 1.1.11.** Os números inteiros $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ não formam um corpo.

**Exemplo 1.1.12** (Adição e multiplicação modulo $n$)**.** Dado um número natural $n \in \mathbb{N}$, defina no conjunto $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ as duas operações

$$a +_n b := a + b \pmod{n}, \qquad a \cdot_n b := ab \pmod{n}$$

para todos os elemento $a, b \in \mathbb{Z}_n$.[2]
**Fato.** $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ é um corpo $\iff$ $n$ é um número primo.

Para valores pequenos de $n$ pode-se checar da mão se $\mathbb{Z}_n$ é um corpo ou não. Só precisa-se calcular as tabelas de adição e de multiplicação. Vamos ilustrar isso num exemplo.

[2] Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\ell \in \mathbb{Z}$ um número inteiro. Pela definição o elemento $\ell \pmod{n} \in \mathbb{Z}_n$ é o resto $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ que falta depois você "enche" $\ell$ com múltiplos de $n$. Em símbolos, $l \pmod{n} := r$ onde $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ é o único elemento tal que $l = kn + r$ para um $k \in \mathbb{Z}$.

**Exemplo 1.1.13** ($\mathbb{Z}_4$ não é um corpo.)**.** Para checar se $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ e $(\mathbb{Z}_4 \backslash \{e_{+_4}\}, \cdot_4)$ são grupos abelianos é útil calcular as tabelas de adição e de multiplicação.

• $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ é um grupo abeliano? Para responder calculamos os valores na tabela

| $+_4$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

São 4 passos:

1. Determinar o elemento neutro de $+_4$: Checamos se a linha em cima da linha solida horizontal, ou seja a linha 0 1 2 3, tem uma cópia nas linhas embaixo. Sim, tem 0 1 2 3. Neste caso o elemento em frente da cópia é o elemento neutro de $+_4$, certo? No nosso caso $e_{+_4} = 0$. Se não tem copia, não tem elemento neutro, então não temos um grupo.
2. Inversos: Na cada dos (neste caso 4) linhas de valores na tabela localiza o elemento neutro 0 (se existir). Então o elemento $g$ em frente da linha de 0 e o elemento em cima da coluna de 0, notação $\bar{g}$, são inversos um do outro. Caso uma linha nao contem 0, então este $g$ não tem inverso, então não temos um grupo. No nosso caso todo elemento $g$ tem um inverso:

| $g$ | $\bar{g}$ (denotado $-g$) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 3 |
| 2 | 2 |
| 3 | 1 |

3. Associatividade: Calculando caso por caso temos que checar se $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$ para todas as possibilidades. No nosso caso vale.
4. Grupo abeliano (comutatividade): Vale se a tabela é simétrica em respeito à diagonal. No nosso caso vale.

Na verdade temos esquecido um passo: No inicio de tudo temos que checar se a operação é bem definida, ou seja os valores da operação (os valores na tabela) realmente são elementos do conjunto, ou não. Olhamos a tabela - sim.
Nosso resultado é que $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ é um grupo abeliano.

• $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$ é um grupo abeliano? Para responder calculamos a tabela

| $\cdot_4$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 3 | 2 | 1 |

Como o valor 0 não é elemento de $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ a multiplicado $\cdot_4$ não é uma operação em $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$, então não pode ser um grupo.

Ainda assim vamos repetir os 4 passos para $\cdot_4$ (em vez de $+_4$) para ver se tem outras falhas ainda. As respostas são:

1. Elemento neutro de $\cdot_4$: Tem, é o elemento $e_{\cdot_4} = 1$.
2. Inversos: Na cada dos (neste caso 3) linhas de valores na tabela localizamos o elemento neutro 1 (se existir). No nosso caso

| $g$ | $\bar{g}$ (denotado $g^{-1}$) |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | não tem! |
| 3 | 3 |

o elemento 2 não tem um inverso e já por isso não temos um grupo.
3. Associatividade: Ainda que a fórmula $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$ vale, os valores não são todos em $Z_4 \setminus \{0\}$.
4. Grupo abeliano (comutatividade): A tabela é simétrica em respeito à diagonal, mas os valores não são todos em $Z_4 \setminus \{0\}$.

Nosso resultado é que $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$ não é um grupo abeliano.

**Exercício 1.1.14.** Seja $n = 6$:

1. Calcule a tabela da adição e da multiplicação no caso $\mathbb{Z}_6$.
2. Identifique os elementos neutros da adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_6$. Eles sempre existem?
3. Para todo $a \in \mathbb{Z}_6$ identifique o elemento inverso aditivo.
4. Para todo $a \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$ identifique o elemento inverso multiplicativo, se existir.
5. Cheque que $\mathbb{Z}_6$ não é um corpo. Quais dos axiomas não valem?

## Matéria avançada

Motivado pelas perguntas da Turma C na 1ª aula 2016-2 vamos dar um exemplo de um corpo onde a primeira operação não está relacionada à adição de números nem a segunda à multiplicação de números.

**Exercício 1.1.15** (Corpo $(P, \cdot, \circ)$ onde $\cdot$ não é adição e $\circ$ não é multiplicação)**.** Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a função $p_\alpha : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $x \mapsto x^\alpha$. Seja o conjunto

$$P := \{p_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

composto de todas funções $p_\alpha(x) = x^\alpha$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ e munido das operações

$$\begin{aligned} \cdot : P \times P &\to P & \qquad \circ : P \times P &\to P \\ (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \cdot p_\beta & \qquad (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \circ p_\beta \end{aligned}$$

chamado de **multiplicação**[3] e **composição**[4] de funções, respectivamente. Mostre que:

[3] $(p_\alpha \cdot p_\beta)(x) := p_\alpha(x) \cdot p_\beta(x)$
[4] $(p_\alpha \circ p_\beta)(x) := p_\alpha(p_\beta(x))$

1. As duas operações são bem definidas: $p_\alpha \cdot p_\beta \in P$ e $p_\alpha \circ p_\beta \in P$, de fato
$$p_\alpha \cdot p_\beta = p_{\alpha+\beta}, \qquad p_\alpha \circ p_\beta = p_{\alpha\beta}$$
2. $(P, \cdot)$ é um grupo abeliano com elemento neutro $p_0$.
3. $(P \setminus \{p_0\}, \circ)$ é um grupo abeliano com elemento neutro $p_1$.
4. Distributividade: $(p_\alpha \cdot p_\beta) \circ p_\gamma = (p_\alpha \circ p_\gamma) \cdot (p_\beta \circ p_\gamma)$, $\forall p_\alpha, p_\beta, p_\gamma \in P$.

### 1.1.3 Espaço vetorial

**Definição 1.1.16.** Um **espaço vetorial $E$ sobre um corpo** $\mathbb{K}$[5] é um quádruplo $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ composto de um conjunto $E$, um corpo $\mathbb{K}$, e duas operações

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ (v, w) &\mapsto v + w \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot\ : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\alpha, v) &\mapsto \alpha v \end{aligned}$$

chamado de *adição* e *multiplicação escalar*, respectivamente, tal que vale

1. $(E, +)$ é um grupo abeliano.
   (O *elemento neutro* é denotado $\mathcal{O}$ e chamado o **vetor nulo**.)
2. Distributividade: $\begin{cases} (\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v \\ \alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w \end{cases}$
3. Compatibilidade: $\begin{cases} (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \\ 1v = v \end{cases}$

Onde as identidades tem que ser válidas para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e todos $v, w \in E$. Chama-se **escalares** os elementos do corpo $\mathbb{K}$ e **vetores** os elementos de $E$.

**Lema 1.1.17.** *Seja $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ um espaço vetorial e $0 \in \mathbb{K}$ e $\mathcal{O} \in E$, então:*

(i) $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ *para todos os escalares* $\alpha \in \mathbb{K}$.

(ii) $0v = \mathcal{O}$ *para todos os vetores* $v \in E$.

(iii) *Para todo o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo o vetor $w \in E$ são equivalentes:*
$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O} \tag{1.1.1}$$

*Demonstração.* Lema A.1.3. □

**Corolário 1.1.18** (Compatibilidade dos inversos aditivos com multiplicação)**.** *Para todo o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo o vetor $w \in E$ vale:*

a) $(-\alpha)w = -(\alpha w)$

b) $\alpha(-w) = -(\alpha w)$

*Demonstração.* Corolário A.1.4. □

---
[5] fala-se abreviando "*$E$ é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$" ou ainda "*$E$ é um espaço vetorial*".

# Aula 2

## 1.2 Exemplos de espaços vetoriais

**Exemplo 1.2.1** (O espaço vetorial trivial $\{\mathcal{O}\}$)**.** Seja $E$ um conjunto com 1 elemento só. Vamos já denotar aquele elemento com o símbolo $\mathcal{O}$ (porque?). Então $E = \{\mathcal{O}\}$. Seja $\mathbb{K}$ um corpo qualquer. Não tem escolha nenhuma para definir as duas operações

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ (\mathcal{O}, \mathcal{O}) &\mapsto \mathcal{O} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\alpha, \mathcal{O}) &\mapsto \mathcal{O} \end{aligned}$$

Então $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ satisfaz os axiomas de um espaço vetorial, denotado simplesmente $E = \{\mathcal{O}\}$ e chamado de **espaço vetorial trivial**.

**Exemplo 1.2.2** (Um corpo $\mathbb{K}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$)**.** Usa-se as duas operações chegando com o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ como as duas operações necessárias para tornar um conjunto, escolhemos $E := \mathbb{K}$, num espaço vetorial sobre um corpo, escolhemos $\mathbb{K}$. Com efeito $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

### 1.2.1 Listas ordenadas

**Exemplo 1.2.3** (O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$)**.** Seja

$$\mathbb{R}^n := \{u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \dots \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto de todas as listas ordenadas de $n$ números reais. Chamamos $\alpha_i$ o $i$-ésimo membro da lista. As duas operações

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad\qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

são definidas como adição membro-por-membro e multiplicação de todos membros com um escalar $\beta \in \mathbb{R}$. Checando todos axiomas vê-se que $\mathbb{R}^n$ é um espaco vetorial sobre o corpo dos números reais, notação $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^n$ só. O vetor nulo, também chamado de **origem**, é a lista

$$\mathcal{O} = (0, \dots, 0)$$

e o inverso de um elemento $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é a lista $(-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)$ a qual denotamos com o símbolo $-u$.

O ***i*-ésimo vetor canônico** é a lista de $n$ membros

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

cujo $i$-ésimo membro é o número 1 e todos outros sao nulo 0. O conjunto

$$\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\} \tag{1.2.1}$$

de todos os vetores canônicos é chamado de **base canônica** de $\mathbb{R}^n$.

**Exemplo 1.2.4** (O espaço vetorial $\mathbb{R}^\infty$ sobre $\mathbb{R}$)**.** O conjunto

$$\mathbb{R}^\infty := \{u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \in \mathbb{R}\}$$

de todas as sequencias reais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ sob adição e multiplicação membro-por-membro como no exemplo prévio, notação $(\mathbb{R}^\infty, +, \cdot, \mathbb{R})$.

**Comentário 1.2.5** ($\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^\infty$)**.** Os espaços vetoriais $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^\infty$ sobre qualquer corpo $\mathbb{K}$ são definidos analogamente Exemplos 1.2.3 e 1.2.4.

### 1.2.2 Matrizes

**Exemplo 1.2.6** (Espaço vetorial das matrizes $m \times n$)**.** O **espaço vetorial das matrizes $\boldsymbol{m \times n}$ sobre um corpo** $\mathbb{K}$ é o conjunto

$$\mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K}) := \left\{\mathbf{a} = (a_{ij}) \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{K},\, i = 1, \dots m,\, j = 1, \dots, n\right\}$$

onde a matriz $\mathbf{a} = (a_{ij})$ é o quadro de escalares com $m$ linhas e $n$ colunas [6]

$$\mathbf{a} = (a_{ij}) := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

munido com a adição (entrada por entrada)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (c_{ij})\,, \qquad c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

e a multiplicação escalar (entrada por entrada)

$$\beta\mathbf{a} = \beta\,(a_{ij}) := (c_{ij})\,, \qquad c_{ij} := \beta a_{ij}$$

para qualquer escalar $\beta \in \mathbb{K}$. Uma **matriz quadrada** é uma matriz $n \times n$.

O vetor nulo é a matriz nula $\mathbf{0}$ cujas entradas são todas o escalar nulo $0 \in \mathbb{K}$. O elemento inverso aditivo, notação $-\mathbf{a}$, de uma matriz $\mathbf{a} = (a_{ij})$ tem como entradas os inversos aditivos dos $a_{ij}$, notação $-a_{ij}$.

No caso do corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ usamos a notação $\mathrm{M}(m \times n) := \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{R})$ para o **espaço vetorial dos matrices reais $\boldsymbol{m \times n}$**.

**Definição 1.2.7** (Linhas e colunas de uma matriz)**.** Seja $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n)$ uma matriz $m \times n$. Note-se que o primeiro índice $i$ de uma entrada $a_{ij}$ indica a linha e o segundo $j$ a coluna dela. Tendo isso na vista vamos denotar a **$\boldsymbol{k}$-ésima coluna**, respectivamente a **$\boldsymbol{\ell}$-ésima linha**, de uma matriz $\mathbf{a}$ com os símbolos

$$\mathbf{a}_{\bullet k} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_{\ell\bullet} = \begin{bmatrix} a_{\ell 1} & \dots & a_{\ell m} \end{bmatrix}$$

[6] Os escalares $a_{ij}$ são chamadas as **entradas da matriz**. Observe que a entrada $a_{ij}$ está localizada na $i$-ésima linha e $j$-ésima coluna.

Temos escolhido o símbolo $\bullet$ para sugerir "este índice é aberto" – ele corre e assim gera uma lista, ou vertical ou horizontal dependente se $\bullet$ fica no primeiro ou no segundo lugar. Assim podemos escrever a matriz **a** nas formas seguintes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\bullet} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\bullet} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\bullet 1} & \dots & \mathbf{a}_{\bullet n} \end{bmatrix}$$

### 1.2.3 Funções e polinômios

**Exercício 1.2.8.** Dado um conjunto não-vazio $X \neq \emptyset$ e um corpo $\mathbb{K}$, seja

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) := \{f \mid f : X \to \mathbb{K} \text{ função}\}$$

o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{K}$. Adição de funções e multiplicação com um escalar são definidas assim

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

para todos os $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostre que $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

**Comentário 1.2.9.** A próxima observação ilustra o poder da matemática e um *ponto fundamental* dela - economizar através de abstração e *encontrar o certo ponto da vista*.

**Observação 1.2.10.**

a) Se $X = \{1, \dots, n\}$, então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$.
b) Se $X = \mathbb{N}$, então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^\infty$.
c) Se $X = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$, então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathrm{M}(m \times n)$.

**Exercício 1.2.11** (Polinômios $\mathcal{P}(\mathbb{K})$)**.** Dados escalares $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, então chama-se uma soma finita

$$p = p(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$$

de **polinômio** na variável $x \in \mathbb{K}$ e, no caso $\alpha_n \neq 0$, de **grau** $\boldsymbol{n}$. Forneça o conjunto dos polinômios com uma estrutura de um espaço vetorial $(\mathcal{P}(\mathbb{K}), +, \cdot, \mathbb{K})$.

### 1.2.4 Excurso: Escalonamento de matrizes

**Definição 1.2.12** (Operações elementares)**.** Pode-se aplicar para as linhas de uma matriz três tipos de operações, as chamadas **operações elementares**:

$(\mathrm{oe1})_{\updownarrow}$ trocar duas linhas

$(\mathrm{oe2})_{\cdot}$ multiplicar uma linha com um escalar $\alpha$

$(\mathrm{oe3})_{+}$ adicionar uma linha para uma outra

### Processo de escalonamento

Chama-se uma matriz **escalonada** se em cada linha o primeiro elemento não-nulo está à esquerda do primeiro elemento não-nulo da próxima linha. Exemplos

$$\text{escalonadas: } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{não é: } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Numa matriz *escalonada* os primeiros elementos não-nulos das linhas são chamados de **pivôs** da matriz escalonada.

**Definição 1.2.13.** Uma matriz pode ser transformada numa matriz escalonada aplicando operações elementares. O processo é repetir os três passos seguintes:

1. Localiza a primeira coluna não-nula e nela o primeiro elemento não-nulo, dizemos $a$. Troca a linha de $a$ e a primeira linha.
2. Embaixo de $a$ anulamos todo elemento não-nulo, dizemos $b$: Multiplique a linha de $b$ com $-a/b$, depois adiciona a linha de $a$. Continue ate todos elementos embaixo de $a$ são nulos.
3. Esqueça a linha e a coluna de $a$ e trata a matriz reduzida começando de novo com passo 1.

O processo de escalonar uma matriz $\mathbf{a}$ termina com uma matriz escalonada a qual denotamos de $\mathbf{a}_{\text{esc}}$.

**Exemplo 1.2.14.** Ilustramos o escalonamento. Seja $Li$ a $i$-ésima linha.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L1\leftrightarrow L2]{1.} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2.\\ -\frac{2}{4}L3}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[adic.\,L1]{2.\,na\,L3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[e\ col.\,de\ 2]{3.\,esq.\,linha} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e agora começamos de novo com passo 1 tratando a matriz reduzida

$$\xrightarrow[L2\leftrightarrow L2]{1.} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2.\\ -\frac{1}{1}L3}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[adic.\,L2]{2.\,na\,L3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### Aplicação: Sistemas lineares

Seja $\mathbf{a}$ uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$ uma lista ordenada com $m$ membros. Agora adiciona para as $n$ colunas de $\mathbf{a}$ a lista $b$ como a $(n+1)$-ésima coluna para obter a chamada **matriz aumentada**, notação

$$[\mathbf{a} : b] := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

**Definição 1.2.15.** Suponha a matriz $\mathbf{a}$ e a lista $b$ são dadas. Então queremos saber se existe uma solução $x = (x_1, \dots, x_n)$ da equação $\mathbf{a}x = b$, ou seja do **sistema linear (SL) de $m$ equações a $n$ incógnitas**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.2.2}$$

É útil chamar a matriz aumentada $[\mathbf{a} : b]$ o **sistema linear** definido por (1.2.2). A lista $b = (b_1, \dots, b_m)$ é chamada de **inomogeneidade** do sistema linear. O caso $b = \mathcal{O} = (0, \dots, 0)$ chama-se de **sistema linear homogêneo (SLH)**.

O sistema linear pode ser escrito equivalentemente na forma

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{1.2.3}$$

O lado esquerdo é um exemplo de uma chamada "combinação linear" das colunas da matriz $\mathbf{a}$ representando o vetor $b$ – um conceito fundamental o qual vamos tratar no próximo parágrafo.

**Comentário 1.2.16.** Note-se que o lado esquerdo de (1.2.3) corre sobre toda a imagem da matriz $\mathbf{a}$ se variamos $x$ sobre todas as listas. Então um SL $[\mathbf{a} : b]$ tem uma solução se e somente se a lista $b$ é elemento da imagem da matriz $\mathbf{a}$.

Lembramos do curso MA141 "Geometria Analítica" o seguinte

**Teorema 1.2.17.** *Uma lista $x$ é solução do sistema linear $[\mathbf{a} : b]$ se e somente se $x$ é solução do sistema linear associado à matriz escalonada $[\mathbf{a} : b]_{\mathrm{esc}}$.*

**Exemplo 1.2.18** (Resolução de um sistema linear usando escalonamento)**.** Para encontrar as soluções $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ do sistema linear

$$\begin{cases} y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x - 2z = 0 \end{cases}$$

primeiro, formamos a matriz aumentada $[\mathbf{a} : b]$ onde $b = (0, 0, 0) =: \mathcal{O}$, segundo, escalonamos ela, e terceiro, **resolvemos "de baixo para cima"**. Segundo Teorema 1.2.17 uma solução de $[\mathbf{a} : b]_{\mathrm{esc}}$ também resolve $[\mathbf{a} : b]$, e vice versa. Exemplo 1.2.14 mostra as matrizes $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}_{\mathrm{esc}}$. Note-se que no caso especial quando um sistema linear é *homogêneo*, ou seja $b = \mathcal{O}$, vale a fórmula seguinte

$$[\mathbf{a} : \mathcal{O}]_{\mathrm{esc}} = [\mathbf{a}_{\mathrm{esc}} : \mathcal{O}]$$

No nosso caso o lado direito desta fórmula representa o SLH

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

**Resolução "de baixo para cima":**

LINHA 3. Começamos embaixo com a ultima linha $0x + 0y + 0z = 0$ a qual não representa nenhuma restrição para $x, y, z$.
LINHA 2. Progredimos para cima, ou seja para a linha dois $y + 2z = 0$. Escolha uma variável para ser a variável dependente da(s) outra(s) variáveis, as quais variam livremente no corpo. No nosso caso só tem uma outra e o corpo é $\mathbb{R}$. Escolhemos por exemplo como variável dependente $y = y(z) = -2z$ como função da variável $z$ a qual varia livremente sobre os números reais, ou seja $z \in \mathbb{R}$.
LINHA 1. Progredimos para cima, ou seja para a primeira linha

$$0 = 2x + y(z) + z = 2x - 2z + z = 2x - z$$

lembrando que $z \in \mathbb{R}$ é livre. Então $x = x(z) = \frac{1}{2}z$ para qualquer $z \in \mathbb{R}$.

**Conclusão.** Toda solução do SL é da forma

$$\begin{bmatrix} x(z) \\ y(z) \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}z \\ -2z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde $z \in \mathbb{R}$ é um número real arbitrário. Então o SL não tem só uma solução – tem uma para cada um numero real $z$. Isso conclui o Exemplo 1.2.18.

**Comentário 1.2.19** (Corpos gerais $\mathbb{K}$)**.** As construções nesta Seção 1.2.4 para matrizes e listas cujas entradas são elementos do corpo $\mathbb{R}$ funcionam do mesmo jeito para matrizes com entradas num corpo geral $\mathbb{K}$.

## 1.3 Independência linear

### 1.3.1 Combinação linear

**Definição 1.3.1.** Seja $E$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $X \subset E$ um subconjunto. Uma **combinação linear (CL) em $\boldsymbol{X}$** é uma soma *finita*

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_\ell v_\ell}_{=: w \in E}$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{K}$ e $v_1, \ldots, v_\ell \in X$ são escolhas de, respectivamente, escalares e vetores do conjunto $X$. Dizemos que

> *"a CL dos vetores $v_1, \ldots, v_\ell$ representa o vetor $w$"*

ou que *"o vetor $w$ é CL dos vetores $v_1, \ldots, v_\ell$"*.

Uma CL com todos coeficientes $\alpha_i$ nulos é chamado de **combinação linear trivial (CL-t)**. Obviamente uma CL-t sempre representa o vetor nulo. O caso contrário – uma CL tal que não todos coeficientes são nulos – é chamado de **combinação linear não-trivial (CL-ñt)**.

Observe: ainda se os vetores $v_1, \ldots, v_\ell$ são elementos de um subconjunto $X$, uma combinação linear deles não encontra-se necessariamente em $X$. Encontra-se sim, quando $X$ é um chamado "subespaço".

**Exercício 1.3.2.** a) Escreva o vetor $b = (1, -3, 10)$ como combinação linear dos vetores $u = (2, -3, 5)$, $v = (1, 1, 0)$, e $w = (1, 0, 0)$.
b) Sejam $u = (1, 1)$, $v = (1, 2)$ e $w = (2, 1)$. Encontre números $a, b, c$ e $\alpha, \beta, \gamma$ todos não-nulos, tais que

$$au + bv + cw = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

com $a \neq \alpha$, $b \neq \beta$ e $c \neq \gamma$.

[Dica: a) Determinar os coeficientes $x, y, z$ na CL de $u, v, w$ a qual representa $b$ lida a um SL. Escalonamento.[7]
b) Defina $x = a - \alpha$, $y = b - \beta$, e $z = c - \gamma$ para obter um SLH. Resolve. ][8]

[7] encontre "o certo ponto da vista" (Comentário 1.2.9) e o SL vai chegar já escalonada..

[8] Respostas para seu controle: a) $(x, y, z) = (2, 3, -6)$. b) $(x, y, z) = z(-3, 1, 1)$. Escolha um $z \neq 0$, por exemplo $z = 1$. Entao $(a, b, c) = (\alpha - 3, 1 + \beta, 1 + \gamma)$. Toda escolha de reais $\alpha \neq 0, 3$ e $\beta, \gamma \neq 0, -1$ da uma solução. A escolha $\alpha = 5$ e $\beta = \gamma = 1$ resulta em $a = b = c = 2$.

# Aula 3

### 1.3.2 Independência linear

**Definição 1.3.3** (Independência linear)**.** Um subconjunto $X$ de um espaço vetorial $E$ é chamado de **conjunto linearmente independente (LI)** se não existe nenhuma combinação linear não-trivial de vetores *dois-a-dois diferentes* $v_1, \ldots, v_\ell \in X$ representando o vetor nulo. No caso contrario $X$ é chamado de **conjunto linearmente dependente (LD)**.

Nas outras palavras, chama-se $X \subset E$ de **subconjunto LI** se

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_\ell v_\ell = \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_\ell = 0 \tag{1.3.1}$$

para toda escolha (finita) de vetores $v_1, \ldots, v_\ell \in X$ *dois-a-dois diferentes.*[9]

**Comentário 1.3.4.**

(i) O conjunto vazio $\emptyset$ é LI: como não contem elementos, não existe nenhuma CL. Chama-se tal argumentação de **verdade vazia**.

(ii) Um conjunto $X = \{v\}$ contendo só um vetor é LI se e somente se $v \neq \mathcal{O}$.

(iii) Se (1.3.1) vale para uma escolha $v_1, \ldots, v_\ell$, então vale para qualquer subescolha destes vetores. [Dica: Use os coeficientes $\alpha_i = 0$ nos restantes.]

Para provar a afirmação (ii), lembra (1.1.1).

**Lema 1.3.5.** *Todos subconjuntos $A$ de um conjunto LI $X$ são LI.*

*Demonstração.* Os elementos de $A$ são elementos de $X$, mas (1.3.1) vale para os elementos de $X$ pela hipótese. □

**Exemplo 1.3.6.** Para saber se o subconjunto $X := \{(1,0), (2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é LI temos que checar (1.3.1) para todas escolhas finitas de elementos $v_i$ de $X$ dois-a-dois diferentes. Como $X$ é um conjunto finito, e tendo em vista Comentário 1.3.4 (iii), começamos com a escolha máxima, ou seja todos os (dois) elementos. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Conforme (1.3.1) suponhamos a primeira igualdade

$$(0,0) = \alpha(1,0) + \beta(2,1) = (\alpha + 2\beta, \beta)$$

e recebemos a segunda igualdade pelas regras de multiplicação escalar e adição de vetores de $\mathbb{R}^2$ Comparando os segundos membros vemos que $0 = \beta$ o qual usamos na comparação dos primeiros membros: recebemos $0 = \alpha + 2 \cdot 0 = \alpha$. Assim temos provado que todos coeficientes $\alpha$ e $\beta$ sao nulos. Então $X$ é LI.

**Exercício 1.3.7.** Quais dos seguintes conjuntos $X_i$ de vetores de $\mathbb{R}^2$ são ou não são conjuntos linearmente independentes (LI)? Explique porque são ou não são.

1. Elementos de $X_1$: os vetores $(1,1)$ e $(-1,-1)$.
2. $X_2 := \{(2, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 2)\}$.
3. Escolha dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$. Então defina $X_3 := \{u, v, (1,1)\}$.

[9] Para que precisa-se a condição *dois-a-dois diferentes*?

**Exercício 1.3.8.** Prove as afirmações seguintes.

1. A base canônica $\mathcal{E}^n$, veja (1.2.1), é um conjunto LI no $\mathbb{R}^n$.
2. Suponha $u, v \in \mathbb{K}^2$ não são múltiplos um do outro. Prove que o conjunto $\{u, v\}$ é LI.

   [Dica: Seja $\alpha u + \beta v = \mathcal{O}$. Considere $\beta \neq 0$ e, lembrando (1.1.1), $\beta = 0$.]
3. Sejam $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ vetores de $\mathbb{R}^n$. Prove que um deles é múltiplo do outro se, e somente se, para todo $i, j = 1, \ldots, n$ temos $x_i y_j = x_j y_i$.
4. O subconjunto $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subset \mathrm{M}(2 \times 2)$ composto das matrizes

   $$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

   é um conjunto LI;
5. O conjunto $X$ composto dos três polinômios

   $$\begin{aligned} p = p(x) &= x^3 - 5x^2 + 1, \\ q = q(x) &= 2x^4 + 5x - 6, \\ r = r(x) &= x^2 - 5x + 2. \end{aligned}$$

   é um conjunto LI no espaço vetorial $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinomios:
6. Se o conjunto de vetores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é LI, prove que o mesmo se dá com o conjunto $\{v_1, v_2 - v_1, \ldots, v_m - v_1\}$. Vale a recíproca?

# Capítulo 2

# Subespaços

## 2.1 Definição e exemplos

**Definição 2.1.1.** Um subconjunto $F \subset E$ de um espaço vetorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ é chamado de **subespaço** se é **fechado sob as duas operações**, ou seja

(i) $u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$ ($F$ é fechado sob adição)

(ii) $\alpha \in \mathbb{K}, u \in F \Rightarrow \alpha u \in F$ ($F$ é fechado sob multiplicação escalar)

**Exercício 2.1.2** (Vetor nulo)**.** O vetor nulo de um subespaço $F$ é o vetor nulo $\mathcal{O}$ do espaço vetorial ambiente. [Dica: Mostre $\mathcal{O} \in F$. O vetor nulo de $F$ é único.]

**Lema 2.1.3.** *Seja $F$ um subespaço de um espaço vetorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$. Então*

a) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K},\ v_1, \ldots, v_k \in F \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \in F$ *(fechado sob CL)*

b) *$F$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ onde as duas operações são aquelas de $E$ restrito ao subconjunto $F \subset E$.* *(subespaços são espaços vetoriais)*

*Demonstração.* a) Indução. b) As restrições tomam valores em $F$ segundo parte a) e as axiomas valem como os elementos de $F$ são elementos de $E$ para as quais os axiomas valem pela hipótese que $E$ é um espaço vetorial. □

Checar se um subconjunto $F \subset E$ é um espaço vetorial é bastante trabalhoso dado os muitos axiomas. Isso mostra o valor alto da parte b) do lema dizendo que é suficiente checar "fechado sob as duas operações" – tarefa rapidinha.

**Exercício 2.1.4.** Mostre que são subespaços de um espaço vetorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$:

a) $F := \{\mathcal{O}\}$ (o subespaço mínimo / trivial)

a) $F := E$ (o subespaço máximo)

b) $\mathbb{K}v := \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ (a reta passando $v$ e a origem $\mathcal{O}$)
onde $v$ é um vetor não-nulo de $E$. Observe que $\mathbb{K}\mathcal{O} = \{\mathcal{O}\}$ é um ponto só.

**Exemplo 2.1.5** (O subespaço $\mathbb{R}_0^\infty$ de $\mathbb{R}^\infty$)**.** O subconjunto $\mathbb{R}_0^\infty \subset \mathbb{R}^\infty$, composto de todas sequencias reais tal que só um número finito de membros são nao-nulos, é um espaço vetorial: Se a lista $u$ tem $k$ membros não-nulos e $v$ tem $\ell$, então (i) $u+v$ tem no máximo $k+\ell$ e (ii) $\alpha u$ tem no máximo $k$.

**Exercício 2.1.6** (Espaços vetoriais de funções)**.** O conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R}) := \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ das funções reais é um espaço vetorial sob adição e multiplicação com constantes $\alpha \in \mathbb{R}$, veja Exercício 1.2.8. Para $n \in \mathbb{N}_0$ seja

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) := \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto dos **polinômios reais do grau menor ou igual *n*** e $\mathcal{P}(\mathbb{R}) := \cup_{n=0}^\infty \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os **polinômios reais**. Seja

$$C^0(\mathbb{R}) := C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$$

o conjunto das **funções contínuas**. Para $k \in \mathbb{N}$ seja $C^k(\mathbb{R}) := C^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$ o conjunto das **funções *k* vezes continuamente diferenciáveis**. Chama-se

$$C^\infty(\mathbb{R}) := C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\mathbb{R})$$

o conjunto das **funções suaves**. Sejam $n \in \mathbb{N}_0$ e $k \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^k(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

são subespaços do espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ do Exercício 1.2.8. Segundo parte b) do Lema 2.1.3 todos estes conjuntos são espaços vetoriais sob adição de funções e multiplicação com constantes.

**Exemplo 2.1.7** (Hiperplanos no $\mathbb{R}^n$)**.** Dada uma lista $\alpha \in \mathbb{R}^n$, o subconjunto

$$\mathrm{H}_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = \mathcal{O}\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. O vetor nulo lida ao subespaço máximo $\mathrm{H}_\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$. No caso não-nulo $\alpha \neq \mathcal{O}$ chama-se $\mathrm{H}_\alpha$ de **hiperplano** no $\mathbb{R}^n$ passando a origem $\mathcal{O}$.

**Lema 2.1.8** (Conjunto de subespaços é fechado sob interseções)**.** *Cada interseção $F := \cap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ de subespaços $F_\lambda$ de um espaco vetorial $E$ é um subespaço.*

*Demonstração.* Dado $u, v \in F := \cap_\lambda F_\lambda$, ou seja $u, v \in F_\lambda\ \forall \lambda$. Como subespaço cada um $F_\lambda$ é fechado sob adicao, ou seja $u+v \in F_\lambda$ para todos os $\lambda \in \Lambda$. Em símbolos $u+v \in \cap_\lambda F_\lambda =: F$. Analogamente $F$ é fechado sob mult. escalar. □

**Exemplo 2.1.9.** Dada uma matriz $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n)$, então o conjunto

$$F_\mathbf{a} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}x = \mathcal{O}\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Para ver isso lembramos de (1.2.2) que $\mathbf{a}x = \mathcal{O}$ é o SLH

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

para $n$ incógnitas $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, notação $x := (x_1, \ldots, x_n)$. Note-se que as soluções $x$ da primeira linha formam o hiperplano $\mathrm{H}_1 := \mathrm{H}_{\mathbf{a}_{1\bullet}}$ associado à primeira linha $\mathbf{a}_{1\bullet}$ da matriz $\mathbf{a}$. Isso é o certo ponto da vista, com efeito assim

$$F_{\mathbf{a}} = \mathrm{H}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{H}_n$$

é uma interseção de subespaços e por isso é um subespaço segundo Lema 2.1.8.

**Exercício 2.1.10.**

1. Quais dos seguintes subconjuntos $X_j$ são subespaços de $\mathbb{R}^n$? Em cada caso faça um desenho e explique porque é subespaço ou não é.

   (a) $X_1 := \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$;
   (b) $X_2 := \{(\alpha + 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$;
   (c) $X_3 := \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \text{ reais não-negativos}\} \subset \mathbb{R}^2$.

2. (LI transfere-se a espaços vetoriais *ambientes*). Seja $F$ um subespaço de um espaço vetorial $E$. Mostre que se um conjunto de elementos de $F$ é LI em respeito ao espaço vetorial $F$ então o também é LI em respeito ao espaço vetorial $E$.

## 2.2 Conjuntos de geradores

**Definição 2.2.1** (Subespaço gerado por um subconjunto)**.** Seja $E$ um espaço vetorial e $X$ um subconjunto. O **subespaço de *E* gerado por *X*** é o conjunto

$$\langle X \rangle := \{\text{todas as combinações lineares dos elementos de } X\}$$

caso $X \neq \emptyset$. Definimos que o conjunto vazio $\langle \emptyset \rangle := \{\mathcal{O}\}$ gera o subespaço trivial.

Dizemos que $X$ é um **conjunto de geradores**, ou **o conjunto *X* gera *E***, se cada um elemento de $E$ é uma CL de elementos de $X$, em símbolos $E = \langle X \rangle$.

**Exercício 2.2.2.** Mostre que $\langle X \rangle$ é um subespaço de $E$ e que $\mathbb{K}v = \langle \{v\} \rangle =: \langle v \rangle$.

**Lema 2.2.3.** *Seja $X$ um subconjunto de um espaço vetorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$. Então*

(i) $X \subset \langle X \rangle$ (contido no subespaço gerado)

(ii) $Y \subset X \Rightarrow \langle Y \rangle \subset \langle X \rangle$ (naturalidade sob inclusão)

(iii) $F \subset E$ *subespaço* $\Rightarrow \langle F \rangle = F$ (não muda subespaços)

(iv) *Um subespaço $F \subset E$ contendo $X$ contem $\langle X \rangle$.* (respeita subespaços)

*Demonstração.* (i) Seja $v \in X$, então $v \overset{\text{(comp.)}}{=} 1v \in \langle X \rangle$. (ii) Como $Y \subset X$, CLs em $Y$ são CLs em $X$. (iii) Igualdade é consequência das duas inclusões $F \subset \langle F \rangle \subset F$, onde a primeira é (i) e para a segunda usamos que os elementos de $\langle F \rangle$ sao CLs em $F$, mas um subespaco é fechado sob CLs segundo Lema 2.1.3 a). (iv) Com efeito $F \overset{\text{(iii)}}{=} \langle F \rangle \overset{\text{(ii)}}{\supset} \langle X \rangle$. $\square$

**Lema 2.2.4.** *Todo subconjunto LI $\{u, v\} \subset \mathbb{R}^2$ de dois elementos já gera $\mathbb{R}^2$.*

*Demonstração.* Lema A.2.1. $\square$

**Lema 2.2.5** (Os subespaços de $\mathbb{R}^2$)**.** *$\{\mathcal{O}\}$, $\mathbb{R}^2$, e as retas passando a origem.*

*Demonstração.* '$\supset$' Exercício 2.1.4. '$\subset$' Seja $F$ um subespaço de $\mathbb{R}^2$. Caso $F = \{\mathcal{O}\}$, pronto. Caso contrario existe $u \in F$ não-nulo. Se os demais $f \in F$ são múltiplos de $u$ temos $F = \mathbb{R}u$, pronto. Caso contrario existe um $v \in F$, não múltiplo de $u$. Entao $\{u, v\}$ é LI segundo Exercício 1.3.8 parte 2. Mas neste caso segundo Lema 2.2.4 e Lema 2.2.3 (iv) obtemos $\mathbb{R}^2 = \langle \{u, v\} \rangle \subset F \subset \mathbb{R}^2$. $\square$

**Exemplo 2.2.6** (Os espaços $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^\infty_0$, $\mathbb{R}^\infty$)**.**

a) A base canonica $\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$, veja (1.2.1), gera $\mathbb{R}^n$. Com efeito

$$\mathbb{R}^n \ni v = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Para $i \in \mathbb{N}$ seja $e_i \in \mathbb{R}^\infty_0$ a lista com todos membros nulos exceto o $i$-ésimo cujo é 1. Então a **base canônica** $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$ gera $\mathbb{R}^\infty_0$.

c) O base canônica $\mathcal{E}^\infty$ não gera $\mathbb{R}^\infty$: Uma CL deve ser uma soma *finita*, tente escrever o elemento cujos membros são todos 1 como uma CL.

**Exemplo 2.2.7** (Polinômios)**.** O conjunto de **monômios** $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ gera $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ e o conjunto de todos os monômios $\{1, x, x^2, \dots\}$ gera $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

**Exemplo 2.2.8** (Sistemas lineares)**.** Dado um sistema linear $[\mathbf{a} : b]$ onde $\mathbf{a}$ é uma matriz $m \times n$. Sabemos de (1.2.3) que existe uma solução $x$ se e somente se a lista $b$ é CL das colunas da matriz $\mathbf{a}$. Consequentemente se as colunas de $\mathbf{a}$ formam um conjunto de geradores de $\mathbb{R}^n$, então para cada uma inomogeneidade $b \in \mathbb{R}^m$ o SL admite uma solução.

## 2.3 Soma direta

**Definição 2.3.1** (Soma de subconjuntos)**.** Sejam $X, Y$ subconjuntos de um espaço vetorial $E$. A **soma de $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$** é o subconjunto de $E$ de todas as somas

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Em vez de $\{u\} + Y$ escreve-se $u + Y$ e chama-se **a translação de $\boldsymbol{Y}$ por $\boldsymbol{u}$**.

**Lema 2.3.2.** *A soma de dois subespaços é gerado da união deles, em símbolos*

$$F, G \subset E \text{ subespacos} \quad \Rightarrow \quad F + G = \langle F \cup G \rangle$$

*Particularmente, a soma de dois subespaços é um subespaço mesmo.*

*Demonstração.* Para provar igualdade de dois conjuntos prova-se as duas inclusões. '$\subset$' Os elementos de $F+G$ sao CLs só da forma especial $f+g$ enquanto $\langle F \cup G \rangle$ contem todas CLs em $F \cup G$. '$\supset$' Pegue um elemento $h$ de $\langle F \cup G \rangle$ e use comutatividade para re-escrever a soma finita com os somandos em $F$ no frente e depois aqueles em $G$. Assim recebemos um elemento, igual $h$, e em $F+G$. □

**Definição 2.3.3** (Soma direta de subespaços)**.** No caso da interseção trivial $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$ de dois subespaços de um espaço vetorial $E$ escreve-se $F_1 \oplus F_2$ em vez de $F_1 + F_2$ e chama-se **soma direta dos subespaços $F_1$ e $F_2$.**

O símbolo $F \oplus G$ é simplesmente uma abreviação para duas informações, com efeito

$$F \oplus G = H \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} F \cap G = \{\mathcal{O}\} \\ F + G = H \end{cases}$$

Use-se a soma direta para decompor um vetor unicamente em componentes.

**Teorema 2.3.4.** *Sejam $F_1, F_2 \subset F$ três subespaços de um espaço vetorial $E$:*

$$F = F_1 \oplus F_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \in F,\ \exists!\ f_1 \in F_1,\ f_2 \in F_2 \ \text{ tal que } \ f = f_1 + f_2$$

*Demonstração.* Teorema A.2.2. □

**Exercício 2.3.5.** No espaço vetorial $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ das funções $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sejam

$$F_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ que se anulam em todos os pontos do intervalo } [0,1]\}$$
$$F_2 = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ que se anulam em todos os pontos do intervalo } [2,3]\}$$

Mostre que $F_1$ e $F_2$ são subespaços vetoriais de $E$, que $E = F_1 + F_1$, mas não se tem $E = F_1 \oplus F_2$.

**Exercício 2.3.6.** Verdadeiro ou falso? Para todos subconjuntos $X, Y \subset E$ vale

$$\text{(i)} \quad \langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$$
$$\text{(ii)} \quad \langle X \cap Y \rangle = \langle X \rangle \cap \langle Y \rangle$$

**Exercício 2.3.7.** Uma matriz quadrada $\mathbf{a} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ chama-se **simétrica** respectivamente **anti-simétrica** quando vale

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j \qquad \text{respectivamente} \qquad a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i,j$$

Prove que a) o conjunto $\mathcal{S} = \mathcal{S}(n)$ das matrizes simétricas $n \times n$ e o conjunto $\mathcal{A} = \mathcal{A}(n)$ das anti-simétricas são subespaços vetoriais de $\mathrm{M}(n \times n; \mathbb{K})$ e b) que

$$\mathrm{M}(n \times n; \mathbb{K}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

[Dica: b) Considere as matrizes $\mathbf{a}^+ := \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{a})$ e $\mathbf{a}^- := \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{a})$.]

# Aula X

# Capítulo 3

# Bases

Durante o Capítulo 3 denotamos de $E$ um espaço vetorial

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K})$$

sobre um corpo $\mathbb{K}$.

## 3.1 Definição e exemplos

**Teorema 3.1.1.** *Seja $X \subset E$ um subconjunto tal que $|X| \geq 2$. Então*

a) *$X$ é LI $\Leftrightarrow$ nenhum elemento de $X$ é CL de outros elementos de $X$*

b) *$X$ é LD $\Leftrightarrow$ existe um elemento de $X$ que é CL de outros elementos de $X$*

*Demonstração.* a) '$\Rightarrow$' Seja $X$ LI, suponha por absurdo que um elemento $u \in X$ fosse CL de outros elementos (tem outros porque $|X| \geq 2$), ou seja $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$ onde os $v_i \in X$ e os $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Adicionando $-v$ em ambos lados obtemos $\mathcal{O} = (-1)v + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$. Mas como tem um coeficiente não-nulo $(-1)$, isso é uma CL-ñt em $X$ representando o vetor nulo. Assim $X$ é LD. Contradição.
'$\Leftarrow$' Suponhamos por absurdo $X$ fosse LD. Então existe uma CL em $X$ representando o vetor nulo com pelo menos um coeficiente, dizemos $\alpha_1$, nao-nulo

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \mathcal{O}$$

Caso $k = 1$. Então $\alpha_1 v_1 = \mathcal{O}$ e assim $v_1 = \alpha_1^{-1}\mathcal{O} = \mathcal{O}$. Como $|X| \geq 2$, existe um outro elemento $v_2$ em $X$. Então $v_1 = 0 v_2$ é múltiplo (assim CL) de um outro elemento de $X$. Contradição. Caso $k \geq 2$. Então $v_1 = -\alpha_1^{-1}\alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_1^{-1}\alpha_k v_k$ é CL de outros elementos de $X$. Contradição. b) é equivalente a a). □

**Corolário 3.1.2** (Unicidade de coeficientes de CLs em conjuntos LI)**.** *Seja $\{v_1, \ldots, v_k\}$ um subconjunto LI de $E$. Então*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_k = \beta_k$$

*Demonstração.* Pela hipótese $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)v_k = \mathcal{O}$. LI diz que todos coeficientes são nulos. □

**Lema 3.1.3.**

a) *Um subconjunto $Y$ de um conjunto LI $X$ é LI.* (Subconjuntos herdam LI)

b) *Um conjunto $X$ contendo $Y$ LD é LD.* (Superconjuntos herdam LD)

c) *Um subconjunto LI $X$ num sub<u>espaço</u> $F \subset E$, também é LI em $E$.* (LI transfere-se para super<u>espaços</u>)

*Demonstração.* a) Como $X$ é LI, toda CL em $X$ representando $\mathcal{O}$ tem todos coeficientes nulos. Como $Y \subset X$, toda tal CL em $Y$ é uma em $X$ e assim tem todos coeficientes nulos. b) Como $Y \subset X$, uma CL-ñt em $Y$ representando $\mathcal{O}$ é uma tal em $X$. c) Isso é simplesmente o fato que o vetor nulo de um subespaço é o vetor nulo do espaço vetorial ambiente, veja Exercício 2.1.2. □

**Exemplo 3.1.4** (Bases)**.**

a) **Base canônica** $\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ onde $n \in \mathbb{N}_0$.

   Caso $n \geq 1$. Exercício 1.3.8 confirma LI e Exercício 2.2.6 diz que gera $\mathbb{R}^n$. Caso $n = 0$. Note que $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ é o espaço vetorial trivial. O conjunto vazio $\mathcal{E}^0 = \emptyset$ é LI (Comentário 1.3.4) e gera o espaço trivial (Definição 2.2.1).

b) **Os monômios** $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

   Gerando: Por definição de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. LI: Uma CL de monômios é um polinômio $p$. Se $p$ representa o vetor nulo (o polinômio constantemente nulo) todos coeficientes devem se anular porque polinômios de grau $\ell \geq 1$ tem um numero finito de raizes. Caso $p$ é de grau zero, ele é da forma $p(x) = \alpha_0$ e para se anular $\alpha_0$ deve-se anular.

c) Sejam $u = (1, 1)$ e $v = (2, 0)$. Os conjuntos $\{e_1, u\}$ e $\{u, v\}$ são bases.

   São LI segundo Teorema 3.1.1 (os elementos não são múltiplos um do outro), e por isso geram $\mathbb{R}^2$ (Lema A.2.1). Por exemplo, o conjunto $\{e_1, v\}$ é LD (um elemento é múltiplo do outro).

**Definição 3.1.5** (Base)**.** Para um subconjunto $\mathcal{B}$ de $E$ definimos

$$\mathcal{B} \textbf{ base de } E \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{B} \text{ gera } E \\ \mathcal{B} \text{ é LI} \end{cases}$$

Uma **base ordenada** é uma base $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ cujos elementos são enumerados. Conjuntos ordenados correspondem a listas.

## 3.2 Existência e extensão

**Teorema 3.2.1.** *Seja $E$ da dimensão finita* $\dim E = n \in \mathbb{N}_0$.

(a) *Todo conjunto gerando $E$ contem uma base de $E$.*

(b) *Todo subconjunto LI é contido numa base.*

(c) *A dimensão de qualquer subespaço de $E$ é $\leq n$.*

(d) *Um subespaço $F$ de $E$ da mesma dimensão $n$ é igual a $E$.*

**Corolário 3.2.2.** *Todo espaço vetorial $E$ gerado por um conjunto finito $X$ admite uma base $\mathcal{B}$ tal que $|\mathcal{B}|\lambda|X|$.*

**Exercício 3.2.3.**

1. Se $E = F_1 \oplus F_2$, a união $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ de bases de $F_1$ e $F_2$ é uma base de $E$.

2. Sejam $X_1, X_2, \dots$ subconjuntos LI de um espaço vetorial $E$.

   (a) Caso encaixado $X_1 \subset X_2 \subset \dots$, prove que $X = \bigcup X_n$ é LI.

   (b) Se cada $X_n$ tem $n$ elementos, prove que existe um conjunto LI $\tilde{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$ com $x_j \in X_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

   (c) Supondo $E = \mathbb{R}_0^\infty$ e admitindo as hipóteses dos itens anteriores, é verdade que $X = \bigcup X_n$ seja uma base de $E$?

3. Sejam $F_1, F_2 \subset E$ subespaços de dimensão finita. Obtenha uma base do subespaço $F_1 + F_2$ que contenha uma base de $F_1$, uma base de $F_2$ e uma base de $F_1 \cap F_2$.

**Exercício 3.2.4** (Matrizes quadradas)**.**

1. Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{S} \subset \mathrm{M}(n \times n)$ os subespaços das matrizes anti-/simétricas.

   (a) Para cada par $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ seja $\mathbf{e}_{ij}$ a matriz $n \times n$ cujos elementos nas posições $ij$ e $ji$ são iguais a 1 e os demais são zero. Prove que estas matrizes constituem uma base para $\mathcal{S}$.

   (b) De modo análogo, obtenha uma base para $\mathcal{A}$.

   (c) Conclua que

   $$\dim \mathcal{S} = \frac{n(n+1)}{2} \qquad\qquad \dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}$$

   Lembre-se que $\dim \mathrm{M}(n \times n) = n^2$. Conclua que

   $$\mathrm{M}(n \times n) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$$

2. As matrizes $\mathbf{t} = (t_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n)$ tais que $t_{ij} = 0$ quando $i < j$ são chamadas **triangulares inferiores**. Prove que elas constituem um subespaço $\mathcal{T}_* \subset \mathrm{M}(n \times n)$. Obtenha uma base para $\mathcal{T}_*$ e determine a sua dimensão.

3. Obtenha uma base e consequentemente determine a dimensão de cada um dos seguintes subespaços de $\mathrm{M}(n \times n)$ as quais são composto de

   (a) matrizes $\mathbf{a} = (a_{ij})$ de **traço** (a soma dos elementos da diagonal) nulo

   $$\operatorname{tr} \mathbf{a} := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$$

   (b) matrizes cuja primeira e última linha são iguais

   (c) matrizes cuja segunda linha e terceira coluna são iguais

# Parte II

# Teoria das transformações lineares

# Capítulo 4

# Transformações lineares

## 4.1 Exemplos

## 4.2 Matriz de uma transformação linear

## 4.3 Rotações e projeções

## 4.4 Produto de transformações lineares

# Capítulo 5

# Núcleo e imagem

# Apêndice A

# Demonstrações restantes

## A.1 Espaços vetoriais

**Lema A.1.1** (Lemma 1.1.4)**.** *Seja $(G, *)$ um grupo. Então vale o seguinte.*
1) *O elemento neutro é único.*
2) *Os elementos inversos são únicos.*
3) *Para todos os elementos $f, g, h \in G$ vale:*
   a) $f * g = f * h \;\Rightarrow\; g = h$ *(lei da corte)*
   b) $f * g = f \;\Rightarrow\; g = e$
   c) $f * g = e \;\Rightarrow\; g = \bar{f}$

*Demonstração.* 1) Se $e, \tilde{e} \in G$ satisfazem o axioma (elemento neutro), então usando o axioma para $e$ e depois para $\tilde{e}$ obtemos que $e = e * \tilde{e} = \tilde{e}$.
2) Seja $g \in G$. Se $\bar{g}, \tilde{g} \in G$ satisfazem o axioma (inverso) para $g$, então obtemos

$$\bar{g} = e * \bar{g} = \underbrace{(\tilde{g} * g)}_{=e} * \bar{g} = \tilde{g} * \underbrace{(g * \bar{g})}_{=e} = \tilde{g} * e = \tilde{g}$$

usando (elem. neutro) no início e fim, $(\text{inverso})_{\tilde{g}}$, (associatividade), $(\text{inverso})_{\bar{g}}$.
3) a) $g = e * g = (\bar{f} * f) * g = \bar{f} * (f * g) \overset{\text{hip.}}{=} \bar{f} * (f * h) = (\bar{f} * f) * h = e * h = h$.
b) Use a) com $h = e$. c) Use a) com $h = \bar{f}$. □

**Lema A.1.2** (Lemma 1.1.9)**.** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $0 \in K$ é o elemento neutro da adição. Então $0\beta = 0$ e $\beta 0 = 0$ para todos os elementos $\beta \in \mathbb{K}$.*

*Demonstração.* Seja $\beta \in \mathbb{K}$, denotamos o inverso aditivo de $-\beta$. Então

$$\beta \overset{(\text{el.n.})_\cdot}{=} 1\beta \overset{(\text{el.n.})_+}{=} (1+0)\beta \overset{(\text{distr.})}{=} 1\beta + 0\beta \overset{(\text{el.n.})_\cdot}{=} \beta + 0\beta$$

Usamos esta identidade para obter a segunda igualdade no seguinte

$$0 \overset{(\text{inv.})}{=} (-\beta) + \beta = -\beta + (\beta + 0\beta) \overset{(\text{ass.})_+}{=} (-\beta + \beta) + 0\beta \overset{(\text{inv.})}{=} 0 + 0\beta \overset{(\text{el.n.})}{=} 0\beta$$

□

**Lema A.1.3** (Lema 1.1.17)**.** *Para o vetor nulo $\mathcal{O} \in E$ de um espaço vetorial e o elemento neutro aditivo $0 \in \mathbb{K}$ do corpo vale o seguinte.*

(i) $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ *para todos os escalares* $\alpha \in \mathbb{K}$.

(ii) $0v = \mathcal{O}$ *para todos os vetores* $v \in E$.

(iii) *Para todo o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo o vetor $w \in E$ são equivalentes:*

$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O}$$

*Demonstração.* (i) Caso $\alpha = 0$. Como $\alpha\mathcal{O} + 0\mathcal{O} = (\alpha + 0)\mathcal{O} = \alpha\mathcal{O}$, então $0\mathcal{O} = \mathcal{O}$ pela lei da corte (Lema A.1.1 3b) para $(G, *) = (E, +)$).
Caso $\alpha \neq 0$. Tal $\alpha$ tem um inverso aditivo, notação $\alpha^{-1}$. Seja $v \in E$, então

$$v \overset{\text{(comp.)}}{=} 1v \overset{\text{(inv.)}_{\mathbb{K},\cdot}}{=} (\alpha\alpha^{-1})v \overset{\text{(comp.)}}{=} \alpha(\alpha^{-1}v)$$

Usando este resultado no início e no fim do seguinte obtemos que

$$v + \alpha\mathcal{O} = \alpha(\alpha^{-1}v) + \alpha\mathcal{O} \overset{\text{(distr.)}_E}{=} \alpha((\alpha^{-1}v) + \mathcal{O}) \overset{\text{(el.n.)}_{E,+}}{=} \alpha(\alpha^{-1}v) = v$$

Então $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ pela lei da corte (Lema A.1.1 3b) para $(G, *) = (E, +)$).

(ii) Como $v + 0v = 1v + 0v = (1 + 0)v = 1v = v$ a lei da corte diz que $0v = \mathcal{O}$.

(iii) '$\Rightarrow$' Suponha $\alpha w = \mathcal{O}$. Caso $\alpha = 0$, pronto. Caso $\alpha \neq 0$ concluímos que

$$w \overset{\text{(comp.)}}{=} 1w \overset{\text{(el.n.)}_{\mathbb{K},\cdot}}{=} (\alpha^{-1}\alpha)w \overset{\text{(comp.)}}{=} \alpha^{-1}(\alpha w) \overset{\text{hip.}}{=} \alpha^{-1}\mathcal{O} \overset{\text{(i)}}{=} \mathcal{O}$$

'$\Leftarrow$' Se $w = \mathcal{O}$, então $\alpha\mathcal{O} \overset{\text{(i)}}{=} \mathcal{O}$, pronto. Se $\alpha = 0$, então $0w \overset{\text{(ii)}}{=} \mathcal{O}$, pronto. □

**Corolário A.1.4** (Corolário 1.1.18)**.** *Para todos os $\alpha \in \mathbb{K}$ e $w \in E$ vale:*

a) $\alpha(-w) = -(\alpha w)$

b) $(-\alpha)w = -(\alpha w)$

*Demonstração.* a) Temos que mostrar que a soma de $\alpha w$ e o candidato para ser seu inverso aditivo iguale o vetor nulo. Com efeito

$$\alpha w + \alpha(-w) \overset{\text{(distr.)}_E}{=} \alpha(w + (-w)) \overset{\text{(el.n.)}_{E,+}}{=} \alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$$

onde o último passo é parte (i) de Lema A.1.3.
b) Temos o objetivo análogo de chegar ao vetor nulo, com efeito

$$\alpha w + (-\alpha)w \overset{\text{(distr.)}_E}{=} (\alpha + (-\alpha))w \overset{\text{(el.n.)}_{\mathbb{K},+}}{=} 0w = \mathcal{O}$$

onde o último passo é parte (ii) de Lema A.1.3. □

## A.2 Subespaços

**Lema A.2.1** (Lema 2.2.4)**.** *Todo subconjunto LI* $\{u, v\} \subset \mathbb{R}^2$ *gera* $\mathbb{R}^2$*.*

*Demonstração.* Vai ter 4 passos. I. Os vetores $u, v$ nao sao multiplos um do outro: Suponha por absurdo que $u = \alpha v$ para um $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $1u + (-\alpha)v = 1\alpha v - (\alpha v) = \mathcal{O}$ contradizendo LI. II. $u \neq \mathcal{O}$: Caso contrario $u = \mathcal{O} = 0v$ contradizendo I. III. $v \neq \mathcal{O}$: Análogo. IV. Seja $v \in \mathbb{R}^2$. Caso $w = \mathcal{O}$ escrevemos $w = 0u$, pronto. Caso $v \neq \mathcal{O}$: Agora identificamos $\mathbb{R}^2$ com o plano usando dois eixos $OXY$, veja Figura 2. Segundo II. e III. temos duas retas $\mathbb{R}u$ e $\mathbb{R}v$ passando ambas a origem $O$, mas não são iguais segundo I. Recebemos um paralelogramo com dois lados parte das retas e dois vértices sendo $\mathcal{O}$ e $v$; pensa Figura 2 com $OX$ e $OY$ substituto para $Ou$ e $Ov$. Então a flecha $v$ é a soma de duas flechas do paralelogramo, uma flecha sendo um múltiplo de $u$ e a outra de $v$. Pronto. $\square$

**Teorema A.2.2** (Teorema 2.3.4)**.** *Sejam* $F_1, F_2 \subset F$ *três subespaços de um espaço vetorial* $E$*, então são equivalentes*

$$F = F_1 \oplus F_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \in F,\ \exists!\ f_1 \in F_1,\ f_2 \in F_2 \ \ \textit{tal que}\ \ f = f_1 + f_2$$

*Demonstração.* '$\Rightarrow$' Seja $f \in F$. Como hipótese temos duas informações, a saber (i) $F = F_1 + F_2$ e (ii) $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$, dando existência e unicidade.
**Existência:** De (i) sabemos que $f = f_1 + f_2$ para um $f_1 \in F_1$ e um $f_2 \in F_2$.
**Unicidade.** Suponha que $f = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ também para um $\tilde{f}_1 \in F_1$ e um $\tilde{f}_2 \in F_2$. Então $F_1 \ni f_1 - \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 - f_2 \in F_2$. Assim cada um lado pertence a ambos espaços, então a $F_1 \cap F_2$ o qual segundo (ii) iguale $\{\mathcal{O}\}$. Como não tem outro elemento, cada um lado deve ser o vetor nulo.
'$\Leftarrow$' $F_1 + F_2 = F$: A hipótese *existência* disponibiliza a primeira inclusão $F \subset F_1 + F_2 \subset F$ e a segunda vale como $F_1, F_2 \subset F$.
$F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$: Seja $f \in F_1 \cap F_2$, a mostrar $f = \mathcal{O}$. Note que $f \in F$ como $F_1, F_2 \subset F$. Então segundo a propriedade do vetor nulo

$$\underbrace{f}_{\in F_1} + \underbrace{\mathcal{O}}_{\in F_2} = f = \underbrace{\mathcal{O}}_{\in F_1} + \underbrace{f}_{\in F_2}$$

Mas pela hipótese *unicidade* escrever $f$ como soma de um elemento de $F_1$ e um elemento de $F_2$ é único, então $f = \mathcal{O}$ e $\mathcal{O} = f$. $\square$

## A.3 Bases

# Índice Remissivo