

# Álgebra Linear

Notas da aula<sup>1</sup>  
MA327 2020-2

manuscrito em progresso

Joa Weber  
UNICAMP

1 de dezembro de 2020

<sup>1</sup>versão final estará lá: [www.math.stonybrook.edu/~joa/PUBLICATIONS/MA327.pdf](http://www.math.stonybrook.edu/~joa/PUBLICATIONS/MA327.pdf)



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
Notações . . . . .	3
Convenções . . . . .	3
<b>I Teoria dos espaços vetoriais</b>	<b>5</b>
<b>1 Espaços vetoriais</b>	<b>7</b>
1.1 Axiomas . . . . .	7
1.1.1 Grupo . . . . .	8
1.1.2 Corpo . . . . .	9
1.1.3 Espaço vetorial . . . . .	12
1.2 Exemplos . . . . .	13
1.2.1 Listas ordenadas . . . . .	14
1.2.2 Matrizes . . . . .	15
1.2.3 Funções e polinômios . . . . .	17
1.2.4 Excurso: Escalonamento de matrizes segundo Gauss . . .	17
1.3 Independência linear . . . . .	20
1.3.1 Combinação linear . . . . .	20
1.3.2 Independência linear . . . . .	22
<b>2 Subespaços</b>	<b>25</b>
2.1 Definição e exemplos . . . . .	25
2.2 Conjuntos gerandos . . . . .	27
2.3 Soma direta . . . . .	29
<b>3 Bases</b>	<b>31</b>
3.1 Aplicações . . . . .	32
3.1.1 Coordenadas de um vetor . . . . .	32
3.1.2 Dimensão de um espaço vetorial . . . . .	34
3.2 Existência e extensão . . . . .	37

<b>II</b>	<b>Teoria das transformações lineares</b>	<b>41</b>
<b>4</b>	<b>Transformações lineares</b>	<b>43</b>
4.1	Exemplos e construção . . . . .	43
4.1.1	O espaço vetorial das transformações lineares . . . . .	45
4.1.2	Construção . . . . .	46
4.1.3	O espaço dual . . . . .	48
4.2	Matrizes . . . . .	49
4.3	Dimensão dois – o plano . . . . .	53
4.3.1	rotações . . . . .	54
4.3.2	Projeção ortogonal sobre uma reta . . . . .	57
4.3.3	Reflexão em torno de uma reta . . . . .	58
4.4	Produto de transformações lineares . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Núcleo e imagem</b>	<b>61</b>
5.1	Sobrejetividade – inversa à direita . . . . .	63
5.2	Injetividade – inversa à esquerda . . . . .	64
5.3	Bijetividade – inversa . . . . .	66
5.3.1	Isomorfismos . . . . .	66
5.4	Teorema de núcleo e imagem . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Soma direta e projeções</b>	<b>73</b>
6.1	Projeções . . . . .	75
6.2	Involuções . . . . .	76
6.3	Exercícios . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Matrizes de transformações lineares</b>	<b>81</b>
7.1	Bases induzem isomorfismos . . . . .	82
7.2	A matriz em respeito a uma base . . . . .	83
7.3	Mudança de base – comutatividade da diagrama . . . . .	85
7.3.1	Vetor coordenada . . . . .	85
7.3.2	Matriz de uma transformação linear . . . . .	86
7.4	Exercícios e umas soluções . . . . .	88
<b>8</b>	<b>Eliminação e aplicações (repetição de MA141)</b>	<b>93</b>
8.1	Dimensão do subespaço gerado . . . . .	93
8.2	Cálculo do posto . . . . .	94
8.3	Cálculo da matriz inversa – Gauss-Jordan . . . . .	95
8.4	Resolução de sistemas lineares . . . . .	96
8.5	Exercícios e umas soluções . . . . .	98
<b>9</b>	<b>Subespaços invariantes – autovalores/vetores</b>	<b>105</b>

<b>III Estruturas adicionais e operadores especiais</b>	<b>109</b>
<b>10 Produto interno</b>	<b>113</b>
10.1 Produto interno, norma, distância . . . . .	113
10.1.1 Produto interno e espaço dual – dualidade . . . . .	116
10.1.2 Produto interno e matrizes . . . . .	118
10.2 Ortogonalidade . . . . .	120
10.2.1 Projeção ortogonal sobre uma reta . . . . .	121
10.3 Ângulos e comprimentos em $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$ . . . . .	121
10.4 Desigualdades . . . . .	122
10.5 Ortonormalização – processo de Gram-Schmidt . . . . .	125
10.5.1 Existência e extensão de bases ortogonais . . . . .	127
10.5.2 Projeção ortogonal sobre um subespaço . . . . .	127
10.6 Complemento ortogonal . . . . .	128
10.7 Exercícios e umas soluções . . . . .	129
<b>11 A adjunta</b>	<b>131</b>
11.0.1 Método para construir inversas à direita/esquerda . . . . .	133
11.0.2 Traco – produto interno em $\mathcal{L}(E, F)$ . . . . .	133
11.1 Exercícios e umas soluções . . . . .	134
<b>12 Operadores auto-adjuntos</b>	<b>139</b>
<b>13 Operadores ortogonais</b>	<b>141</b>
13.1 Matrizes . . . . .	141
13.2 Operadores . . . . .	141
13.3 Decomposição polar . . . . .	141
<b>A Demonstrações restantes</b>	<b>143</b>
A.1 Espaços vetoriais . . . . .	143
A.2 Subespaços . . . . .	145
A.3 Bases – SLH . . . . .	145
A.4 Transformações lineares . . . . .	146
<b>Índice Remissivo</b>	<b>151</b>



# Introdução

## Álgebra Linear

é o estudo dos espaços lineares e das transformações lineares.

Uma outra palavra para espaço linear é espaço vetorial.

**Exemplo 0.0.1** (O espaço vetorial  $F$  das flechas equivalentes no plano). Seja  $F$  o conjunto das flechas  $v$  no plano  $\Pi$ ,

onde consideramos iguais duas flechas se têm a mesma direção e comprimento, munido das operações de multiplicar uma flecha  $v$  com um número real  $\alpha \in \mathbb{R}$  e de adicionar duas flechas  $v$  e  $w$ .

*Multiplicação (escalar)*. Pela definição  $\alpha v$  é a flecha na direção de  $v$  cujo comprimento é  $\alpha$  vezes aquele de  $v$  (muda-se a direção caso o número  $\alpha$  é negativo).

*Adição (vetorial)*. Pela definição  $v + w$  é a flecha cujo ponto inicial é aquela de  $v$  e cujo ponto termino  $p$  é obtido depois fazer uma translação de  $w$  movendo o ponto inicial de  $w$  no ponto termino de  $v$ . Então  $p$  é definido como o ponto termino do novo  $w$ .

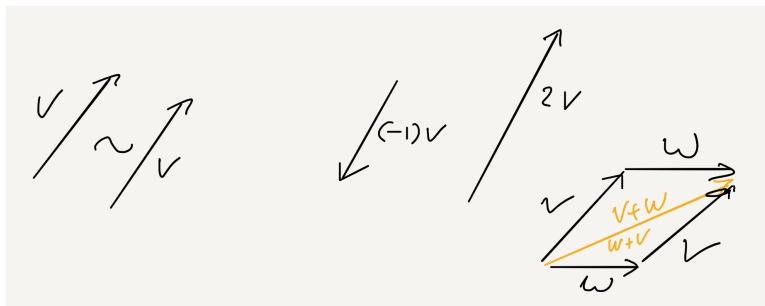


Figura 1: Flechas consideradas iguais, multiplicação escalar, e adição

Tal  $F$  é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$  e um exemplo de uma transformação linear em  $F$  é dado pela rotação  $r_\theta : F \rightarrow F$  de uma flecha  $v$  pelo ângulo  $\theta$  em torno do ponto inicial.

**Exemplo 0.0.2** (Pares de números reais). Seja  $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  o conjunto de todas listas ordenadas de dois membros reais munido da adição

membro-por-membro e multiplicação com um número real  $\alpha \in \mathbb{R}$  também membro-por-membro. Então  $\mathbb{R}^2$  é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$ .

**Comentário 0.0.3** (Identificação dos conjuntos e operações – isomorfismo). Os dois exemplos anteriores são “iguais” no sentido seguinte. Suponhamos que na reta podemos medir a distância 1. No plano  $\Pi$  escolha um **eixo**  $OX$ , ou seja uma reta com dois pontos diferentes  $O$  e  $X$  da distância 1, e um segundo eixo  $OY$  cujo primeiro ponto  $O$  é aquele do  $OX$  e qual intersecta  $OX$  exatamente no ponto  $O$ . Uma tal escolha de dois eixos é chamado um **sistema de coordenadas** no plano, símbolo  $OXY$ .

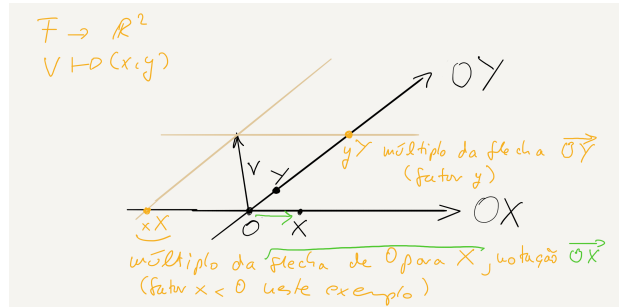


Figura 2: Sistema de coordenadas  $OXY$  composto de dois eixos  $OX$  e  $OY$

Observe-se que um eixo  $OX$  chega com uma direção (de  $O$  para  $X$ ) e com um comprimento unitário (o comprimento do segmento entre  $O$  e  $X$ ). Uma escolha de coordenadas  $OXY$  no plano  $\Pi$  nos dá uma aplicação

$$F \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto (x, y) \quad (0.0.1)$$

a qual identifica os elementos de  $F$  com os elementos de  $\mathbb{R}^2$  unicamente (bijetora) – e ainda é **linear**, ou seja compatível com as duas operações no domínio e as duas no contradomínio. Uma tal aplicação (bijetora linear) é chamado um **isomorfismo** entre espaços vetoriais. Deixamos ao leitor definir esta aplicação. [Dica: Os pontos  $O, X$  e  $O, Y$  dão duas flechas. Represente um elemento de  $F$  por uma flecha equivalente com ponto inicial  $O$ . Pensa num paralelogramo tal que  $O$  e o ponto termino da flecha equivalente são dois vértices opostos.]

**Exemplo 0.0.4** (Funções contínuas e integração). Sejam  $a < b$  dois números reais. Então o quadruplo  $V = (C^0([a, b], \mathbb{C}), +, \cdot, \mathbb{R})$  que é composto do conjunto das funções contínuas  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  munido com as duas operações de adicionar  $f + g$  duas funções e multiplicar  $\alpha f$  uma função com um número real  $\alpha \in \mathbb{R}$  é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$ .

Também  $W = (\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R})$  composto das números reais  $\mathbb{R}$  munido das operações óbvias é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$ .

Integração  $T : V \rightarrow W, f \mapsto \int_a^b f(x) dx$ , é compatível com as duas adições e multiplicações (em  $V$  e em  $W$ ) no sentido que

$$T(f + g) = Tf + Tg, \quad T(\alpha f) = \alpha Tf$$



para todos os vetores  $f, g \in V$  e escalares  $\alpha$  do corpo  $\mathbb{R}$ . Uma aplicação  $T$  entre espaços vetoriais qual respeita as duas operações no domínio e no contradomínio é chamada uma transformação linear.

## Notações

Para uma lista extensiva dos símbolos usados veja o Índice Remissivo na página 151.

**Comentário 0.0.5** (Números). Vamos trabalhar com os seguintes **números**

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ , $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$	naturais
$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	inteiros
$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$	racionais
$\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ “a reta real”	reais
$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ “o plano complexo”	complexos

Com  $|\alpha|$  denotamos o absoluto de um numero  $\alpha$ . Denotamos **intervalos** fechados de  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  e abertos de  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ . Usamos os símbolos

$\forall$  “para todos os”     $\exists$  “existe um”     $\exists!$  “existe um único”

A notação  $w := v$  significa que o objeto  $w$  é **definido** pelo lado direito  $v$ . Escrevendo  $\dim E = n$  ou  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  indica sem ser mencionado explicitamente que  $n$  e  $k$  são números naturais, e assim a dimensão e o numero de elemento do conjunto são **finitas**.

“Sejam  $x_1, \dots, x_\ell$  elementos de um conjunto  $X$ ” é uma frase encontrada frequentemente e depois quer-se trabalhar com o conjunto composto destes elementos. Um ponto sutil é que não é proibido que uns dos elementos, ainda todos, são iguais. O jeito certo de escrever o conjunto correspondente é assim  $\{x_1\} \cup \dots \cup \{x_\ell\}$ . Para este conjunto usa-se também a notação  $\{v_i \mid i = 1, \dots, \ell\}$ . Veja Definição 1.1.2.

## Convenções

**Cor cinza.** Parágrafos e maiores partes de texto em cinza indicam matéria avançada direcionado às turmas A e B do “cursão”, mas não às outras turmas. Palavras individuais em cinza geralmente são nomes ou informações complementares.



## Parte I

# Teoria dos espaços vetoriais



# Capítulo 1

## Espaços vetoriais

### 1.1 Axiomas

**Definição 1.1.1.** Um **conjunto**  $X$  é composto de elementos os quais são dois-a-dois diferentes. **Então não faz sentido escrever expressões da forma  $\{2, 3, 2\}$ .** Um conjunto não é ordenado, por exemplo  $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ . A **união** de dois conjuntos  $A$  e  $B$  é o conjunto  $A \cup B$  cujos elementos pertencem ou a  $A$  ou a  $B$ . Por exemplo

$$\{2, 3\} \cup \{2\} = \{2, 3\} = \{3, 2\} \quad (1.1.1)$$

A **interseção** de dois conjuntos  $A$  e  $B$  é o conjunto  $A \cap B$  cujos elementos pertencem a  $A$  e também a  $B$ . Chama-se um conjunto **ordenado** se seus elementos são enumerados, por exemplo  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . O conjunto que não contem nenhum elemento é chamado **o conjunto vazio**, símbolo  $\emptyset$ . Usamos a notação  $A \dot{\cup} B$  para transferir a informação adicional que os dois conjuntos  $A$  e  $B$  são **disjuntos**, ou seja não tem nenhum elemento comum, em símbolos  $A \cap B = \emptyset$ . Denotamos de  $|X|$  o **número de elementos de um conjunto** quando o número é finito. Neste caso  $X$  é chamado de **conjunto finito**.

Um **subconjunto** de um conjunto  $X$  é um conjunto  $A$  tal que cada um elemento de  $A$  é elemento de  $X$ , notação  $A \subset X$ . Observe que conforme esta definição, o conjunto vazio  $\emptyset$  é subconjunto de todos conjuntos: para todo conjunto  $X$  temos  $\emptyset \subset X$ .

**Definição 1.1.2.** “Sejam  $x_1, \dots, x_\ell$  elementos de um conjunto  $X$ ” é uma frase encontrada frequentemente e depois quer-se trabalhar com o conjunto composto destes elementos. Um ponto sutil é que não é proibido que uns dos elementos, ainda todos, são iguais. Mas conforme nossa convenção para denotar conjuntos, veja Definição 1.1.1, a notação  $\{x_1, \dots, x_\ell\}$  só faz sentido, e é permitida, quando os elementos são dois-a-dois diferente. A notação certa, junta com sua abreviação, para **o conjunto composto de  $x_1, \dots, x_\ell \in X$**  é

$$\{x_1\} \cup \dots \cup \{x_\ell\} =: \{v_i \mid i = 1, \dots, \ell\}$$

Uma escolha arbitraria forma o conjunto  $\cup_{\lambda \in \Lambda} \{x_\lambda\} =: \{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ .

**Definição 1.1.3.** O **produto cartesiano**  $X \times Y$  de dois conjuntos  $X$  e  $Y$  é o conjunto de todas listas ordenadas  $(x, y)$  dos elementos  $x \in X$  e  $y \in Y$ , ou seja

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Observe que se um fator fica vazio, ou seja  $X = \emptyset$  ou  $Y = \emptyset$ , então  $X \times Y = \emptyset$ . Abreviamos

$$Y^{\times k} := Y \times \cdots \times Y \quad (1.1.2)$$

se na direita temos  $k$  fatores.

### 1.1.1 Grupo

**Definição 1.1.4.** Um conjunto não-vazio  $G \neq \emptyset$  munido de uma operação

$$* : G \times G \rightarrow G, \quad (f, g) \mapsto f * g$$

é chamado um **grupo**, notação  $(G, *)$ , se valem os três axiomas

1.  $f * (g * h) = (f * g) * h$  para todos os elementos  $f, g, h \in G$  (associatividade)
2. existe um elemento  $e \in G$  tal que (elemento neutro)

$$e * g = g, \quad g * e = g$$

para todos os elementos  $g \in G$ .

3. para todo  $g \in G$  existe um elemento, notação  $\bar{g} \in G$ , t.q. (inverso)

$$g * \bar{g} = e, \quad \bar{g} * g = e$$

Em palavras,

*um grupo é um conjunto não-vazio munido de uma operação associativa, contendo um elemento neutro, e tal que qualquer elemento admite um inverso.*

O seguinte lema diz que um grupo  $G$  tem exatamente um elemento neutro, notação comum  $e$ , e cada um elemento  $g$  de  $G$  tem exatamente um inverso, notação  $\bar{g}$ . Às vezes é comum e útil escrever o elemento neutro na forma  $0$  ou  $1$  e os inversos na forma  $-g$  ou  $g^{-1}$  — veja os dois exemplos em Exercício 1.1.7 a).

**Lema 1.1.5.** *Seja  $(G, *)$  um grupo. Então vale o seguinte.*

- 1) *O elemento neutro é único.*
- 2) *Os elementos inversos são únicos.*
- 3) *Dado elementos  $f, g, h \in G$ , então vale:*
  - a)  $f * g = f * h \Rightarrow g = h$  (lei da corte)
  - b)  $f * g = f \Rightarrow g = e$
  - c)  $f * g = e \Rightarrow g = \bar{f}$

Note que b) e c) são consequências imediatas de a).

*Demonstração.* Lema A.1.1. □

**Definição 1.1.6.** Um grupo  $(G, *)$  é chamado de **abeliano** se a ordem dos dois elementos na operação não importa, em símbolos  $f * g = g * f$ . (comutatividade)

**Exercício 1.1.7.** Mostre que

- a) são grupos (ainda abelianos):  $(\mathbb{Z}, +)$  e  $(\mathbb{R}, \cdot)$
- b) não são grupos:  $(\mathbb{N}, +)$  e  $(\mathbb{N}_0, +)$  e  $(\mathbb{Z}, \cdot)$
- c) não são grupos abelianos: as matrizes  $3 \times 3$  e as rotações em  $\mathbb{R}^3$ .

## 1.1.2 Corpo

**Definição 1.1.8.** Um conjunto  $\mathbb{K}$  munido de duas operações<sup>1</sup>

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K} \quad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$$

é chamado um **corpo** se valem os três axiomas

1.  $(\mathbb{K}, +)$  é um grupo abeliano.  
(O elemento neutro seja denotado 0 e  $-\alpha$  denota o inverso de  $\alpha \in \mathbb{K}$ .)
2.  $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$  é um grupo abeliano.  
(O elemento neutro seja denotado 1 e  $\alpha^{-1}$  denota o inverso de  $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ .)
3. Distributividade:  $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$  para todos  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ .  
(É costume escrever  $\alpha\beta$  em vez de  $\alpha \cdot \beta$ .)

Para distinguir chamamos o elemento neutro da primeira operação – para a qual temos usado o símbolo “+” ainda que geralmente não tem nada ver com adição de números – o **elemento neutro aditivo**. Chamamos o elemento neutro da segunda operação – motivado pelo uso do símbolo “.” – o **elemento neutro multiplicativo**. Como é feio escrever  $\alpha + (-\beta)$  para a soma de um elemento com um elemento inverso aditivo definimos  $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$ . Isso é uma abreviação só, não é, nem tem diferença. Analogamente simplificamos a notação escrevendo  $\alpha/\beta$  em vez de  $\alpha\beta^{-1}$ .

**Corolário 1.1.9.** *Um corpo contém pelo menos dois elementos.*

*Demonstração.* Pelas axiomas 1 e 2 cada uma operação tem um elemento neutro as quais não podem ser iguais por causa de 2. □

**Lema 1.1.10.** *Seja  $\mathbb{K}$  um corpo e  $0 \in K$  é o elemento neutro da adição. Então  $0\beta = 0$  e  $\beta 0 = 0$  para todos os elementos  $\beta \in \mathbb{K}$ .*

*Demonstração.* Lema A.1.2. □

<sup>1</sup> as quais vamos batizar aos nomes “+” e “.” – ainda que *geralmente não tem nada ver com adição e multiplicação de números*, mas esta escolha é motivada pelos exemplos principais (Exemplo 1.1.11) nos quais “+” e “.” são adição e multiplicação de números

**Exemplos de corpos****Exemplo 1.1.11.** São corposa)  $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$  e  $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ b)  $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$  onde as operações são definidas assim

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(bc + ad)$$

**Exercício 1.1.12.** Os números inteiros  $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$  não formam um corpo.**Exemplo 1.1.13** (Adição e multiplicação módulo  $n$ ). Dado um número natural  $n \in \mathbb{N}$ , defina no conjunto  $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$  as duas operações

$$a +_n b := a + b \pmod{n}, \quad a \cdot_n b := ab \pmod{n}$$

para todos os elementos  $a, b \in \mathbb{Z}_n$ .<sup>2</sup>**Fato.**  $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$  é um corpo  $\iff n$  é um número primo.Para valores pequenos de  $n$  pode-se checar da mão se  $\mathbb{Z}_n$  é um corpo ou não. Só precisa-se calcular as tabelas de adição e de multiplicação. Vamos ilustrar isso num exemplo.**Exemplo 1.1.14** ( $\mathbb{Z}_4$  não é um corpo.). Para checar se  $(\mathbb{Z}_4, +_4)$  e  $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{e_{+4}\}, \cdot_4)$  são grupos abelianos é útil calcular as tabelas de adição e de multiplicação.•  $(\mathbb{Z}_4, +_4)$  é um grupo abeliano? Para responder calculamos os valores na tabela

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

São 4 passos:

1. Determinar o elemento neutro de  $+_4$ : Checamos se a linha em cima da linha sólida horizontal, ou seja a linha **0 1 2 3**, tem uma cópia nas linhas embaixo. Sim, tem **0 1 2 3**. Neste caso o elemento em frente da cópia é o elemento neutro de  $+_4$ , certo? No nosso caso  $e_{+4} = 0$ . Se não tem cópia, não tem elemento neutro, então não temos um grupo.
2. Inversos: Na cada dos (neste caso 4) linhas de valores na tabela localiza o elemento neutro 0 (se existir). Então o elemento  $g$  em frente da linha de 0 e o elemento em cima da coluna de 0, notação  $\bar{g}$ , são inversos um do outro. Caso uma linha não contém 0, então este  $g$  não tem inverso, então não temos um grupo. No nosso caso todo elemento  $g$  tem um inverso:

<sup>2</sup> Dado  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $\ell \in \mathbb{Z}$  um número inteiro. Pela definição o elemento  $\ell \pmod{n} \in \mathbb{Z}_n$  é o resto  $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  que falta depois você “enche”  $\ell$  com múltiplos de  $n$ . Em símbolos,  $\ell \pmod{n} := r$  onde  $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  é o único elemento tal que  $\ell = kn + r$  para um  $k \in \mathbb{Z}$ .



$g$	$\bar{g}$ (denotado $-g$ )
0	0
1	3
2	2
3	1

3. Associatividade: Calculando caso por caso temos que checar se  $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$  para todas as possibilidades. No nosso caso vale.
4. Grupo abeliano (comutatividade): Vale se a tabela é simétrica em respeito à diagonal. No nosso caso vale.

Na verdade temos esquecido um passo: No início de tudo temos que checar se a operação é bem definida, ou seja os valores da operação (os valores na tabela) realmente são elementos do conjunto, ou não. Olhamos a tabela - sim.

Nosso resultado é que  $(\mathbb{Z}_4, +_4)$  é um grupo abeliano.

- $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$  é um grupo abeliano? Para responder calculamos a tabela

$\cdot_4$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

Como o valor 0 não é elemento de  $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$  a multiplicado  $\cdot_4$  não é uma operação em  $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ , então não pode ser um grupo.

Ainda assim vamos repetir os 4 passos para  $\cdot_4$  (em vez de  $+_4$ ) para ver se tem outras falhas ainda. As respostas são:

1. Elemento neutro de  $\cdot_4$ : Tem, é o elemento  $e_{\cdot_4} = 1$ .
2. Inversos: Na cada dos (neste caso 3) linhas de valores na tabela localizamos o elemento neutro 1 (se existir). No nosso caso

$g$	$\bar{g}$ (denotado $g^{-1}$ )
1	1
2	não tem!
3	3

o elemento 2 não tem um inverso e já por isso não temos um grupo.

3. Associatividade: Ainda que a fórmula  $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$  vale, os valores não são todos em  $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ .
4. Grupo abeliano (comutatividade): A tabela é simétrica em respeito à diagonal, mas os valores não são todos em  $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ .

Nosso resultado é que  $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$  não é um grupo abeliano.

**Exercício 1.1.15.** Seja  $n = 6$ :

1. Calcule a tabela da adição e da multiplicação no caso  $\mathbb{Z}_6$ .

2. Identifique os elementos neutros da adição e multiplicação em  $\mathbb{Z}_6$ . Eles sempre existem?
3. Para todo  $a \in \mathbb{Z}_6$  identifique o elemento inverso aditivo.
4. Para todo  $a \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$  identifique o elemento inverso multiplicativo, se existir.
5. Cheque que  $\mathbb{Z}_6$  não é um corpo. Quais dos axiomas não valem?

### Matéria avançada

Motivado pelas perguntas da Turma C na 1ª aula 2016-2 vamos dar um exemplo de um corpo onde a primeira operação não está relacionada à adição de números nem a segunda à multiplicação de números.

**Exercício 1.1.16** (Corpo  $(P, \cdot, \circ)$  onde  $\cdot$  não é adição e  $\circ$  não é multiplicação). Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , considere a função  $p_\alpha : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $x \mapsto x^\alpha$ . Seja o conjunto

$$P := \{p_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

composto de todas funções  $p_\alpha(x) = x^\alpha$  com  $\alpha \in \mathbb{R}$  e munido das operações

$$\begin{aligned} \cdot : P \times P &\rightarrow P & \circ : P \times P &\rightarrow P \\ (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \cdot p_\beta & (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \circ p_\beta \end{aligned}$$

chamado de **multiplicação**<sup>3</sup> e **composição**<sup>4</sup> de funções, respectivamente. Mostre que:

1. As duas operações são bem definidas:  $p_\alpha \cdot p_\beta \in P$  e  $p_\alpha \circ p_\beta \in P$ , de fato

$$p_\alpha \cdot p_\beta = p_{\alpha+\beta}, \quad p_\alpha \circ p_\beta = p_{\alpha\beta}$$

2.  $(P, \cdot)$  é um grupo abeliano com elemento neutro  $p_0 \equiv 1$ .
3.  $(P \setminus \{p_0\}, \circ)$  é um grupo abeliano com elemento neutro  $p_1(x) = x$ .
4. Distributividade:  $(p_\alpha \cdot p_\beta) \circ p_\gamma = (p_\alpha \circ p_\gamma) \cdot (p_\beta \circ p_\gamma)$ ,  $\forall p_\alpha, p_\beta, p_\gamma \in P$ .

### 1.1.3 Espaço vetorial

**Definição 1.1.17.** Um **espaço vetorial  $E$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$** <sup>5</sup> é um quádruplo  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$  composto de um conjunto  $E$ , um corpo  $\mathbb{K}$ , e duas operações

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E & \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (v, w) &\mapsto v + w & (\alpha, v) &\mapsto \alpha v \end{aligned}$$

chamado de *adição* e *multiplicação escalar*, respectivamente, tal que vale

<sup>3</sup>  $(p_\alpha \cdot p_\beta)(x) := p_\alpha(x) \cdot p_\beta(x)$

<sup>4</sup>  $(p_\alpha \circ p_\beta)(x) := p_\alpha(p_\beta(x))$

<sup>5</sup> fala-se abreviando “ $E$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ ” ou ainda “ $E$  é um espaço vetorial”.

1.  $(E, +)$  é um grupo abeliano.  
(O elemento neutro é denotado  $\mathcal{O}$  e chamado o **vetor nulo**.)
2. Distributividade: 
$$\begin{cases} (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \\ \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \end{cases}$$
3. Compatibilidade: 
$$\begin{cases} (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \\ 1v = v \end{cases}$$

Onde as identidades tem que ser válidas para todos  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  e todos  $v, w \in E$ . Chama-se **escalares** os elementos do corpo  $\mathbb{K}$  e **vetores** os elementos de  $E$ .

**Lema 1.1.18.** *Seja  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$  um espaço vetorial e  $0 \in \mathbb{K}$  e  $\mathcal{O} \in E$ , então:*

- (i)  $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$  para todos os escalares  $\alpha \in \mathbb{K}$ .
- (ii)  $0v = \mathcal{O}$  para todos os vetores  $v \in E$ .
- (iii) *Para todo o escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$  e todo o vetor  $w \in E$  são equivalentes:*

$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O} \quad (1.1.3)$$

*Demonstração.* Lema A.1.3. □

**Corolário 1.1.19** (Compatibilidade dos inversos aditivos com multiplicação). *Para todo o escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$  e todo o vetor  $w \in E$  vale:*

- a)  $(-\alpha)w = -(\alpha w)$
- b)  $\alpha(-w) = -(\alpha w)$

*Demonstração.* Corolário A.1.4. □

**Corolário 1.1.20.** *Seja  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$  no qual  $1 + 1 \neq 0$ . Neste caso para  $v \in E$  temos*

$$v + v = \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad v = \mathcal{O}$$

*Demonstração.* Como  $\mathcal{O} = v + v = 1v + 1v = (1 + 1)v$  segue de (1.1.3) que ou  $1 + 1 = 0$  no corpo  $\mathbb{K}$  ou  $v = \mathcal{O}$ . (Lembre-se que  $1 \in \mathbb{K}$ , assim 1 geralmente não é um número e  $1 + 1$  não tem nada ver com 2... Veja nota de rodapé no Lema 6.2.5.) □

## 1.2 Exemplos de espaços vetoriais

**Exemplo 1.2.1** (O espaço vetorial trivial  $\{\mathcal{O}\}$ ). Seja  $E$  um conjunto com 1 elemento só. Vamos já denotar aquele elemento com o símbolo  $\mathcal{O}$  (porque?). Então  $E = \{\mathcal{O}\}$ . Seja  $\mathbb{K}$  um corpo qualquer. Não tem escolha nenhuma para definir as duas operações

$$\begin{array}{ll} + : E \times E \rightarrow E & \cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E \\ (\mathcal{O}, \mathcal{O}) \mapsto \mathcal{O} & (\alpha, \mathcal{O}) \mapsto \mathcal{O} \end{array}$$

Então  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$  satisfaz os axiomas de um espaço vetorial, denotado simplesmente  $E = \{\mathcal{O}\}$  e chamado de **espaço vetorial trivial**.

**Exemplo 1.2.2** (Um corpo  $\mathbb{K}$  como um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ ). Usa-se as duas operações chegando com o corpo  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  como as duas operações necessárias para tornar um conjunto, escolhemos  $E := \mathbb{K}$ , num espaço vetorial sobre um corpo, escolhemos  $\mathbb{K}$ . Com efeito  $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K})$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ .

### 1.2.1 Listas ordenadas

**Exemplo 1.2.3** (O espaço vetorial  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{R}$ ). Seja

$$\mathbb{R}^n := \{u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto de todas as listas ordenadas de  $n$  números reais. Chamamos  $\alpha_i$  o  $i$ -ésimo membro da lista. As duas operações

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

são definidas como adição membro-por-membro e multiplicação de todos membros com um escalar  $\beta \in \mathbb{R}$ . Checando todos axiomas vê-se que  $\mathbb{R}^n$  é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais, notação  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$  ou  $\mathbb{R}^n$  só. O vetor nulo, também chamado de **origem**, é a lista

$$\mathcal{O} = (0, \dots, 0)$$

e o inverso de um elemento  $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  é a lista  $(-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)$  a qual denotamos com o símbolo  $-u$ .

O  $i$ -ésimo vetor canônico é a lista de  $n$  membros

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

cujo  $i$ -ésimo membro é o número 1 e todos outros são nulo 0. O conjunto

$$\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\} \tag{1.2.1}$$

de todos os vetores canônicos é chamado de **base canônica** de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 1.2.4** (O espaço vetorial  $\mathbb{R}^\infty$  sobre  $\mathbb{R}$ ). O conjunto

$$\mathbb{R}^\infty := \{u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \in \mathbb{R}\}$$

de todas as sequências reais é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  sob adição e multiplicação membro-por-membro, notação  $(\mathbb{R}^\infty, +, \cdot, \mathbb{R})$ .

**Exemplo 1.2.5** (O espaço vetorial  $\mathbb{R}_0^\infty$  sobre  $\mathbb{R}$ ). O conjunto

$$\mathbb{R}_0^\infty := \{u \in \mathbb{R}^\infty \mid \text{só um número finito de membros são não-nulos}\}$$

é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  sob adição e multiplicação membro-por-membro como no exemplo prévio, notação  $(\mathbb{R}_0^\infty, +, \cdot, \mathbb{R})$ .

Dado  $i \in \mathbb{N}$ , a sequência com todos membros nulos exceto o  $i$ -ésimo qual é 1 denotamos também de  $e_i$ . O conjunto de todos os  $e_i$ 's é denotado de

$$\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\} \quad (1.2.2)$$

e chamado de **base canônica** de  $\mathbb{R}_0^\infty$ .

**Comentário 1.2.6** ( $\mathbb{K}^n$  e  $\mathbb{K}^\infty$ ). Os espaços vetoriais  $\mathbb{K}^n$  e  $\mathbb{K}^\infty$  sobre qualquer corpo  $\mathbb{K}$  são definidos analogamente Exemplos 1.2.3 e 1.2.4.

## 1.2.2 Matrizes

**Exemplo 1.2.7** (Espaço vetorial das matrizes  $m \times n$ ). O **espaço vetorial das matrizes  $m \times n$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$**  é o conjunto

$$M(m \times n; \mathbb{K}) := \left\{ \mathbf{a} = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \right\}$$

onde a matriz  $\mathbf{a} = (a_{ij})$  é o quadro de escalares com  $m$  linhas e  $n$  colunas<sup>6</sup>

$$\mathbf{a} = (a_{ij}) := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

munido da adição (entrada por entrada)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (c_{ij}), \quad c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

e da multiplicação escalar (entrada por entrada)

$$\beta \mathbf{a} = \beta (a_{ij}) := (c_{ij}), \quad c_{ij} := \beta a_{ij}$$

para escalares  $\beta \in \mathbb{K}$ . A matriz  $\mathbf{a}^t$  com entradas  $(a_{ij})^t = a_{ji}$  é chamada de **transposta** da matriz  $\mathbf{a}$ . Uma **matriz quadrada** é uma matriz  $n \times n$ .

O vetor nulo é a matriz nula  $\mathbf{0}$  cujas entradas são todas o escalar nulo  $0 \in \mathbb{K}$ . Se na matriz nula  $n \times n$  colocamos o escalar  $1 \in \mathbb{K}$  ao longo da diagonal obtemos a **matriz identidade**  $\mathbf{1} = \mathbf{1}_n$ . O elemento inverso aditivo, notação  $-\mathbf{a}$ , de uma matriz  $\mathbf{a} = (a_{ij})$  tem como entradas os inversos aditivos dos  $a_{ij}$ , notação  $-a_{ij}$ .

No caso do corpo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  usamos a notação  $M(m \times n) := M(m \times n; \mathbb{R})$  para o **espaço vetorial dos matrices reais  $m \times n$** .

**Definição 1.2.8** (Linhas e colunas de matrizes). Seja  $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in M(m \times n; \mathbb{K})$  uma matriz  $m \times n$ . Note-se que o primeiro índice  $i$  de uma entrada  $a_{ij}$  indica a linha e o segundo  $j$  a coluna dela. Tendo isso na vista vamos denotar a  **$k$ -ésima coluna**, respectivamente a  **$\ell$ -ésima linha**, de uma matriz  $\mathbf{a}$  com os símbolos

$$\mathbf{a}_{\bullet k} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{\ell \bullet} = [a_{\ell 1} \quad \dots \quad a_{\ell m}] \quad (1.2.3)$$

<sup>6</sup>Os escalares  $a_{ij}$  são chamadas as **entradas da matriz**. Observe que a entrada  $a_{ij}$  está localizada na  $i$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna.

Temos escolhido o símbolo  $\bullet$  para sugerir “este índice é aberto” – ele corre e assim gera uma lista, ou vertical ou horizontal dependendo se  $\bullet$  fica no primeiro ou no segundo lugar. Assim podemos escrever a matriz  $\mathbf{a}$  nas formas seguintes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\bullet} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\bullet} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_{\bullet 1} \quad \dots \quad \mathbf{a}_{\bullet n}]$$

**Definição 1.2.9** (Espaço-coluna e espaço-linha). Seja  $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in M(m \times n; \mathbb{K})$  uma matriz  $m \times n$ . O **espaço-coluna** é o conjunto de todas as somas das colunas  $\mathbf{a}_{\bullet k}$  da matriz decorado com fatores escalares  $\alpha_k$ , em símbolos

$$\text{Esp-col}(\mathbf{a}) := \{\alpha_1 \mathbf{a}_{\bullet 1} + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_{\bullet n} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\} \subset M(m \times 1; \mathbb{K})$$

Analogamente no **espaço-linha** usa-se as linhas da matriz  $\mathbf{a}$ , ou seja

$$\text{Esp-lin}(\mathbf{a}) := \{\alpha_1 \mathbf{a}_{1\bullet} + \dots + \alpha_n \mathbf{a}_{n\bullet} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\} \subset M(1 \times n; \mathbb{K})$$

### Produto matriz

Para duas matrizes  $\mathbf{a}$  de tipo  $m \times n$  e  $\mathbf{b}$  de tipo  $n \times p$  pode se definir o chamado **produto matriz** no caso que  $n = k$  coincidem:

$$M(m \times n; \mathbb{K}) \times M(n \times p; \mathbb{K}) \rightarrow M(m \times p; \mathbb{K}), \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{ab} := (c_{ij}) \quad (1.2.4)$$

onde

$$c_{ij} := \mathbf{a}_{i\bullet} \mathbf{b}_{\bullet j} := a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

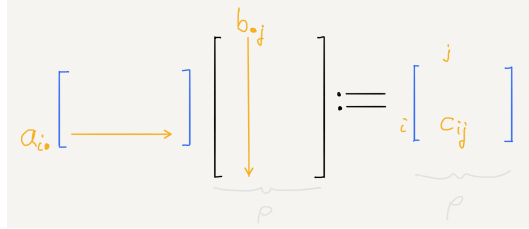


Figura 1.1: Produto matriz – o número de colunas de  $\mathbf{a}$  igual o de linhas de  $\mathbf{b}$

**Lema 1.2.10** (Propriedades do produto matriz). *Vale o seguinte*

- (i)  $(\mathbf{cb})\mathbf{a} = \mathbf{c}(\mathbf{ba})$
- (ii)  $\mathbf{c}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{ca} + \mathbf{cb}$  e  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$
- (iii)  $\mathbf{a}\mathbb{1}_n = \mathbf{a}$  e  $\mathbb{1}_m \mathbf{a} = \mathbf{a}$   $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K})$
- (iv)  $\mathbf{b}(\alpha \mathbf{a}) = \alpha(\mathbf{ba})$

para todos  $\alpha \in \mathbb{K}$  e matrizes  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  tal que as operações fazem sentido.

**Definição 1.2.11** (Matriz inversa). Uma matriz quadrada  $\mathbf{a} \in M(n \times n; \mathbb{K})$  admite uma inversa se existe uma matriz quadrada  $\mathbf{b}$  tal que  $\mathbf{ab} = \mathbf{1}_n$ , equivalentemente  $\mathbf{ba} = \mathbf{1}_n$ . Caso existe, tal  $\mathbf{b}$  é única e denotado  $\mathbf{a}^{-1}$ ; veja Seção 5.3.1.

**Definição 1.2.12** (Matrizes quadradas comutando). Dizemos que duas matrizes quadradas  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M(n \times n; \mathbb{K})$  **comutam** se  $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ .

### 1.2.3 Funções e polinômios

**Exercício 1.2.13.** Dado um conjunto não-vazio  $X \neq \emptyset$  e um corpo  $\mathbb{K}$ , seja

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) := \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ função}\}$$

o conjunto de todas as funções  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ . Adição de funções e multiplicação com um escalar são definidas assim

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

para todos os  $x \in X$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Mostre que  $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ .

**Comentário 1.2.14.** A próxima observação ilustra o poder da matemática e um *ponto fundamental* dela - economizar através de abstração e *encontrar o certo ponto da vista*.

**Observação 1.2.15.**

- a) Se  $X = \{1, \dots, n\}$ , então  $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ .
- b) Se  $X = \mathbb{N}$ , então  $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^\infty$ .
- c) Se  $X = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ , então  $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = M(m \times n)$ .

**Exercício 1.2.16** (Polinômios  $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ ). Dados escalares  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ , então chama-se uma soma finita

$$p = p(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$$

de **polinômio** na variável  $x \in \mathbb{K}$  e, no caso  $\alpha_n \neq 0$ , de **grau  $n$** . Forneça o conjunto dos polinômios com uma estrutura de um espaço vetorial  $(\mathcal{P}(\mathbb{K}), +, \cdot, \mathbb{K})$ .

### 1.2.4 Excurso: Escalonamento de matrizes segundo Gauss

**Definição 1.2.17** (Operações elementares (oe)). Pode-se aplicar para as linhas de uma matriz três tipos de operações, as chamadas **operações elementares**:

- (oe1)<sub>↓</sub> trocar duas linhas
- (oe2) multiplicar uma linha com um escalar  $\alpha$
- (oe3)<sub>+</sub> adicionar uma linha para uma outra

**Teorema 1.2.18.** *O espaço linha não muda quando aplicar (oe) 's a uma matriz.*

*Demonstração.* Óbvio da Definição 1.2.9 de Esp-lin. □

**Processo de escalonamento – método de Gauss (\*1777 †1855)**

Chama-se uma matriz **escalonada** se em cada linha o primeiro elemento não-nulo está à esquerda do primeiro elemento não-nulo da próxima linha. Exemplos

$$\text{escalonadas: } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{não é: } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Numa matriz *escalonada* os primeiros elementos não-nulos das linhas são chamados de **pivôs** da matriz escalonada.

**Definição 1.2.19.** Uma matriz pode ser transformada numa matriz escalonada aplicando operações elementares. O processo é repetir os três passos seguintes:

1. Localiza a primeira coluna não-nula e nela o primeiro elemento não-nulo, dizemos  $a$ . Troca a linha de  $a$  e a primeira linha.
2. Embaixo de  $a$  anulamos todo elemento não-nulo, dizemos  $b$ : Multiplica a linha de  $b$  com  $-a/b$ , depois adiciona a linha de  $a$ . Continue até todos elementos embaixo de  $a$  são nulos.
3. Esqueça a linha e a coluna de  $a$  e trata a matriz reduzida começando de novo com passo 1.

O processo de escalonar uma matriz  $\mathbf{a}$  termina com uma matriz escalonada a qual denotamos de  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$ .

**Exemplo 1.2.20.** Ilustramos o escalonamento. Seja  $L_i$  a  $i$ -ésima linha.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L1 \leftrightarrow L2]{1.} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{2}{4}L3]{2.} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[ad. L1]{2. na L3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[3. esq. linha e col. de 2]{3.} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e agora começamos de novo com passo 1 tratando a matriz reduzida

$$\xrightarrow[L2 \leftrightarrow L3]{1.} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{2}{1}L3]{2.} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[ad. L2]{2. na L3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Aplicação: Sistemas lineares**

Seja  $\mathbf{a}$  uma matriz  $m \times n$  e  $b \in \mathbb{R}^m$  uma lista ordenada com  $m$  membros. Agora adiciona para as  $n$  colunas de  $\mathbf{a}$  a lista  $b$  como a  $(n+1)$ -ésima coluna para obter a chamada **matriz aumentada**, notação

$$[\mathbf{a} : b] := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$





No nosso caso o lado direito desta fórmula representa o SLH

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

**Resolução “de baixo para cima”:**

LINHA 3. Começamos embaixo com a ultima linha  $0x + 0y + 0z = 0$  a qual não representa nenhuma restrição para  $x, y, z$ .

LINHA 2. Progredimos para cima, ou seja para a linha dois  $y + 2z = 0$ . Escolha uma variável para ser a variável dependente da(s) outra(s) variáveis, as quais variam livremente no corpo. No nosso caso só tem uma outra e o corpo é  $\mathbb{R}$ . Escolhemos por exemplo como variável dependente  $y = y(z) = -2z$  como função da variável  $z$  a qual varia livremente sobre os números reais, ou seja  $z \in \mathbb{R}$ .

LINHA 1. Progredimos para cima, ou seja para a primeira linha

$$0 = 2x + y(z) + z = 2x - 2z + z = 2x - z$$

lembrando que  $z \in \mathbb{R}$  é livre. Então  $x = x(z) = \frac{1}{2}z$  para qualquer  $z \in \mathbb{R}$ .

**Conclusão.** Toda solução do SL é da forma

$$\begin{bmatrix} x(z) \\ y(z) \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}z \\ -2z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde  $z \in \mathbb{R}$  é um número real arbitrário. Então o SL não tem só uma solução – tem uma para cada um numero real  $z$ . Isso conclui o Exemplo 1.2.24.

**Comentário 1.2.25** (Corpos gerais  $\mathbb{K}$ ). As construções nesta Seção 1.2.4 para matrizes e listas cujas entradas são elementos do corpo  $\mathbb{R}$  funcionam do mesmo jeito para matrizes com entradas num corpo geral  $\mathbb{K}$ .

## 1.3 Independência linear

### 1.3.1 Combinação linear

Depois da aula 3 foram adicionadas ou modificadas as **partes em marrom**:

**Definição 1.3.1.** Seja  $E$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e  $X \subset E$  um subconjunto. Uma **combinação linear estrita (CLE) em  $X$**  é uma soma *finita*

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell}_{=: w \in E} \tag{1.3.1}$$

de vetores  $v_1, \dots, v_\ell \in X \setminus \{\mathcal{O}\}$  *dois-a-dois diferentes* e escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , vetores e escalares todos não-nulos.<sup>7</sup>

<sup>7</sup> Permitindo  $\mathcal{O}$  e 0, ou não, não faz nenhuma diferença para os valores de (1.3.1). Então permitir é desnecessário, mas na matemática a desnecessidade é o **inimigo da clareza**. Temos adicionado o adjetivo 'estrito' porque a terminologia 'combinação linear' já é ocupada.

A palavra mais importante em cima é “finita”. Ainda que os vetores  $v_1, \dots, v_\ell$  em (1.3.1) são elementos do conjunto  $X$ , a soma deles não necessariamente encontra-se mais em  $X$ . Encontra-se sim, quando  $X$  é um chamado “subespaço” (Lema 2.1.2).

**Definição 1.3.2.** Como encontra-se frequentemente somas finitas gerais

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell, \quad \alpha_j \in \mathbb{K}, \quad v_j \in E$$

vamos chamar tal de **combinação linear (CL)** como é costume na literatura. Dizemos que

“A CL dos vetores  $v_1, \dots, v_\ell$  representa o vetor  $w$ .”

ou

“O vetor  $w$  é CL dos vetores  $v_1, \dots, v_\ell$ .”

**Exercício 1.3.3.** Seja  $X \subset E$  não vazio, mostre que são conjuntos iguais

$$\begin{aligned} & \{\text{todas as combinações lineares em } X\} \cup \{\mathcal{O}\} \\ &= \{\text{todas as combinações lineares generalizadas em } X\} \end{aligned}$$

**Definição 1.3.4.** Por definição a frase

“**combinação linear dos vetores  $u, v, \dots$** ”

significa

“*combinação linear no conjunto  $\{u, v, \dots\}$* ”

A diferença é que assim *não precisamos usar todos os vetores*. (O que elimina qualquer necessidade de colocar o escalar 0 em frente dos não necessários.)

**Exercício 1.3.5.** a) Caso possível escreva o vetor  $b = (1, -3, 10)$  como combinação linear dos vetores  $u = (2, -3, 5)$ ,  $v = (1, 1, 0)$ , e  $w = (1, 0, 0)$ .

b) Sejam  $u = (1, 1)$ ,  $v = (1, 2)$  e  $w = (2, 1)$ . Encontre números  $a, b, c$  e  $\alpha, \beta, \gamma$  todos não-nulos, tais que

$$au + bv + cw = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

com  $a \neq \alpha$ ,  $b \neq \beta$  e  $c \neq \gamma$ .

[Dica: a) Determinar os coeficientes  $\alpha, \beta, \gamma$  na CL de  $u, v, w$  a qual representa  $b$  lida a um SL. Escalonamento.<sup>8</sup>

b) Defina  $x = a - \alpha$ ,  $y = b - \beta$ , e  $z = c - \gamma$  para obter um SLH. Resolve.]<sup>9</sup>

<sup>8</sup> encontre “o certo ponto da vista” (Comentário 1.2.14) e o SL vai chegar já escalonada..

<sup>9</sup> Respostas para seu controle: a)  $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, -6)$ . b)  $(x, y, z) = z(-3, 1, 1)$ . Escolha um  $z \neq 0$ , por exemplo  $z = 1$ . Então  $(a, b, c) = (\alpha - 3, 1 + \beta, 1 + \gamma)$ . Toda escolha de reais  $\alpha \neq 0, 3$  e  $\beta, \gamma \neq 0, -1$  da uma solução. A escolha  $\alpha = 5$  e  $\beta = \gamma = 1$  resulta em  $a = b = c = 2$ .

### 1.3.2 Independência linear

**Definição 1.3.6** (Independência linear). Um subconjunto  $X$  de um espaço vetorial  $E$  é dito de **conjunto linearmente independente (LI)** se não existe nenhuma combinação linear estrita (CLE) em  $X$  representando o vetor nulo. Caso existisse, o  $X$  é chamado de **conjunto linearmente dependente (LD)**.

Nas outras palavras, chama-se  $X \subset E$  de **conjunto LI** se

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell = \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_\ell = 0 \quad (1.3.2)$$

para toda escolha (finita) de vetores  $v_1, \dots, v_\ell \in X$  *dois-a-dois diferentes*.<sup>10</sup>

**Comentário 1.3.7.**

- (i) O conjunto vazio  $\emptyset$  é LI: Com efeito, como não contem elementos, não admite nenhuma CL. Chama-se tal argumentação de **verdade vazia**.
- (ii) Um conjunto  $X = \{v\}$ , contendo só um vetor, é LI se e somente se  $v \neq \mathcal{O}$ .
- (iii) Se (1.3.2) vale para uma escolha  $v_1, \dots, v_\ell$ , então vale para qualquer sub-escolha destes vetores. [Use os coeficientes  $\alpha_i = 0$  nos restantes.]

Para provar a afirmação (ii), lembra (1.1.3).

**Lema 1.3.8.** *Seja  $X$  um subconjunto de um espaço vetorial  $E$ .*

- a)  $\mathcal{O} \in X \Rightarrow X$  LD. *(O vetor nulo rende conjuntos LD)*
- b) *Todo subconjunto  $A$  de um conjunto LI  $X$  é LI.*

*Demonstração.* a) O termo  $1\mathcal{O}$  é uma CLE em  $X$  representando o vetor nulo (segundo Lema 1.1.18). b) Os elementos de  $A$  são elementos de  $X$  – para as quais (1.3.2) vale pela hipótese.  $\square$

**Exemplo 1.3.9.** Para saber se o subconjunto  $X := \{(1, 0), (2, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^2$  é LI temos que checar (1.3.2) para todas escolhas finitas de elementos  $v_i$  de  $X$  dois-a-dois diferentes. Como  $X$  é um conjunto finito, e tendo em vista Comentário 1.3.7 (iii), começamos com a escolha máxima, ou seja todos os (dois) elementos. Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Conforme (1.3.2) suponhamos a primeira igualdade

$$(0, 0) = \alpha(1, 0) + \beta(2, 1) = (\alpha + 2\beta, \beta)$$

e recebemos a segunda igualdade pelas regras de multiplicação escalar e adição de vetores de  $\mathbb{R}^2$ . Comparando os segundos membros vemos que  $0 = \beta$  o qual usamos na comparação dos primeiros membros: recebemos  $0 = \alpha + 2 \cdot 0 = \alpha$ . Assim temos provado que ambos os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  são nulos. Então  $X$  é LI.

**Exercício 1.3.10.** Quais dos seguintes conjuntos  $X_i$  de vetores de  $\mathbb{R}^2$  são ou não são conjuntos linearmente independentes (LI)? Explique porque são ou não são.

1. Elementos de  $X_1$ : os vetores  $(1, 1)$  e  $(-1, -1)$ .

<sup>10</sup> Para que precisa-se a condição *dois-a-dois diferentes*?

2.  $X_2 := \{(2, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 2)\}$ .
3. Escolha dois vetores  $u, v \in \mathbb{R}^2$ . Então defina  $X_3 := \{u, v, (1, 1)\}$ .

**Exercício 1.3.11.** Prove as afirmações seguintes.

1. A base canônica  $\mathcal{E}^n$  em (1.2.1) é um conjunto LI no  $\mathbb{R}^n$  para  $n \in \mathbb{N}$ .
2. A base canônica  $\mathcal{E}^\infty$  em (1.2.2) é um conjunto LI no  $\mathbb{R}_0^\infty$  e no  $\mathbb{R}^\infty$ .
3. Suponha  $u, v \in \mathbb{K}^2$  não são múltiplos um do outro. Prove que o conjunto  $\{u, v\}$  é LI.  
[Dica: Seja  $\alpha u + \beta v = \mathcal{O}$ . Considere  $\beta \neq 0$  e, lembrando (1.1.3),  $\beta = 0$ .]
4. Sejam  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  vetores de  $\mathbb{R}^n$ . Prove que um deles é múltiplo do outro se, e somente se, para todo  $i, j = 1, \dots, n$  temos  $x_i y_j = x_j y_i$ .
5. O subconjunto  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subset M(2 \times 2)$  composto das matrizes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é um conjunto LI.

6. O conjunto  $X$  composto dos três polinômios

$$p = p(x) = x^3 - 5x^2 + 1$$

$$q = q(x) = 2x^4 + 5x - 6$$

$$r = r(x) = x^2 - 5x + 2$$

é um conjunto LI no espaço vetorial  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  dos polinômios reais.

7. Se o conjunto de vetores  $\{v_1, \dots, v_m\}$  é LI, prove que o mesmo se dá com o conjunto  $\{v_1, v_2 - v_1, \dots, v_m - v_1\}$ . Vale a recíproca?



## Capítulo 2

# Subespaços

Subespaços de um espaço vetorial  $E$  são subconjuntos  $F$  as quais são invariante pelas duas operações chegando com  $E$ . Assim faz sentido restringir as duas operações a  $F$ . Munidos das restrições  $F$  torna-se um espaço vetorial mesmo.

### 2.1 Definição e exemplos

**Definição 2.1.1.** Um subconjunto  $F \subset E$  de um espaço vetorial  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$  é chamado de **subespaço** se é **fechado sob as duas operações**, ou seja

- (i)  $u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$  ( $F$  é fechado sob adição)  
(ii)  $\alpha \in \mathbb{K}, u \in F \Rightarrow \alpha u \in F$  ( $F$  é fechado sob multiplicação escalar)

**Lema 2.1.2.** *Seja  $F$  um subespaço de um espaço vetorial  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ . Então*

- a)  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}, v_1, \dots, v_k \in F \Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \in F$  (*fechado sob CL*)  
b)  $F$  é um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$  onde as duas operações são aquelas de  $E$  restrito ao subconjunto  $F \subset E$ . (*subespaços são espaços vetoriais*)

*Demonstração.* a) Indução. b) As restrições tomam valores em  $F$  segundo parte a) e as axiomas valem como os elementos de  $F$  são elementos de  $E$  para as quais os axiomas valem pela hipótese que  $E$  é um espaço vetorial.  $\square$

**Exercício 2.1.3** (Vetor nulo). O vetor nulo de um subespaço  $F$  é o vetor nulo  $\mathcal{O}$  do espaço vetorial ambiente. [Dica: Mostre  $\mathcal{O} \in F$ . O vetor nulo de  $F$  é único.]

Checar se um subconjunto  $F \subset E$  é um espaço vetorial é bastante trabalhoso dado os muitos axiomas. Isso mostra o valor alto da parte b) do lema dizendo que é suficiente checar “fechado sob as duas operações” – tarefa rapidinha.

**Exercício 2.1.4.** Mostre que o espaço vetorial  $\mathbb{R}$  só tem dois subespaços  $\{0\}$  e  $\mathbb{R}$ .

**Exercício 2.1.5.** Mostre que são subespaços de um espaço vetorial  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ :

- a)  $F := \{\mathcal{O}\}$  (o subespaço mínimo / trivial)  
 a)  $F := E$  (o subespaço máximo)  
 b)  $\mathbb{K}v := \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$  (a reta passando  $v$  e a origem  $\mathcal{O}$ )  
 onde  $v$  é um vetor não-nulo de  $E$ . Observe que  $\mathbb{K}\mathcal{O} = \{\mathcal{O}\}$  é um ponto só.

**Exemplo 2.1.6** (O subespaço  $\mathbb{R}_0^\infty$  de  $\mathbb{R}^\infty$ ). O subconjunto  $\mathbb{R}_0^\infty \subset \mathbb{R}^\infty$ , composto de todas sequências reais tal que só um número finito de membros são não-nulos, é um espaço vetorial: Se a lista  $u$  tem  $k$  membros não-nulos e  $v$  tem  $\ell$ , então (i)  $u + v$  tem no máximo  $k + \ell$  e (ii)  $\alpha u$  tem no máximo  $k$ .

**Exercício 2.1.7** (Espaços vetoriais de funções). O conjunto  $\mathcal{F}(\mathbb{R}) := \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  das funções reais é um espaço vetorial sob adição e multiplicação com constantes  $\alpha \in \mathbb{R}$ , veja Exercício 1.2.13. Para  $n \in \mathbb{N}_0$  seja

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) := \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto dos **polinômios reais do grau menor ou igual  $n$**  e  $\mathcal{P}(\mathbb{R}) := \bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  o conjunto de todos os **polinômios reais**. Seja

$$C^0(\mathbb{R}) := C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$$

o conjunto das **funções contínuas**. Para  $k \in \mathbb{N}$  seja  $C^k(\mathbb{R}) := C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  o conjunto das **funções  $k$  vezes continuamente diferenciáveis**. Chama-se

$$C^\infty(\mathbb{R}) := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\mathbb{R})$$

o conjunto das **funções suaves**. Sejam  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $k \in \mathbb{N}$ . Mostre que

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^k(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

são subespaços do espaço vetorial  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  do Exercício 1.2.13. Segundo parte b) do Lema 2.1.2 todos estes conjuntos são espaços vetoriais sob adição de funções e multiplicação com constantes.

**Exemplo 2.1.8** (Hiperplanos no  $\mathbb{R}^n$ ). Dada uma lista  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ , o subconjunto

$$H_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\}$$

é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ . O vetor nulo lida ao subespaço máximo  $H_\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$ . No caso não-nulo  $\alpha \neq \mathcal{O}$  chama-se  $H_\alpha$  de **hiperplano** no  $\mathbb{R}^n$  passando a origem  $\mathcal{O}$ .

**Lema 2.1.9** (Conjunto de subespaços é fechado sob interseções). *Cada interseção  $F := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  de subespaços  $F_\lambda$  de um espaço vetorial  $E$  é um subespaço.*

*Demonstração.* Dado  $u, v \in F := \bigcap_{\lambda} F_\lambda$ , ou seja  $u, v \in F_\lambda \forall \lambda$ . Como subespaço cada um  $F_\lambda$  é fechado sob adição, ou seja  $u + v \in F_\lambda$  para todos os  $\lambda \in \Lambda$ . Em símbolos  $u + v \in \bigcap_{\lambda} F_\lambda =: F$ . Analogamente  $F$  é fechado sob mult. escalar.  $\square$



**Exemplo 2.1.10.** Dada uma matriz  $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in M(m \times n)$ , então o conjunto

$$F_{\mathbf{a}} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}x = \mathcal{O}\}$$

é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ . Para ver isso lembramos de (1.2.5) que  $\mathbf{a}x = \mathcal{O}$  é o SLH

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

para  $n$  incógnitas  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , notação  $x := (x_1, \dots, x_n)$ . Note-se que as soluções  $x$  da primeira linha formam o hiperplano  $H_1 := H_{\mathbf{a}_1}$ , associado à primeira linha  $\mathbf{a}_1$  da matriz  $\mathbf{a}$ . Isso é o certo ponto de vista, com efeito assim

$$F_{\mathbf{a}} = H_1 \cap \cdots \cap H_m$$

é uma interseção de subespaços e por isso é um subespaço segundo Lema 2.1.9.

**Exercício 2.1.11.**

- Quais dos seguintes subconjuntos  $X_j$  são subespaços de  $\mathbb{R}^2$ ? Em cada caso faça um desenho e explique porque é subespaço ou não é.
  - $X_1 := \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ ;
  - $X_2 := \{(\alpha + 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ ;
  - $X_3 := \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \text{ reais não-negativos}\} \subset \mathbb{R}^2$ .
- (LI transfere-se a espaços vetoriais *ambientes*). Seja  $F$  um subespaço de um espaço vetorial  $E$ . Mostre que se um subconjunto de  $F$  é LI em respeito ao espaço vetorial  $F$  então o também é LI em respeito ao espaço vetorial ambiente  $E$ .

## 2.2 Conjuntos gerandos

**Definição 2.2.1** (Subespaço gerado por um subconjunto). Seja  $E$  um espaço vetorial e  $X$  um subconjunto. O **subespaço de  $E$  gerado por  $X$**  é o conjunto<sup>1</sup>

$$\langle X \rangle := \{\text{todas as combinações lineares estritas em } X\} \cup \{\mathcal{O}\}$$

veja Exercício 1.3.3. Note: O conjunto vazio gera o subespaço trivial  $\{\mathcal{O}\} = \langle \emptyset \rangle$ . Se  $\langle X \rangle = E$  dizemos que o **conjunto  $X$  gera  $E$** . Neste caso cada um elemento de  $E$  é uma CL de elementos de  $X$ .

“Se  $v_1, \dots, v_\ell$  são vetores de  $E$ ” vamos usar a notação curta<sup>2</sup>

$$\langle v_1, \dots, v_\ell \rangle := \langle \{v_1\} \cup \cdots \cup \{v_\ell\} \rangle$$

para o subespaço de  $E$  gerado pelo conjunto composto dos vetores  $v_1, \dots, v_\ell$ .

<sup>1</sup> Lembre-se da nossa convenção (1.1.1) para conjuntos, por exemplo  $\{1, 2\} \cup \{2\} = \{1, 2\}$ .

<sup>2</sup> O ponto sutil é que uns dos vetores podem ser iguais, veja Definição 1.1.2.

**Exercício 2.2.2.** Mostre que  $\langle X \rangle$  é um subespaço de  $E$  e que  $\mathbb{K}v = \langle v \rangle$ .

**Lema 2.2.3.** *Seja  $X$  um subconjunto de um espaço vetorial  $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ . Então*

- (i)  $X \subset \langle X \rangle$  (contido no subespaço gerado)
- (ii)  $Y \subset X \Rightarrow \langle Y \rangle \subset \langle X \rangle$  (naturalidade sob inclusão)
- (iii)  $F \subset E$  subespaço  $\Rightarrow \langle F \rangle = F$  (não muda subespaços)
- (iv) *Um subespaço  $F \subset E$  contendo  $X$  contém  $\langle X \rangle$ .* (respeita subespaços)

*Demonstração.* (i) Seja  $v \in X$ , então  $v \stackrel{(\text{comp.})}{=} 1v \in \langle X \rangle$ . (ii) Como  $Y \subset X$ , CLe's em  $Y$  são CLe's em  $X$ . (iii) Igualdade é consequência das duas inclusões  $F \subset \langle F \rangle \subset F$ , onde a primeira é (i) e para a segunda usamos que os elementos de  $\langle F \rangle$  são CL's em  $F$ , mas um subespaço é fechado sob CL's segundo Lema 2.1.2 a). (iv) Com efeito  $F \stackrel{(\text{iii})}{=} \langle F \rangle \stackrel{(\text{ii})}{\supset} \langle X \rangle$ .  $\square$

**Lema 2.2.4.** *Todo subconjunto LI  $\{u, v\} \subset \mathbb{R}^2$  de dois elementos já gera  $\mathbb{R}^2$ .*

*Demonstração.* Lema A.2.1.  $\square$

**Lema 2.2.5** (Os subespaços de  $\mathbb{R}^2$ ).  $\{\mathcal{O}\}, \mathbb{R}^2$ , e as retas passando a origem.

*Demonstração.* 'D' Exercício 2.1.5. 'C' Seja  $F$  um subespaço de  $\mathbb{R}^2$ . Caso  $F = \{\mathcal{O}\}$ , pronto. Caso contrário existe  $u \in F$  não-nulo. Se os demais  $f \in F$  são múltiplos de  $u$  temos  $F = \mathbb{R}u$ , pronto. Caso contrário existe um  $v \in F$ , não múltiplo de  $u$ . Então  $\{u, v\}$  é LI segundo Exercício 1.3.11 parte 2. Mas neste caso segundo Lema 2.2.4 e Lema 2.2.3 (iv) obtemos  $\mathbb{R}^2 = \langle u, v \rangle \subset F \subset \mathbb{R}^2$ .  $\square$

**Exemplo 2.2.6** (Os espaços  $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^\infty, \mathbb{R}^\infty$ ).

- a) A base canônica  $\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$ , veja (1.2.1), gera  $\mathbb{R}^n$ . Com efeito

$$\mathbb{R}^n \ni v = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A base canônica  $\mathcal{E}^0 := \emptyset$  gera o subespaço vetorial trivial  $\{0\} =: \mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}$ .

- b) Dado  $i \in \mathbb{N}$ , a sequência com todos membros nulos exceto o  $i$ -ésimo qual é 1 denotamos também de  $e_i$ . A **base canônica**  $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$  gera  $\mathbb{R}_0^\infty$ .
- c) A base canônica  $\mathcal{E}^\infty$  não gera  $\mathbb{R}^\infty$ : Uma CLe deve ser uma soma *finita*, tente escrever a sequência cujos membros são todos 1 como uma CL.

**Exemplo 2.2.7** (Polinômios). O conjunto de **monômios**  $\{x^0, x, x^2, \dots, x^n\}$  onde  $x^0 := 1$  gera  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ . Todos os monômios  $\{1, x, x^2, \dots\}$  geram  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

**Exemplo 2.2.8** (Sistemas lineares). Dado um sistema linear  $[a : b]$  onde  $a$  é uma matriz  $m \times n$ . Sabemos de (1.2.6) que existe uma solução  $x$  se e somente se a lista  $b$  é CL das colunas da matriz  $a$ . Consequentemente se as colunas de  $a$  formam um conjunto de geradores de  $\mathbb{R}^m$ , então para cada uma inhomogeneidade  $b \in \mathbb{R}^m$  o SL admite uma solução.

## 2.3 Soma direta

**Definição 2.3.1** (Soma de subconjuntos). A soma de subconjuntos  $X$  e  $Y$  de um espaço vetorial  $E$  é o conjunto de todas as somas

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\} \subset E$$

Em vez de  $\{u\} + Y$  escreve-se  $u + Y$  e chama-se **a translação de  $Y$  por  $u$** .

**Lema 2.3.2.** A soma de dois subespaços é gerado da união deles, em símbolos

$$F, G \subset E \text{ subespaços} \Rightarrow F + G = \langle F \cup G \rangle$$

Particularmente, a soma de dois subespaços é um subespaço mesmo.

*Demonstração.* Para provar igualdade de dois conjuntos prova-se as duas inclusões. '⊂' Os elementos de  $F + G$  são CL's da forma especial  $f + g$  enquanto  $\langle F \cup G \rangle$  contem todas as CL's em  $F \cup G$ .

'⊃' Pegue um elemento  $h$  de  $\langle F \cup G \rangle$  e use comutatividade para re-escrever a soma finita com os somandos em  $F$  no frente e depois aqueles em  $G$ . Assim recebemos um elemento, igual  $h$ , em  $F + G$ .  $\square$

**Definição 2.3.3** (Soma direta de subespaços). Sejam  $F_1, F_2 \subset E$  subespaços de um espaço vetorial  $E$ . No caso da interseção trivial  $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$  escreve-se  $F_1 \oplus F_2$  em vez de  $F_1 + F_2$  e chama-se **soma direta dos subespaços  $F_1$  e  $F_2$** .

O símbolo  $F \oplus G$  é simplesmente uma abreviação para duas informações, com efeito

$$F \oplus G = H \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{\mathcal{O}\} \\ F + G = H \end{cases}$$

Use-se a soma direta para decompor um vetor unicamente em componentes.

**Teorema 2.3.4.** Sejam  $F_1, F_2 \subset F$  três subespaços de um espaço vetorial  $E$ :

$$F = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow \forall f \in F, \exists! f_1 \in F_1, f_2 \in F_2 \text{ tal que } f = f_1 + f_2$$

*Demonstração.* Teorema A.2.2.  $\square$

**Exercício 2.3.5.** No espaço vetorial  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  das funções  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sejam

$$F_1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ que se anulam em todos os pontos do intervalo } [0,1]\}$$

$$F_2 = \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ que se anulam em todos os pontos do intervalo } [2,3]\}$$

Mostre que  $F_1$  e  $F_2$  são subespaços de  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ , que  $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = F_1 + F_2$ , mas não se tem  $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_2$ .

**Exercício 2.3.6.** Verdadeiro ou falso? Para todos subconjuntos  $X, Y \subset E$  vale

$$(i) \quad \langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$$

$$(ii) \quad \langle X \cap Y \rangle = \langle X \rangle \cap \langle Y \rangle$$

**Exercício 2.3.7.** Uma matriz quadrada  $\mathbf{a} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  chama-se

**simétrica** se  $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$       **anti-simétrica** se  $a_{ij} = -a_{ji} \forall i, j$

Então as matrizes simétricas são aquelas iguais às suas transpostas  $\mathbf{a}^t = \mathbf{a}$  e as anti-simétricas aquelas com  $\mathbf{a}^t = -\mathbf{a}$ .

Prove que a) o conjunto  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(n)$  das matrizes simétricas  $n \times n$  e o conjunto  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(n)$  das anti-simétricas são subespaços de  $M(n \times n; \mathbb{K})$  e b) que

$$M(n \times n; \mathbb{K}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

[Dica: b) Considere as duas matrizes  $\mathbf{a}^\pm := \frac{1}{2}(\mathbf{a} \pm \mathbf{a}^t)$ .]

# Capítulo 3

## Bases

Durante o Capítulo 3 denotamos de  $E$  um espaço vetorial

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K})$$

sobre um corpo  $\mathbb{K}$ .

Bases de um espaço vetorial  $E$  são subconjuntos LI as quais geram  $E$  no sentido que todo vetor de  $E$  pode ser escrito como combinação linear (CL) dos elementos da base. Os coeficientes escalares na CL são únicos (propriedade LI) e chamados de coordenadas de um vetor em respeito à base. Quando  $E$  admite uma base finita de  $n$  elementos chama-se  $n$  a dimensão de  $E$ . Se escolhermos uma outra base, recebemos uma outra dimensão? Veremos na Seção 3.1.2 que não: Se  $E$  admite uma base finita todas as bases tem o mesmo número de elementos.

Então bases são LI, contem suficientemente muitos elementos para que todo vetor pode ser escrito como CL deles, e na dimensão finita bases ainda são conjuntos máximos no sentido que só adicionando mais um outro vetor já recebe-se um conjunto LD.

**Definição 3.0.8** (Base). Para um subconjunto  $\mathcal{B}$  de  $E$  definimos

$$\mathcal{B} \text{ base de } E \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{B} \text{ gera } E \\ \mathcal{B} \text{ é LI} \end{cases}$$

Uma **base ordenada** é uma base  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$  cujos elementos são enumerados, equivalentemente escreve-se na forma de uma lista ordenada  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Conjuntos enumerados correspondem a sequências, listas caso finito.

**Exercício 3.0.9.** Se  $E = F_1 \oplus F_2$ , mostre que uma união  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  de bases de  $F_1$  e  $F_2$  é uma base de  $E$ . [Dica: União LI – ideia de (A.2.1).]

**Exemplo 3.0.10.** Sejam  $u = (1, 1)$  e  $v = (2, 0)$ . Os conjuntos  $\{e_1, u\}$  e  $\{u, v\}$  são bases de  $\mathbb{R}^2$ . Ambos conjuntos são LI segundo Teorema 3.1.1 (os elementos não são múltiplos um do outro), e por isso geram  $\mathbb{R}^2$  (Lema A.2.1). Um exemplo para LD é o conjunto  $\{e_1, v\}$ , no qual um elemento é múltiplo do outro.

**Exemplo 3.0.11** (Bases canônicas).

a) **Listas.** Base canônica  $\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$  onde  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Caso  $n \geq 1$ . Exercício 1.3.11 confirma LI, Exercício 2.2.6 diz que gera  $\mathbb{R}^n$ .  
 Caso  $n = 0$ . Note que  $\mathbb{R}^0 = \{0\}$  é o espaço vetorial trivial. O conjunto vazio  $\mathcal{E}^0 = \emptyset$  é LI (Comentário 1.3.7) e gera o espaço trivial (Definição 2.2.1).  
 $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$ , veja Exemplo 2.2.6, não é base do  $\mathbb{R}^\infty$ , é sim do  $\mathbb{R}_0^\infty$ .

b) **Matrizes.** Seja  $\mathbf{e}^{ij} \in M(m \times n)$  a matriz com todas entradas nulas exceto a  $ij$ -ésima entrada a qual é  $(\mathbf{e}^{ij})_{ij} = 1$ . A base canônica de  $M(m \times n)$  é

$$\mathcal{E}^{m \times n} := \{\mathbf{e}^{ij} \mid i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\} \subset M(m \times n)$$

Note-se que a base canônica tem  $|\mathcal{E}^{m \times n}| = mn$  elementos.

c) **Polinômios.** Base canônica são monômios  $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

Gerando: Por definição de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ . LI: Uma CL de monômios é um polinômio  $p \neq 0$  (não constantemente nulo). Se  $p$  representa o vetor nulo (o polinômio constantemente nulo) todos coeficientes devem se anular porque polinômios de grau  $\ell \geq 1$  tem um numero finito de raízes. Caso  $p$  é de grau zero, ele é da forma  $p(x) = \alpha_0 x^0$  e para se anular  $\alpha_0$  deve-se anular. Analogamente  $\{1, x, \dots, x^n\}$  é uma base de  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ .

d) **Hiperplanos.** Dado uma lista  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  com  $\alpha_n \neq 0$ , o hiperplano

$$\mathbf{H}_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}$$

tem como base o conjunto  $\mathcal{B}_\alpha := \{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$  no qual a lista

$$\xi_i := \left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -\frac{\alpha_i}{\alpha_n}\right) \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n-1$$

tem todos membros nulos exceto o  $i$ -ésimo e o último. É óbvio que  $\mathcal{B}_\alpha$  é LI, que gera  $\mathbb{R}^n$  podemos ver assim: Para  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  vale

$$\begin{aligned} x &\in \mathbf{H}_\alpha \\ \Leftrightarrow 0 &= \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \\ \Leftrightarrow x_n &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} x_1 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1} \\ \Leftrightarrow x &= \left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} x_1 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1}\right) \in \mathbb{R}^n \\ \Leftrightarrow x &= x_1 \xi_1 + \dots + x_{n-1} \xi_{n-1} \end{aligned}$$

## 3.1 Aplicações

### 3.1.1 Coordenadas de um vetor

**Teorema 3.1.1.** *Seja  $X \subset E$  um subconjunto tal que  $|X| \geq 2$ . Então*

- a)  $X$  é LI  $\Leftrightarrow$  nenhum elemento de  $X$  é CL de outros elementos de  $X$   
 b)  $X$  é LD  $\Leftrightarrow$  existe um elemento de  $X$  que é CL de outros elementos de  $X$

*Demonstração.* a) ' $\Rightarrow$ ' Seja  $X$  LI, suponha por absurdo que um elemento  $u \in X$  fosse CL  $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$  de outros elementos  $v_j$  (tem outros como  $|X| \geq 2$ ). Adicionando  $-u$  em ambos lados obtemos  $\mathcal{O} = (-1)u + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ . Como  $-1 \neq 0$ , e depois descartar os termos com coeficientes nulos, trata-se de uma CLe em  $X$  representando o vetor nulo. Assim  $X$  é LD. Contradição.

' $\Leftarrow$ ' Suponhamos por absurdo  $X$  fosse LD. Então existe uma CLe em  $X$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \mathcal{O}$$

representando o vetor nulo. Caso  $k = 1$ . Então  $\alpha_1 v_1 = \mathcal{O}$  e assim  $v_1 = \alpha_1^{-1} \mathcal{O} = \mathcal{O}$ . Contradição. Caso  $k \geq 2$ . Então  $v_1 = -\alpha_1^{-1} \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_1^{-1} \alpha_k v_k$  é CL de outros elementos de  $X$ . Contradição. b) é equivalente à parte a).  $\square$

**Corolário 3.1.2** (Unicidade dos coeficientes de CL's em conjuntos LI). *Seja  $\{v_1, \dots, v_k\}$  um subconjunto LI de  $E$ , então*

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_k = \beta_k$$

*Em palavras, se duas CL's num conjunto LI representam o mesmo vetor, então os coeficientes escalares coincidem.*

*Demonstração.*  $\alpha_1 - \beta_1 = 0$ : Suponha por absurdo  $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$ . Então o vetor

$$v_1 = (\alpha_1 - \beta_1)^{-1} ((\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_k - \beta_k)v_k)$$

é CL de outros elementos. Contradição. Análogo para os outros  $\alpha_j - \beta_j$ .

Outro argumento (usando LI): Pela hipótese  $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_k - \beta_k)v_k = \mathcal{O}$ . LI diz que todos coeficientes são nulos.  $\square$

**Lema 3.1.3.**

- a) Um subconjunto  $Y$  de um conjunto LI  $X$  é LI. (Subconjuntos herdam LI)  
 b) Um conjunto  $X$  contendo um  $Y$  LD é LD. (Superconjuntos herdam LD)  
 c) Um subconjunto LI  $X$  num subespaço  $F \subset E$ , também é LI em  $E$ .  
 (LI transfere-se para superespaços)

*Demonstração.* a) Como  $X$  é LI, toda CL em  $X$  representando  $\mathcal{O}$  tem todos coeficientes nulos. Como  $Y \subset X$ , toda tal CL em  $Y$  é uma em  $X$  e assim tem todos coeficientes nulos. b) Como  $Y \subset X$ , uma CLe em  $Y$  representando  $\mathcal{O}$  é uma tal em  $X$ . c) Isso é simplesmente o fato que o vetor nulo de um subespaço é o vetor nulo do espaço vetorial ambiente, veja Exercício 2.1.3.  $\square$

**Comentário 3.1.4** (Consequências das duas propriedades de ser base  $\mathcal{B}$  de  $E$ ).  $\langle \mathcal{B} \rangle = E$ : Assim todo  $v \neq \mathcal{O}$  pode ser escrita como CL em  $\mathcal{B}$ , com efeito

$$v = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k \quad (3.1.1)$$

para escalares  $\alpha_i \in \mathbb{K}$  e vetores  $\xi_j \in \mathcal{B}$  da base.

$\mathcal{B}$  é LI: Assim os coeficientes  $\alpha_j$  em cima são únicos (Corolário 3.1.2).

Todo vetor  $v \in E$  admite coordenadas únicas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  em respeito a uma base ordenada  $\mathcal{B}$  de  $E$ .

**Definição 3.1.5** (Coordenadas). Suponha  $\mathcal{B} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  é uma base ordenada de um espaço vetorial  $E$ . As **coordenadas** de um vetor  $v \in E$  em respeito à base  $\mathcal{B}$  são os coeficientes  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  em (3.1.1). A matriz  $n \times 1$  das coordenadas

$$[v]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n \quad (3.1.2)$$

é chamado de **vetor coordenada** de  $v$  em respeito à base  $\mathcal{B}$ . Abreviamos  $[v] := [v]_{\mathcal{E}^m}$  no caso de  $E = \mathbb{K}^m$  munido da base canônica  $\mathcal{E}^m$ .

**Lema 3.1.6.** Duas bases  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  e  $\tilde{\mathcal{B}}$  de  $E$  são iguais se e somente se cada um elemento de  $E$  tem o mesmo vetor coordenada em respeito a  $\mathcal{B}$  e a  $\tilde{\mathcal{B}}$ . Em símbolos

$$[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\tilde{\mathcal{B}}} \quad \forall v \in E \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” A hipótese para  $v := \xi_1$  diz que  $[\xi_1]_{\mathcal{B}} = [\xi_1]_{\tilde{\mathcal{B}}}$ . Note-se que  $[\xi_1]_{\mathcal{B}} = (1, 0, \dots, 0)$ . E assim  $[\xi_1]_{\tilde{\mathcal{B}}} = (1, 0, \dots, 0)$ . Mas isso significa que  $\xi_1 = 1 \cdot \tilde{\xi}_1 + 0 \cdot \tilde{\xi}_2 + \dots + 0 \cdot \tilde{\xi}_n = \tilde{\xi}_1$ . Repita para  $v = \xi_2, \dots, \xi_n$ . “ $\Leftarrow$ ” óbvio.  $\square$

**Exercício 3.1.7.** Seja  $E = \mathbb{R}^2$  munido da base canônica  $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$  e da base  $\mathcal{B} = (\xi_1, \xi_2)$  onde  $\xi_1 = (1, 1)$  e  $\xi_2 = (-1, 1)$ . Determine  $[e_1]_{\mathcal{B}}, [e_2]_{\mathcal{B}}, [e_1], [e_2]$  e também  $[\xi_1]_{\mathcal{B}}, [\xi_2]_{\mathcal{B}}, [\xi_1], [\xi_2]$ .

**Exercício 3.1.8.** Mostre que os polinômios  $1, x-1$ , e  $x^2-3x+1$  formam uma base de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ . Exprima o polinômio  $2x^2-5x+6$  como CL nessa base.

### 3.1.2 Dimensão de um espaço vetorial

**Teorema 3.1.9.** Se um conjunto finito gera  $E$ , então qualquer conjunto  $Y \subset E$  com mais elementos é LD.

**Corolário 3.1.10.** Suponha um conjunto finito  $X$  gera  $E$ , então

$$Y \subset E \text{ LI} \quad \Rightarrow \quad |Y| \leq |X|.$$

Para provar Teorema 3.1.9 vamos usar o seguinte resultado sobre SLH's.

**Teorema 3.1.11** (Existência de soluções não-triviais de um SLH). Dado uma matriz  $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K})$ . Se tem menos linhas como colunas ( $m < n$ ), então o SLH  $\mathbf{a}x = \mathcal{O}$ , compare (1.2.5), admite soluções  $x = (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ .

*Demonstração.* Indução sobre o número  $m$  de linhas. Veja Teorema A.3.1.  $\square$



*Demonstração de Teorema 3.1.9.* Suponha que o conjunto  $X = \{v_1, \dots, v_m\}$  gera o espaço vetorial  $E$  e seja  $Y \subset E$  um outro subconjunto com mais elementos, ou seja  $|Y| > m$ . Para mostrar que  $Y$  é LD, basta mostrar segundo Lema 3.1.3 b) que um subconjunto  $U = \{u_1, \dots, u_{m+1}\} \subset Y$  de  $m+1$  elementos é LD. Como  $X$  gera  $E$  e cada um  $u_j$  pertence a  $E$  existem escalares  $a_{ij}$  tal que

$$u_j = a_{1j}v_1 + \dots + a_{mj}v_m \quad (*_j)$$

para  $j = 1, \dots, m+1$ .

Para  $U$  é LD resta mostrar: existem escalares não-nulos  $x_1, \dots, x_{m+1}$  tal que

$$x_1u_1 + \dots + x_{m+1}u_{m+1} = \mathcal{O} \quad (3.1.3)$$

Para este fim considere o SLH de  $m$  equações de  $n = m+1$  incógnitas  $x_j$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1,m+1}x_{m+1} = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{m,m+1}x_{m+1} = 0 \end{cases} \quad (\text{SLH})$$

o qual tem uma solução não-trivial  $x = (x_1, \dots, x_{m+1}) \neq (0, \dots, 0)$  segundo Teorema 3.1.11 como  $m < n$ . Obtemos (3.1.3) assim: usando  $(*_1 - *_{m+1})$  temos

$$\begin{aligned} & x_1u_1 + \dots + x_{m+1}u_{m+1} \\ &= x_1(a_{11}v_1 + \dots + a_{m1}v_m) \\ & \quad + x_2(a_{12}v_1 + \dots + a_{m2}v_m) \\ & \quad \vdots \\ & \quad + x_{m+1}(a_{1,m+1}v_1 + \dots + a_{m,m+1}v_m) \\ &= v_1 \underbrace{\sum_{j=1}^{m+1} a_{1j}x_j}_{= 0 \text{ (SLH)}_1} + \dots + v_m \underbrace{\sum_{j=1}^{m+1} a_{mj}x_j}_{= 0 \text{ (SLH)}_m} \\ &= \mathcal{O} \end{aligned}$$

□

**Proposição 3.1.12.** *Se uma base  $\mathcal{B}$  de  $E$  tem  $m$  elementos, então todas tem.*

*Demonstração.* Sejam  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$  e  $\tilde{\mathcal{B}}$  bases de  $E$ .

- 1)  $\langle \mathcal{B} \rangle = E$  e  $Y := \tilde{\mathcal{B}}$  LI implicam (Corolário 3.1.10)  $\ell := |\tilde{\mathcal{B}}| \leq |\mathcal{B}| = m < \infty$ .
- 2) Analogamente como  $\langle \tilde{\mathcal{B}} \rangle = E$  e  $Y := \mathcal{B}$  é LI, temos que  $m = |\mathcal{B}| \leq |\tilde{\mathcal{B}}| = \ell$ . □

**Definição 3.1.13** (Dimensão). Se um espaço vetorial  $E$  admite uma base finita  $\mathcal{B}$ , o numero dos elementos é dito a **dimensão de  $E$** , em símbolos

$$\dim E := |\mathcal{B}|$$

Caso  $E$  não admite nenhuma base finita dizemos que  $E$  é de **dimensão infinita** e escrevemos  $\dim E = \infty$ .

**Comentário 3.1.14** (Dimensão do espaço vetorial trivial). O conjunto vazio é uma base do espaço vetorial trivial  $E = \{\mathcal{O}\}$ , Exemplo 1.3.7, assim  $\dim\{\mathcal{O}\} = 0$ .

**Lema 3.1.15** (Aumentando conjuntos LI). *Seja  $X = \{v_1, \dots, v_k\}$  um subconjunto LI e seja  $u \in E$  um vetor fora do subespaço gerado, ou seja  $\langle X \rangle$ . Então o conjunto estendido  $\{v_1, \dots, v_k, u\}$  também é LI.*

*Demonstração.* Se  $X = \emptyset$ , então  $u \notin \langle \emptyset \rangle = \{\mathcal{O}\}$ , assim  $u \neq \mathcal{O}$  e  $\{u\}$  é LI segundo Corolário 1.3.7. Se  $X \neq \emptyset$ , suponha por absurdo que  $\{v_1, \dots, v_k, u\}$  fosse LD. Assim existe uma CL  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta u = \mathcal{O}$ . Caso  $\beta = 0$ , então  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq (0, \dots, 0)$  e  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \mathcal{O}$ . Assim  $\{v_1, \dots, v_k\}$  é LD. Contradição. Caso  $\beta \neq 0$ , então  $u = -\beta^{-1}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) \in \langle X \rangle$ . Contradição.  $\square$

**Exercício 3.1.16.** Sejam  $X_1, X_2, \dots$  subconjuntos LI de um espaço vetorial  $E$ .

1. Caso encaixado  $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ , prove que  $X = \bigcup X_n$  é LI.
2. Se cada  $X_n$  tem  $n$  elementos, prove que existe um conjunto LI  $\tilde{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$  com  $x_j \in X_j$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ .
3. Supondo  $E = \mathbb{R}^\infty$  e as hipóteses em 1. e 2., é verdade que  $X = \bigcup X_n$  seja uma base de  $E$ ?

### Corolários do Teorema 3.1.9

Nos corolários seguintes  $n \in N_0$ , particularmente é um número, assim finito.

**Corolário 3.1.17.**  $Y \subset E, |Y| > n := \dim E \Rightarrow Y$  LD

*Demonstração.* Como  $\dim E = n$  existe uma base  $\mathcal{B}$  de  $E$  com  $n$  elementos.  $\square$

**Corolário 3.1.18.** *Se um conjunto  $Y$  é LI em  $E$ , então  $|Y| \leq \dim E$ .*

*Demonstração.* Caso  $\dim E = \infty$ : verdadeiro trivialmente. Caso  $\dim E < \infty$ : escolha para  $X$  em Corolário 3.1.10 uma base de  $E$  para obter  $|Y| \leq \dim E$ .  $\square$

**Corolário 3.1.19.** *Suponha  $X \subset E$  tem  $n := \dim E$  elementos, então*

$$X \text{ gera } E \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ é LI}$$

*Demonstração.*  $n = 0$ . Assim  $X = \emptyset$ , ambos lados valem automaticamente.

$n = 1$ . Assim  $X = \{v\}$  onde  $v \in E$ , ambos lados são equivalentes a  $v \neq \mathcal{O}$ .

$n = 2$ . '⇒' Suponha que  $X = \{v_1, \dots, v_n\}$  gera  $E$ . Por absurdo suponha que  $X$  é LD. Segundo Teorema 3.1.1 b) um elemento de  $X$ , dizemos  $v_n$ , é CL de outros elementos de  $X$ . Então  $E = \langle X \rangle = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ . Qualquer base  $\mathcal{B}$  de  $E$  tem  $n$  elementos pela hipótese  $n = \dim E$  – mais elementos como o conjunto  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  gerando  $E$ . Então  $\mathcal{B}$  é LD segundo Teorema 3.1.9. Contradição. '⇐' Suponha que  $X = \{v_1, \dots, v_n\}$  é LI. Por absurdo suponha que  $X$  não gera  $E$ . Então existe  $u \in E$  não elemento de  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ . Assim o conjunto aumentado  $\{v_1, \dots, v_n, u\}$  é LI segundo Lema 3.1.15. Mas um subconjunto com mais elementos  $(n + 1)$  como a dimensão  $(n)$  é LD segundo Corolário 3.1.17. Contradição.  $\square$

**Corolário 3.1.20.** *Um subconjunto LI com  $n = \dim E$  elementos é uma base.*

*Demonstração.* Tal subconjunto LI gera  $E$  segundo Corolário 3.1.19 ' $\Leftarrow$ '.  $\square$

**Lema 3.1.21.** *Se um conjunto finito  $X$  gera  $E$ , então  $|X| \geq \dim E$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $X = \{v_1, \dots, v_m\}$  gera  $E$ .

CASO  $X = \{v_1, \dots, v_m\}$  é LI: Então  $X$  é base e assim  $|X| = \dim E$ .

CASO  $X = \{v_1, \dots, v_m\}$  é LD: Assim  $X \neq \emptyset$ .

Caso  $m = 1$ : Então  $v_1 = \mathcal{O}$  e  $E = \langle v_1 \rangle = \{\mathcal{O}\}$ . Assim  $|X| = 1 > 0 = \dim E$ .

Caso  $m \geq 2$ : Como  $\{v_1, \dots, v_m\}$  é LD, pelo menos um elemento, dizemos  $v_m$ , deve ser CL de outros. Iterando até chegamos num conjunto LI obtemos que

$$E = \langle v_1, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_{m-1} \rangle = \dots = \langle v_1, \dots, v_\ell \rangle$$

onde  $\{v_1, \dots, v_\ell\}$  é LI e  $\ell \geq 1$ . Então  $\{v_1, \dots, v_\ell\} =: \mathcal{B}$  é base de  $E$  e assim  $|X| > \ell = |\mathcal{B}| =: \dim E$ .  $\square$

**Exemplo 3.1.22** (Dimensão). Veja Exemplo 3.0.11.

(a)  $\dim \mathbb{R}^n = |\mathcal{E}^n| = n$  e  $\dim \mathbb{R}_0^\infty = |\mathcal{E}^\infty| = \infty$ . (Análogo para corpos  $\mathbb{K}$ .)

$\dim \mathbb{R}^\infty = \infty$ : Suponha por absurdo que é finita a dimensão  $n := \dim \mathbb{R}^\infty$ . Segundo Corolário 3.1.17 para  $Y = \mathcal{E}^\infty$  e  $E = \mathbb{R}^\infty$ , como  $|Y| = |\mathcal{E}^\infty| = \infty > n = \dim \mathbb{R}^\infty$ , segue que  $\mathcal{E}^\infty$  é LD em  $\mathbb{R}^\infty$ . Mas  $\mathcal{E}^\infty$  é LI em  $\mathbb{R}^\infty$  segundo Exercício 1.3.11. (Outro argumento: Como  $\mathcal{E}^\infty$  é LI em  $\mathbb{R}_0^\infty$ , deve ser LI em  $\mathbb{R}^\infty$  segundo parte c) do Lema 3.1.3.) Contradição.

(b)  $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1$  e  $\dim \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \infty$ .

(c)  $\dim M(m \times n) = mn$ .

(d) Hiperplanos  $H_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ , onde  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  não-nulo, tem dimensão  $n - 1$ . Aquele 'hiper' refere-se ao fato do que na dimensão falta 1 para a dimensão do espaço vetorial ambiente.

**Exercício 3.1.23** (Produto cartesiano). Seja  $n \in \mathbb{N}_0$  e seja  $F$  um espaço vetorial de dimensão  $m$ . Mostre que o produto cartesiano  $F^{\times n}$ , veja (1.1.2), é um espaço vetorial sob as operações de adição e multiplicação escalar, ambas componente-por-componente, e que  $\dim F^{\times n} = mn$ .

[Dica: Dimensão – escolha uma base de  $F$  e use para definir uma base de  $F^{\times n}$ .]

## 3.2 Existência e extensão

**Teorema 3.2.1.** *Seja  $E$  da dimensão finita  $n \in \mathbb{N}_0$ .*

(a) *Todo conjunto gerando  $E$  contém uma base de  $E$ . (Existência de bases)*

(b) *Todo subconjunto LI é contido numa base de  $E$ . (Extensão de bases)*

(c) *A dimensão de qualquer subespaço de  $E$  é  $\leq n$ . (Dimensão)*

(d) *Um subespaço  $F$  de  $E$  da mesma dimensão  $n$  é igual a  $E$ .*

*Demonstração.* LI refere-se a  $E$  se não especificado diferente. **(a)** Suponha  $X$  gera  $E$ . Seja  $B \subset X$  qualquer subconjunto LI (existe como  $B = \emptyset$  mostra), então  $|B| \leq \dim E =: n$  segundo Corolário 3.1.18. Para  $k \in \mathbb{N}_0$  seja

$$\mathcal{C}_k := \{B \subset X \mid B \text{ é LI e } |B| = k\}$$

a família de todos os subconjuntos  $B \subset X$  os quais são LI e composto de  $k$  elementos. Seja  $B_* \subset X$  um subconjunto LI com o número máximo de elementos. Então  $B_* \in \mathcal{C}_\ell$  para um  $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Seja  $B_* = \{\xi_1, \dots, \xi_\ell\}$ . Considere as quatro inclusões (dois deles sendo igualdades)

$$E = \langle X \rangle \subset \langle\langle B_* \rangle\rangle = \langle B_* \rangle \subset E$$

Consequentemente o conjunto LI  $B_*$  gera  $E$ , ou seja  $B_*$  é uma base. Resta justificar as quatro inclusões. INCLUSÃO 1. Pela hipótese  $X$  gera  $E$ .

INCLUSÃO 2. Parte (ii) de Lema 2.2.3 aplica como  $X \subset \langle B_* \rangle$ : Suponha por absurdo que existe um vetor  $v \in X$  o qual não é CL em  $B_*$ , ou seja  $v \notin \langle B_* \rangle$ . Segundo Lema 3.1.15 o subconjunto aumentado  $\{\xi_1, \dots, \xi_\ell, v\}$  de  $X$  ainda é LI, mas contem  $\ell + 1$  elementos, então mais como  $B_*$ . Contradição.

INCLUSÃO 3. Como  $\langle B_* \rangle$  é um subespaço parte (iii) de Lema 2.2.3 aplica.

INCLUSÃO 4. Como  $B_* \subset X \subset E$  parte (ii) de Lema 2.2.3 aplica.

**(b)** Suponha  $X \subset E$  é um subconjunto LI. Como  $k := |X| \in \{0, \dots, n\}$ , veja Corolário 3.1.18, trata-se de um conjunto finito, ou seja  $X = \{v_1, \dots, v_k\}$ . Subconjuntos  $B \subset E$  LI e **contendo  $X$**  (existem como  $B := X$  mostra) são compostos de  $\ell$  elementos para um  $\ell \in \{k, \dots, n\}$ . Seja  $B_*$  um tal subconjunto com o número máximo  $\ell_*$  de elementos. Então  $B_*$  é LI e contem  $X \subset B_*$ . Para  $B_*$  é uma base de  $E$ , resta mostrar que gera  $E$ , ou seja  $\langle B_* \rangle = E$ :

' $\subset$ ' trivial como  $B_* \subset E$ . ' $\supset$ ' Suponha por absurdo que existe um vetor  $u \in E$  o qual não pertence a  $\langle B_* \rangle$ , então o conjunto aumentado  $B_* \cup \{u\}$  é LI segundo Lema 3.1.15, contem  $X$  porque  $B_*$  contem  $X$  – mas tem mais elementos como  $B_*$ . Contradição.

**(c)** Suponha  $F$  é um subespaço de  $E$ . Seja  $B \subset F$  qualquer subconjunto LI em respeito a  $F$  (existe como  $B = \emptyset$  mostra). Note que  $B$  é LI em respeito a  $E$  segundo Lema 3.1.3 c). Assim  $|B| \leq n := \dim E$  segundo Corolário 3.1.18. Agora escolha um subconjunto  $B_* \subset F$  LI em respeito a  $F$  com o número máximo de elementos. Como temos visto  $k := |B_*| \leq \dim E =: n$ . Resta mostrar que  $B_*$  é uma base de  $F$  (neste caso  $\dim F = |B_*|$ ). Pela escolha  $B_*$  é LI em  $F$ , então basta mostrar  $\langle B_* \rangle = F$ :

' $\subset$ ' trivial como  $B_* \subset F$ . ' $\supset$ ' Suponha por absurdo que existe um vetor  $u \in F$  o qual não pertence a  $\langle B_* \rangle$ , então o conjunto aumentado  $B_* \cup \{u\}$  é LI em  $F$  segundo Lema 3.1.15 – mas tem mais elementos como  $B_*$ . Contradição.

**(d)** Seja  $F \subset E$  um subespaço de dimensão  $n := \dim E$ . Pela definição de dimensão existe uma base  $\mathcal{B}$  de  $F$  com  $n$  elementos. Como  $\mathcal{B}$  é LI em respeito a  $F$ , é LI em respeito a  $E$  segundo Lema 3.1.3 c). Como além disso  $|\mathcal{B}| = n := \dim E$  o Corolário 3.1.19 diz que  $\mathcal{B}$  gera  $E$ . Então  $E = \langle \mathcal{B} \rangle = F$ , onde a segunda igualdade segue porque  $\mathcal{B}$  é base de  $F$ , então gera  $F$ .  $\square$

**Proposição 3.2.2.** *Seja  $F$  um espaço vetorial e  $F_1, F_2$  subespaços de dimensão finita  $k, \ell$ . Então existe uma base finita  $\mathcal{B}$  do subespaço  $F_1 + F_2$  de  $F$  que contem uma base  $\mathcal{B}_1$  de  $F_1$ , uma base  $\mathcal{B}_2$  de  $F_2$ , e uma base  $\mathcal{B}_{12}$  de  $F_1 \cap F_2$ . Vale que*

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2) \quad (3.2.1)$$

*Demonstração.* Vamos denotar de (b),(c) as partes correspondentes do Teorema 3.2.1. O subespaço  $F_1 \cap F_2 \subset F_1$  tem dimensão finita  $m$  (segundo (c) para  $E = F_1$ ) e assim admite uma base finita  $\mathcal{B}_{12} = \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$  (segundo a definição de dimensão). Segundo (b) para  $E = F_1$  o conjunto  $\mathcal{B}_{12}$  - LI em  $F_1 \cap F_2$  e segundo Lema 3.1.3 LI no superespaço  $F_1$  - é contido numa base  $\mathcal{B}_1$  de  $F_1$ . Analogamente  $\mathcal{B}_{12}$  é contido numa base  $\mathcal{B}_2$  de  $F_2$ . Uma base de  $F_1 + F_2$  contendo as bases desejadas é

$$\mathcal{B} := (\mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B}_{12}) \dot{\cup} \overbrace{\mathcal{B}_{12} \dot{\cup} (\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12})}^{\mathcal{B}_2} = \mathcal{B}_1 \dot{\cup} (\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12}) = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$$

Contando elementos obtemos

$$\dim(F_1 + F_2) := |\mathcal{B}| = (k - m) + m + (\ell - m) = k + \ell - m.$$

Resta checar as duas propriedades de uma base.  $\mathcal{B}$  gera  $F_1 + F_2$ : Os elementos de  $F_1 + F_2$  são da forma  $f_1 + f_2$  onde  $f_1 \in F_1$  (assim é CL em  $\mathcal{B}_1$ ) e  $f_2 \in F_2$  (assim é CL em  $\mathcal{B}_2$ ). Consequentemente  $f_1 + f_2$  é CL em  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$ .  $\mathcal{B}$  é LI em  $F$ : Seja  $\mathcal{B}_1 = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  e  $\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12} = \{\eta_1, \dots, \eta_{\ell-m}\}$ . Suponha por absurdo que  $\mathcal{B}$  é LD, ou seja existem escalares  $\alpha_i, \beta_i$  não todos nulos tal que

$$\underbrace{\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k}_{=: -v_1} + \underbrace{\beta_1 \eta_1 + \dots + \beta_{\ell-m} \eta_{\ell-m}}_{=: v_1} = \mathcal{O}$$

Não todos  $\beta_i$ 's são nulos (caso contrário  $\mathcal{B}_1$  é LD, contradição). Assim  $v_1 \in F_2 \setminus (F_1 \cap F_2)$ . De outro lado  $-v_1$ , então  $v_1$ , é elemento do subespaço  $F_1$ . Assim  $v_1 \in (F_1 \cap F_2)$  e  $v_1 \notin (F_1 \cap F_2)$ . Contradição.  $\square$

**Corolário 3.2.3.** *Sejam  $F, G \subset E$  subespaços de dimensões finitas, então:*

$$F \oplus G = E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{\mathcal{O}\} \end{cases}$$

*Demonstração.* ' $\Rightarrow$ ' Fórmula (3.2.1) usando que a interseção tem dimensão zero. ' $\Leftarrow$ ' Suponha que  $F \cap G = \{\mathcal{O}\}$  e que as dimensões de  $F$  e  $G$  adicionam à dimensão de  $E$ . Segundo Lema 2.3.2 a soma  $F + G$  é um subespaço de  $E$ . Então  $F + G = E$  segundo Teorema 3.2.1 (d).  $\square$

**Exercício 3.2.4** (Subespaços do espaço  $M(n \times n)$  das matrizes quadradas). <sup>1</sup>

<sup>1</sup> As dimensões para seu controle: 2.  $\dim \mathcal{T} = n(n+1)/2$   
3. (a)  $2 \frac{(n-1)n}{2} + (n-1) = n^2 - 1$  (b)  $n(n-2) + n = n(n-1)$  (c)  $(n-1)^2 + n = n^2 - (n-1)$

1. Sejam  $\mathcal{A}, \mathcal{S} \subset M(n \times n)$  os subespaços das matrizes anti-/simétricas.
- (a) Para cada par  $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$  seja  $\mathbf{e}_+^{ij}$  a matriz  $n \times n$  cujos elementos nas posições  $ij$  e  $ji$  são iguais a 1 e os demais são zero. Prove que estas matrizes constituem uma base  $\{\mathbf{e}_+^{ij}\}$  para  $\mathcal{S}$ .
- (b) De modo análogo, obtenha uma base  $\{\mathbf{e}_-^{ij}\}$  para  $\mathcal{A}$ .
- (c) Conclua que

$$\dim \mathcal{S} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Calcule  $\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{A}$  e lembre-se que  $\dim M(n \times n) = n^2$ . Conclua que

$$M(n \times n) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$$

Antes, no Exercício 2.3.7, tenhamos obtido uma prova alternativa desse.

2. As matrizes  $\mathbf{t} = (t_{ij}) \in M(n \times n)$  tais que  $t_{ij} = 0$  quando  $i < j$  são chamadas **triangulares inferiores**. Prove que elas constituem um subespaço  $\mathcal{T} \subset M(n \times n)$ . Obtenha uma base para  $\mathcal{T}$  e determine a sua dimensão.
3. Obtenha uma base e conseqüentemente determine a dimensão de cada um dos seguintes subespaços de  $M(n \times n)$  as quais são composto de
- (a) matrizes  $\mathbf{a} = (a_{ij})$  de **traço** (a soma dos elementos da diagonal)

$$\text{tr} : M(n \times n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{a} \mapsto \text{tr } \mathbf{a} := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

nulo, ou seja  $\text{tr } \mathbf{a} = 0$ .

- (b) matrizes cuja primeira e última linha são iguais
- (c) matrizes cuja primeira linha e primeira coluna são iguais

Parte II

Teoria das transformações  
lineares





## Capítulo 4

# Transformações lineares

No Capítulo 4 denotamos de  $E, F$  espaços vetoriais

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K}), \quad F = (F, +, \cdot, \mathbb{K})$$

ambos sobre o mesmo corpo  $\mathbb{K}$ . Na primeira leitura pense em  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . As letras  $m, n$  denotam números naturais ou zero.

### 4.1 Exemplos e construção

**Definição 4.1.1.** Uma **transformação linear (TL)**, também chamado de **homomorfismo de espaços vetoriais** ou **operador linear**, é uma aplicação

$$A : E \rightarrow F, \quad v \mapsto A(v) =: Av$$

a qual preserva as operações em  $E$  e  $F$ , ou seja

$$\text{(Linearidade)} \quad \begin{cases} A(\alpha v) = \alpha Av \\ A(v + w) = Av + Aw \end{cases}$$

para todos os escalares  $\alpha \in \mathbb{K}$  e todos os vetores  $v, w \in E$ . Note-se que nos lados esquerdos aparecem as operações em  $E$  e nos lados direitos aquelas em  $F$ .

Como indicado acima vamos escrever no caso de aplicações lineares geralmente  $Av$  em vez de  $A(v)$ . Assim  $Av$  já sinaliza que  $A$  é linear. Note-se que

$$\text{(Linearidade)} \quad \Leftrightarrow \quad A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E$$

**Lema 4.1.2.** *Seja  $A : E \rightarrow F$  uma TL. Então*

- (i)  $A\mathcal{O} = \mathcal{O}$  *(leva o vetor nulo de  $E$  no vetor nulo de  $F$ )*
- (ii)  $A(-v) = -(Av)$  *(leva inversos em inversos)*
- (iii)  $A(u - v) = Au - Av$

$$(iv) A(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 A v_1 + \cdots + \alpha_k A v_k \quad (\text{leva CLs em CLs})$$

para todos os vetores  $u, v, v_i \in E$  e escalares  $\alpha_i \in \mathbb{K}$ .

*Demonstração.*

$$(i) A\mathcal{O} = A(\mathcal{O} + \mathcal{O}) \stackrel{\text{linear}}{=} A\mathcal{O} + A\mathcal{O}, \text{ então } A\mathcal{O} = \mathcal{O} \text{ segundo Lema 1.1.5 3b)}$$

$$(ii) A(-v) + Av \stackrel{\text{linear}}{=} A(-v + v) = A\mathcal{O} \stackrel{(i)}{=} \mathcal{O}.$$

$$(iii) A(u - v) \stackrel{\text{linear}}{=} Au + A(-v) \stackrel{(ii)}{=} Au - Av.$$

$$(iv) \text{ Indução sobre } k \text{ baseado na linearidade.} \quad \square$$

**Exercício 4.1.3.** Considere os elementos de  $\mathbb{R}^2$  dados por

$$u_1 = (2, -1), \quad u_2 = (1, 1), \quad u_3 = (-1, -4),$$

e

$$v_1 = (1, 3), \quad v_2 = (2, 3), \quad v_3 = (5, 6).$$

Decida se existe ou não uma transformação linear  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$Au_1 = v_1, \quad Au_2 = v_2, \quad Au_3 = v_3$$

**Solução.** Se  $A$  é linear então escrevendo  $u_3$  como CL de  $u_1$  e  $u_2$ , ou seja  $u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$ , o elemento  $v_3 = Au_3$  deve ser CL de  $v_1 = Au_1$  e  $v_2 = Au_2$  com os mesmos coeficientes. Com efeito

$$v_3 = Au_3 = A(\alpha u_1 + \beta u_2) \stackrel{\text{lin.}}{=} \alpha Au_1 + \beta Au_2 = \alpha v_1 + \beta v_2$$

Então vamos checar se é verdadeiro isso: Determinamos  $\alpha$  e  $\beta$  primeiro

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2 = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha + \beta \\ -\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

Comparando os primeiros membros obtemos  $\beta = -1 - 2\alpha$ . Use isso na comparação dos segundos membros para obter  $\alpha = \beta + 4 = -1 - 2\alpha + 4 = 3 - 2\alpha$ . Assim  $\alpha = 1$  e  $\beta = -3$ . Basta calcular

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = v_3$$

Então não existe uma tal transformação linear  $A$ .

**Exercício 4.1.4.** Mesma pergunta como no Exercício 4.1.3 mas a) com  $v_3 = (-5, -6)$  e b) com  $v_3 = (5, -6)$ .

**Exemplo 4.1.5** (Derivação e convolução).

**(Derivação)** Seja  $k \in \mathbb{N}$  ou  $k = \infty$ , então é linear o operador derivada

$$D : C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \mapsto f' := \frac{d}{dx} f$$

**(Convolução)** Dada uma função contínua  $k: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , Seja  $k \in \mathbb{N}$  ou  $k = \infty$ , então é linear o operador definido por

$$K: C^0([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C^0([a, b], \mathbb{R}), \quad f \mapsto \int_a^b k(\cdot, y)f(y) dy$$

No caso particular  $k(x, y) = g(x - y)$  onde  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma dada função contínua o operador  $K_g$  definido por

$$(K_g f)(x) := \int_a^b g(x - y)f(y) dy$$

é chamado de **convolução** das funções  $f$  e  $g$ , notação  $f * g := K_g f$ .

### Isomorfismos

Isomorfismo e inversa serão tratados com mais detalhes na Seção 5.3.

**Definição 4.1.6** (Isomorfismo). Um **isomorfismo** entre espaços vetoriais  $E$  e  $F$  é uma transformação linear (homomorfismo)  $T: E \rightarrow F$  tal que a aplicação

$$T: E \rightarrow F \text{ é bijetiva} \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{injetiva} & :\Leftrightarrow Tu = Tv \Rightarrow u = v \\ \text{e} \\ \text{sobrejetiva} & :\Leftrightarrow \forall v \in F \exists u \in E: Tu = v \end{cases}$$

Se existe um isomorfismo entre  $E$  e  $F$  dizemos “ $E$  e  $F$  são **isomorfos**” e escrevemos  $E \simeq F$ , ou ainda  $E \stackrel{T}{\simeq} F$  para destacar quem é o isomorfismo.

**Definição 4.1.7** (Inversa). Uma transformação linear  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  é chamado **invertível** caso existe um  $B \in \mathcal{L}(F, E)$  tal que  $AB = I_F$  e  $BA = I_E$ . Neste caso  $B$  é único e chamado **a inversa** de  $A$ , símbolo  $A^{-1} := B$

**Comentário 4.1.8.** Dado um isomorfismo  $T: E \rightarrow F$ , definimos a aplicação

$$S: F \rightarrow E, \quad f \mapsto v$$

onde  $v \in E$  é o único vetor tal que  $Tv = f$ , veja (5.3.1). Pode checar que  $S$  é linear e bijetiva, ou seja um isomorfismo, e que  $S$  é a inversa de  $T$ .

A composição  $BA$  de dois isomorfismos é um isomorfismo e sua inversa é a composição das inversas – mas na ordem oposta

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} \tag{4.1.1}$$

#### 4.1.1 O espaço vetorial das transformações lineares

**Definição 4.1.9** (O espaço vetorial  $\mathcal{L}(E, F)$ ). O conjunto

$$\mathcal{L}(E, F) := \{A \mid A: E \rightarrow F \text{ transformação linear}\}$$

de todas as transformações lineares entre  $E$  e  $F$  seja munido das operações

$$\begin{aligned} + : \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) & \cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ (A, B) &\mapsto A + B & (\alpha, A) &\mapsto \alpha A \end{aligned}$$

definidas assim  $(A + B)v := Av + Bv$  e  $(\alpha A)v := \alpha(Av)$ .

Note que  $A + B, \alpha A : E \rightarrow F$  realmente são lineares. Por exemplo, vale

$$(\alpha A)(v + w) \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha(A(v + w)) \stackrel{\text{lin.}}{=} \alpha(Av + Aw) \stackrel{\text{distr.}}{=} \alpha(Av) + \alpha(Aw)$$

e o lado direito é  $(\alpha A)v + (\alpha A)w$  pela definição de  $\alpha A$ .

**Lema 4.1.10.** *O conjunto  $\mathcal{L}(E, F)$  das transformações lineares de  $E$  para  $F$  munido das operações '+' e '·' forma um espaço vetorial*

$$\mathcal{L}(E, F) = (\mathcal{L}(E, F), +, \cdot, \mathbb{K})$$

sobre o corpo  $\mathbb{K}$ . O vetor nulo de  $\mathcal{L}(E, F)$  é a TL nula  $\mathcal{O} : E \rightarrow F, v \mapsto \mathcal{O}$ .<sup>1</sup>

*Demonstração.* Deixamos ao leitor verificar os axiomas na Definição 1.1.17.  $\square$

**Definição 4.1.11** (Operadores lineares em  $E$ ). No caso  $F = E$  os elementos de  $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$  são chamados de **operadores lineares em  $E$**  e o operador

$$I = I_E : E \rightarrow E, \quad v \mapsto v \tag{4.1.2}$$

é chamado de **operador identidade** em  $E$ .

### 4.1.2 Construção de transformações lineares

Uma base **ordenada** é uma base  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  cujos elementos são enumerados, alternativamente escreve-se na forma de uma lista ordenada  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

**Proposição 4.1.12.** *A fim de definir um homomorfismo  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  basta escolher as imagens de uma base (ordenada)  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$ :*

**EXISTÊNCIA.** *Escolha uma lista  $f := (f_1, \dots, f_n)$  de  $n := \dim E$  elementos  $f_j$  do contradomínio  $F$ , repetições não excluídas, e defina*

$$A_f \xi_j := f_j, \quad j = 1, \dots, n \tag{*_f}$$

*Então estende  $A_f$  ao  $E$  inteiro usando (Linearidade): Dado  $u \in E$ , exprime  $u$  em respeito à base  $\mathcal{B}$  na forma  $u = \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j$  onde os escalares  $\alpha_j$  são únicas – são as chamadas coordenadas do vetor  $u$ , veja (3.1.1). Defina*

$$A_f u := \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j \stackrel{(*_f)}{=} \sum_{j=1}^n \alpha_j A_f \xi_j \tag{4.1.3}$$

**UNICIDADE.** *Se  $B \in \mathcal{L}(E, F)$  satisfaz  $(*_f)$ , levando os  $\xi_j$  nos  $f_j$ , então  $B = A_f$ .*

<sup>1</sup> o primeiro  $\mathcal{O}$  é  $\mathcal{O}_{\mathcal{L}(E, F)}$  e o outro  $\mathcal{O}_F$ ; para legibilidade não escrevemos demais subscritos

*Demonstração.* Deixamos ao leitor a tarefa simples de checar que  $A_f$  definido acima é linear, ou seja  $A_f \in \mathcal{L}(E, F)$ , e é unicamente determinado por  $(*_f)$ .  $\square$

Note-se que  $A_f$  não só depende da escolha dos elementos  $f_j$  de  $F$ , mas também da escolha da base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Por isso às vezes escrevemos

$$A_f^{\mathcal{B}} = A_f$$

**Exercício 4.1.13.** Mostre: os membros da lista  $f = (f_1, \dots, f_n) \in F^{\times n}$  formam

- a) um conjunto LI de  $n$  elementos  $\Leftrightarrow A_f$  é injetivo
- b) um conjunto gerando  $F$   $\Leftrightarrow A_f$  é sobrejetivo
- c) uma base de  $F$   $\Leftrightarrow A_f$  é um isomorfismo (e  $\dim E = \dim F$ )

Se lembra da diferença entre lista e conjunto? O conjunto  $X := \{f_1, \dots, f_n\}$  dos  $f_j$ 's não necessariamente contem  $n$  elementos: por exemplo, se escolhe para cada um membro  $f_j$  da lista  $f$  o mesmo vetor  $f$  o conjunto  $X$  contem 1 elemento.

**Teorema 4.1.14.** *Seja  $\dim F$  finita e  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  uma base de  $E$ , então*

$$\begin{aligned} \Psi = \Psi_{\mathcal{B}} : F^{\times n} &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ f &\mapsto A_f \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

é um isomorfismo. Lembre-se de  $(*_f)$  que  $A_f$  é determinado por  $A_f \xi_j := f_j$ .

*Demonstração.* Segundo Proposição 4.1.12 é suficiente avaliar TLs numa base. LINEAR. Segue de  $A_{\alpha f + \beta g} \xi_j := (\alpha f + \beta g)_j = \alpha f_j + \beta g_j =: \alpha A_f \xi_j + \beta A_g \xi_j$ . INJETIVO. Suponha  $A_f = A_g$ . Então  $f_j := A_f \xi_j = A_g \xi_j := g_j$  para todos os  $j$ . SOBREJETIVO. Dado  $B \in \mathcal{L}(E, F)$ , defina  $f_j := B \xi_j, \forall j$ . Assim  $A_f = B$ .  $\square$

Lembre-se do Exercício 3.1.23 que  $\dim F^{\times n} = n \dim F$ . Vamos ver no futuro, veja Corolário 5.3.9, que isomorfismos preservam dimensões – o que implica

**Corolário 4.1.15.**  $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim F^{\times n} = \dim E \cdot \dim F$

**Exercício 4.1.16.** Mostre que  $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \dim M(m \times n)$ . Dado um corpo  $\mathbb{K}$ , vale analogamente  $\dim \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = \dim M(m \times n; \mathbb{K})$ .

**Comentário 4.1.17** (Extensão de TLs). Suponha que em vez de uma base de  $E$  só temos um subconjunto  $\mathcal{X} \subset E$  LI e com  $k$  elementos  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ , particularmente  $k = |\mathcal{X}| \leq \dim E =: n$ . Note-se que  $\mathcal{X}$  é uma base do subespaço  $\langle \mathcal{X} \rangle$ . Seja  $f = (f_1, \dots, f_k) \in F^{\times k}$  uma lista com  $k := \dim \langle \mathcal{X} \rangle = |\mathcal{X}|$  membros. Conforme Proposição 4.1.12 isso determina unicamente uma TL injetiva

$$A_f^{\mathcal{X}} : E \supset \langle \mathcal{X} \rangle \rightarrow F, \quad A_f^{\mathcal{X}} \xi_j := f_j \quad (j = 1, \dots, k)$$

Então existe uma transformação linear

$$A_{\tilde{f}}^{\tilde{\mathcal{X}}} : E \rightarrow F$$

extendendo  $A_f^{\mathcal{X}}$ , ou seja a restrição  $A_{\tilde{f}}^{\tilde{\mathcal{X}}} |_{\langle \mathcal{X} \rangle} \in A_f^{\mathcal{X}}$ . Para construir a extensão I) estende-se o conjunto LI  $\mathcal{X}$  a uma base de  $E$  usando o Teorema 3.2.1 (b) e II) apensa-se à lista  $f$  mais  $n - k$  membros.

### 4.1.3 O espaço dual

**Definição 4.1.18** (O espaço dual  $E^*$ ). No caso  $F = \mathbb{K}$  o espaço  $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  é chamado de **espaço dual** de  $E$ . Chama-se os elementos  $\phi \in E^*$  de **funcionais  $\mathbb{K}$ -lineares** em  $E$  ou, no caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , **funcionais lineares**.

**Definição 4.1.19** (A base dual  $\mathcal{B}^*$ ). Na dimensão finita uma base  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$  induz uma base,<sup>2</sup> a chamada **base dual**  $\mathcal{B}^* := \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  de  $E^*$ . Como transformação linear, cada um membro  $\phi_i : E \rightarrow \mathbb{K}$  é determinado pelos valores numa base (Proposição 4.1.12) e a escolha seja essa

$$\phi_i(\xi_j) := \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases} \quad (4.1.5)$$

onde chama-se  $\delta_{ij}$  o **símbolo de Kronecker**. Equivalentemente

$$\phi_i(\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n) := \alpha_i \quad (4.1.6)$$

para  $i = 1, \dots, n$ . Note-se que  $\dim E = n = \dim E^*$ .

**Lema 4.1.20.** A base dual  $\mathcal{B}^* = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  é base de  $E^*$  e  $\dim E^* = \dim E$ .

*Demonstração.* Bem definida: Deixamos ao leitor verificar que os membros  $\phi_i : E \rightarrow \mathbb{R}$  definidos por (4.1.6) são lineares. Gera: Dado  $\psi \in E^*$ , denotamos as imagens dos membros  $\xi_i$  da base  $\mathcal{B}$  de  $\alpha_i := \psi \xi_i$ , então  $\alpha_1 \phi_1 + \dots + \alpha_n \phi_n = \psi$ . Com efeito, escrevendo  $E \ni v = v_1 \xi_1 + \dots + v_n \xi_n$  como CL na base  $\mathcal{B}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \psi(v) &= \psi(v_1 \xi_1 + \dots + v_n \xi_n) \\ &= v_1 \psi(\xi_1) + \dots + v_n \psi(\xi_n) \\ &= v_1 \alpha_1 + \dots + v_n \alpha_n \\ &= \phi_1(v) \alpha_1 + \dots + \phi_n(v) \alpha_n \\ &= (\alpha_1 \phi_1 + \dots + \alpha_n \phi_n) v \end{aligned}$$

LI: Suponha que  $\alpha_1 \phi_1 + \dots + \alpha_n \phi_n = \mathcal{O}$ . Segundo (4.1.6), avaliando no vetor  $\xi_1$  obtemos  $\alpha_1 = 0$ , avaliando em  $\xi_2, \dots, \xi_n$  obtemos  $\alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$ .  $\square$

**Exercício 4.1.21.** A expressão geral de um funcional linear  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é

$$\phi(x, y, z) = ax + by + cz$$

onde  $a, b, c$  são números reais determinando  $\phi$ . Dados os elementos

$$u = (1, 2, 3), \quad v = (-1, 2, 3), \quad w = (1, -2, 3),$$

de  $\mathbb{R}^3$  determine  $a, b, c$  de tal modo que se tenha  $\phi u = 1$ ,  $\phi v = 0$  e  $\phi w = 0$ .<sup>3</sup>

<sup>2</sup> Errado na dimensão infinita. Porque? Relembre-se que CL's são somas *finitas*.

<sup>3</sup> A resposta para seu controle:  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{4}$ ,  $c = 0$ .

**Exemplo 4.1.22** (Funcionais lineares  $\varphi, \psi \in E^*$ ). Seja  $E = C^0([a, b])$  o espaço vetorial real<sup>4</sup> das funções contínuas  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  neste intervalo.

(Integração) A função  $\varphi: E \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi(f) := \int_a^b f(x) dx$$

é linear e assim  $\varphi \in E^*$

(Avaliação) Dado um ponto  $x_0 \in [a, b]$ , a função  $\psi: E \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\psi(f) := f(x_0)$$

é linear e assim  $\psi \in E^*$ .

## 4.2 Matrizes

### Matrizes são transformações lineares

Para ver isso escolhemos uma matriz  $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K})$  e consideramos a aplicação

$$\mathbf{a}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, \quad x \mapsto \mathbf{a}x$$

a qual leva uma lista  $x \in \mathbb{K}^n$  para a lista definida pelo produto matriz

$$\mathbf{a}x = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Lembrando a notação  $\mathbf{a}_{\bullet j}$  para colunas introduzido em (1.2.3), continuamos

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_{\bullet 1}} x_1 + \cdots + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_{\bullet n}} x_n =: (\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

No último passo definimos uma nova notação a qual vai ser bem útil. O símbolo que usamos quer lembrar o produto matriz, para não precisamos memorizar mais uma fórmula. Na nova notação é fácil ver que  $\mathbf{a}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathbf{a}x + \beta \mathbf{a}y$  mostrando que  $\mathbf{a}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  é linear, então  $\mathbf{a} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ .

<sup>4</sup> 'real' indica que o corpo são os números reais  $\mathbb{R}$

**Comentário 4.2.1** (Espaço-coluna e -linha). A imagem de uma matriz

$$\text{Im}(\mathbf{a}) := \{\mathbf{ax} \mid x \in \mathbb{K}^n\} = \text{Esp-col}(\mathbf{a}) \subset \mathbb{K}^m, \quad \mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K}) \quad (4.2.2)$$

é igual ao espaço-coluna como (4.2.1) mostra. Como  $\text{Esp-col}(\mathbf{a})$  e  $\text{Esp-lin}(\mathbf{a})$  são fechados sob adição e multiplicação, são subespaços de  $\mathbb{K}^m$  e  $\mathbb{K}^n$ . As dimensões

$$\text{pc}(\mathbf{a}) := \dim \text{Esp-col}(\mathbf{a}) = \dim \text{Im}(\mathbf{a}), \quad \text{pl}(\mathbf{a}) := \dim \text{Esp-lin}(\mathbf{a}) \quad (4.2.3)$$

são chamadas de **posto-coluna** e **posto-linha** da matriz  $\mathbf{a}$ .

**Teorema 4.2.2** (Postos linha e coluna são iguais).  $\text{pl}(\mathbf{a}) = \text{pc}(\mathbf{a}) = \dim \text{Im}(\mathbf{a})$

*Demonstração.* Seja  $\mathbf{a}$  uma matriz  $m \times n$ . '≤' Seja  $p := \text{pc}(\mathbf{a})$  a dimensão do espaço coluna e  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_p\}$  uma base ordenada dele. Usamos a notação

$$\xi_\ell = \begin{bmatrix} b_{1\ell} \\ \vdots \\ b_{m\ell} \end{bmatrix}$$

Assim cada uma coluna  $\mathbf{a}_{\bullet j}$  é CL em  $\mathcal{X}$  com coeficientes únicos  $c_{ij} \in \mathbb{K}$ , ou seja

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} =: \mathbf{a}_{\bullet j} = \xi_1 c_{1j} + \dots + \xi_p c_{pj} = \sum_{\ell=1}^p \xi_\ell c_{\ell j} = \begin{bmatrix} \sum_{\ell=1}^p b_{1\ell} c_{\ell j} \\ \vdots \\ \sum_{\ell=1}^p b_{m\ell} c_{\ell j} \end{bmatrix}$$

Isso mostra que a  $ij$ -ésima entrada da matriz  $\mathbf{a}$  é dada por

$$a_{ij} = \sum_{\ell=1}^p b_{i\ell} c_{\ell j}$$

Usamos esta fórmula para ver que a  $i$ -ésima linha

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{i\bullet} &= [a_{i1} \quad \dots \quad a_{in}] = [\sum_{\ell=1}^p b_{i\ell} c_{\ell 1} \quad \dots \quad \sum_{\ell=1}^p b_{i\ell} c_{\ell n}] \\ &= \sum_{\ell=1}^p b_{i\ell} \underbrace{[c_{\ell 1} \quad \dots \quad c_{\ell n}]}_{=: \eta_\ell \in \text{Esp-lin}(\mathbf{a})} \end{aligned}$$

é CL no conjunto das listas  $\eta_1, \dots, \eta_p$  de  $n$  escalares cada uma. Assim  $\text{Esp-lin}(\mathbf{a})$  é contido no subespaço  $Y$  gerado pelo conjunto  $\mathcal{Y} := \{\eta_k \mid k = 1, \dots, p\}$ . Note que  $\mathcal{Y}$  contém no máximo  $p$  elementos ( $< p$  no caso de dobros). Assim

$$\text{pl}(\mathbf{a}) := \dim \text{Esp-lin}(\mathbf{a}) \leq \dim Y \leq |\mathcal{Y}| \leq p =: \text{pc}(\mathbf{a})$$

'≥' Usando '≤' para a transposta obtemos  $\text{pc}(\mathbf{a}) = \text{pl}(\mathbf{a}^t) \leq \text{pc}(\mathbf{a}^t) = \text{pl}(\mathbf{a})$ .  $\square$



Acima temos verificado que cada uma matriz é uma transformação linear. E vice versa?

Escreve as colunas de uma matriz  $\mathbf{a}$  como lista, ou seja  $f_{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n})$ . Agora considere o operador linear  $A_{f_{\mathbf{a}}}^{\mathcal{E}^n}$  definido em (4.1.3) e defina a aplicação

$$M(m \times n; \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), \quad \mathbf{a} \mapsto A_{f_{\mathbf{a}}}^{\mathcal{E}^n} \quad (4.2.4)$$

onde  $\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$  é a base canônica de  $\mathbb{K}^n$ . Note que  $A_{f_{\mathbf{a}}}^{\mathcal{E}^n} = \mathbf{a}$ , com efeito

$$A_{f_{\mathbf{a}}}^{\mathcal{E}^n} e_i \stackrel{(*f_{\mathbf{a}})}{=} \mathbf{a}_{\bullet i} = \mathbf{a}e_i, \quad i = 1, \dots, n$$

e então lembre-se de UNICIDADE em Proposição 4.1.12.

Como a aplicação  $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}$  é obviamente linear e injetivo, só falta sobrejetivo para ser um isomorfismo. Dado  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ , coloque as listas  $Ae_1, \dots, Ae_n \in \mathbb{K}^m$  como colunas de uma matriz, notação  $[A]$ .<sup>5</sup> O leitor pode verificar que esta matriz  $[A]$  é levado ao operador  $A$ , em símbolos  $A_{f_{[A]}}^{\mathcal{E}^n} = A$ . Isso prova sobrejetividade.<sup>6</sup> Deixa nos formalizar esta idéia próximo.

## Transformações lineares representadas como matrizes

Como temos visto acima uma transformação linear  $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  corresponde naturalmente, utilizando as bases canônicas

$$\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}, \quad \mathcal{E}^m = \{E_1, \dots, E_m\}$$

a uma matriz  $[A] \in M(m \times n; \mathbb{K})$ . Com efeito, seja  $[Ae_i]_{\mathcal{E}^m} \in M(m \times 1; \mathbb{K})$  o vetor coordenada do elemento  $Ae_i \in \mathbb{K}^m$ , veja (3.1.2). Usando estes vetores coordenadas como colunas de uma matriz obtém-se

$$[A] = [A]_{\mathcal{E}^n, \mathcal{E}^m} := [[Ae_1]_{\mathcal{E}^m} \dots [Ae_n]_{\mathcal{E}^m}] \in M(m \times n; \mathbb{K})$$

chamado de **matriz da transformação linear  $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  em respeito às bases canônicas**.

O caso geral de associar uma matriz  $\mathbf{a}$  a uma transformação linear  $A : E \rightarrow F$  entre espaços vetoriais munidos de bases ordenadas  $\mathcal{U} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  e  $\mathcal{V} = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}$  será investigado em grande detalhe na Seção 7 depois tratar isomorfismos e inversas na Seção 5.3.1. Sim, as colunas de esta matriz serão os vetores coordenadas (3.1.2), com efeito defina-se

$$\mathbf{a} = [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} := [[A\xi_1]_{\mathcal{V}} \dots [A\xi_n]_{\mathcal{V}}] \in M(m \times n; \mathbb{K})$$

**Proposição 4.2.3.** *A aplicação entre espaços vetoriais definido por*

$$\begin{aligned} [\cdot] &= [\cdot]_{\mathcal{E}^n, \mathcal{E}^m} : \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \rightarrow M(m \times n; \mathbb{K}) \\ A &\mapsto [[Ae_1]_{\mathcal{E}^m} \dots [Ae_n]_{\mathcal{E}^m}] \end{aligned}$$

*é um isomorfismo entre espaços vetoriais.*

<sup>5</sup> Verifique que os membros da lista  $Ae_i$  são as entradas do vetor coordenada  $[Ae_i]_{\mathcal{E}^m}$ .

<sup>6</sup> Alternativamente, vamos ver no futuro que, como as dimensões são iguais e finito, injetividade de uma TL é equivalente a sobrejetividade.

*Demonstração.* Checar linearidade é rotina. *Injetivo.* Se as matrizes  $[A] = [B]$  são iguais, os vetores coordenadas  $[Ae_i]_{\mathcal{E}^m} = [Be_i]_{\mathcal{E}^m}$  são iguais, e assim as imagens  $Ae_i = Be_i$  dos elementos da base são iguais. Assim  $A = B$  segundo unicidade em Proposição 4.1.12. *Sobrejetivo.* Dado uma matriz  $\mathbf{a}$ , então a matriz do operador  $A_{\mathbf{a}}^{\mathcal{E}^n}$ , veja (4.2.4), é  $\mathbf{a}$ .  $\square$

**Exercício 4.2.4.** Mostre que as entradas  $a_{ij}$  da matriz  $\mathbf{a} := [A]$  satisfazem

$$Ae_i = E_1 a_{1i} + \cdots + E_m a_{mi} =: \mathcal{E}^m \mathbf{a}_{\bullet i}$$

para cada um elemento  $e_i$  da base  $\mathcal{E}^n$  e onde  $\mathcal{E}^m = \{E_1, \dots, E_m\}$ .

**Exemplo 4.2.5.** Seja  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  determinado por

$$A(1, 1) = (1, 2, 3) \quad \text{e} \quad A(-1, 1) = (1, 1, 1)$$

Pede-se a matriz  $\mathbf{a}$  de  $A$  relativamente às bases canônicas.

**Uma solução.** Denotamos de  $\mathcal{E}^2 = \{e_1, e_2\}$  e  $\mathcal{E}^3 = \{E_1, E_2, E_3\}$  as bases canônicas. Precisamos escrever  $Ae_1$  e  $Ae_2$  como CL's dos vetores  $E_1, E_2, E_3$  e colocar os coeficientes como colunas da matriz desejada. Sabemos que

$$A(1, 1) = (1, 2, 3) = (1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, 3) = E_1 + 2E_2 + 3E_3$$

$$A(1, 1) = A((1, 0) + (0, 1)) = A(e_1 + e_2) = Ae_1 + Ae_2$$

e

$$A(-1, 1) = (1, 1, 1) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = E_1 + E_2 + E_3$$

$$A(-1, 1) = A((-1, 0) + (0, 1)) = A(-e_1 + e_2) = -Ae_1 + Ae_2$$

Assim temos 2 equações lineares inhomogêneas para as 2 incógnitas  $x := Ae_1$  e  $y := Ae_2$ , com efeito

$$\begin{cases} x + y = E_1 + 2E_2 + 3E_3 \\ -x + y = E_1 + E_2 + E_3 \end{cases}$$

Aplicamos escalonamento, adicionando a primeira equação para a segunda obtemos  $2y = 2E_1 + 3E_2 + 4E_3$  e assim a CL

$$y = E_1 + \frac{3}{2}E_2 + 2E_3$$

cujas coeficientes formam a **segunda** ( $y = Ae_2$ ) coluna da matriz  $\mathbf{a} := [A]$ . Use na primeira equação para receber os coeficientes da primeira coluna, ou seja

$$x = -y + (E_1 + 2E_2 + 4E_3) = 0E_1 + \frac{1}{2}E_2 + 1E_3$$

Então a matriz é a seguinte

$$\mathbf{a} = [A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Com certeza, vai ter outros caminhos como resolver. Acima vemos um.

**Exercício 4.2.6.** Tem-se uma transformação linear  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que

$$A(1, 2) = (1, 1, 1, -1) \quad \text{e} \quad A(3, 4) = (1, 1, 1, 1)$$

Pede-se a matriz  $\mathbf{a}$  de  $A$  relativamente às bases canônicas.

**Exercício 4.2.7** (Vetores linha e coluna). a) Mostre que a matriz de um funcional linear  $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^* := \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  é **uma linha** (matriz  $1 \times n$ ) da forma

$$[\varphi] = [\varphi e_1 \quad \dots \quad \varphi e_n]$$

b) Mostre que a matriz de uma reta no  $\mathbb{R}^n$  passando a origem, ou seja  $R \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ , é **uma coluna** (matriz  $n \times 1$ ) da forma

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

**Lema 4.2.8** (Na dimensão 1 operadores correspondem a escalares). *Seja  $\dim E = 1$  e  $A \in \mathcal{L}(E)$ , então existe um único escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$  tal que o operador corresponde a multiplicação com  $\alpha$ , em símbolos  $A = \alpha I_E$ .*

*Demonstração.* Pegue um elemento não-nulo  $\xi \in E$ . Então  $\mathcal{B} := \{\xi\}$  é uma base de  $E$ : Com efeito é LI como  $\xi \neq \mathcal{O}$ , segundo Comentário 1.3.7 (ii), mas LI é equivalente a gera segundo Corolário 3.1.19. Como  $\mathcal{B}$  é base com um elemento só, todo elemento de  $E$  é uma CL em  $\{\xi\}$ , assim um múltiplo escalar de  $\xi$  com coeficiente único. Então  $E \ni A\xi = \alpha\xi$  para um único  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

Analogamente todo  $w \in E$  é da forma  $w = \lambda\xi$  para um único  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Segue que

$$Aw = A(\lambda\xi) = \lambda A\xi = \lambda(\alpha\xi) = (\lambda\alpha)\xi = (\alpha\lambda)\xi = \alpha(\lambda\xi) = \alpha w = \alpha I_E w$$

onde usamos vários axiomas do espaço vetorial. Isso prova que  $A = \alpha I_E$ .  $\square$

## 4.3 Dimensão dois – o plano

No plano  $\Pi$  queremos estudar três tipos elementares de transformações lineares, nomeadamente

- rotação  $R_\theta$  por um ângulo  $\theta$  em torno de um centro  $O$  no plano
- projeção ortogonal  $P_L$  sobre uma reta  $L$  no plano
- reflexão  $S_L$  em torno de uma reta  $L$  no plano

Mas o plano  $\Pi$  é composto de pontos... Como pode-se dar  $\Pi$  a estrutura de um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais  $\mathbb{R}$ ? Como pode-se adicionar pontos ou multiplicar por números? Não da.

Mas pode-se adicionar flechas  $v$  no plano se consideramos iguais todas as flechas do mesmo comprimento e direção, veja Exemplo 0.0.1. Mais detalhado duas

flechas são consideradas iguais se formam os lados opostos de um paralelogramo no qual os outros dois lados conectam, respectivamente, os dois pontos iniciais e os dois pontos terminais. Multiplicação de uma flecha  $v$  com um número real  $\alpha$  muda o comprimento pelo fator  $\alpha$ , trocando a direção caso  $\alpha < 0$  é negativo. Adicionamos duas flechas pondo no ponto termino da primeira flecha o ponto inicial da segunda, veja Figura 1 na introdução do manuscrito.

**Definição 4.3.1** (O espaço vetorial  $\Pi_O$  das flechas no plano de ponto início  $O$ ). Para eliminar a complicação que, dado uma flecha  $v$ , todo ponto  $p \in \Pi$  nos dá uma flecha equivalente (escolhendo  $p$  como ponto início), vamos fixar um ponto do plano, notação  $O \in \Pi$ . Neste caso todo ponto  $p \in \Pi$  representa uma flecha só: por definição a flecha correndo de  $O$  a  $p$ . Vice versa, cada uma flecha em  $\Pi$  é equivalente a uma iniciando no ponto  $O$ . Seja

$$\Pi_O := (\Pi, O)$$

o conjunto das flechas no plano  $\Pi$  com ponto início  $O$ . Identificamos tal flecha com seu ponto termino  $p \in \Pi$ . Escrevendo  $p \in \Pi$  significa que  $p$  é um ponto do plano, escrevendo  $p \in \Pi_O$  significa que  $p$  é a flecha correndo de  $O$  a  $p$ . Para  $\Pi_O$  pode-se verificar os axiomas de um espaço vetorial real sob multiplicação escalar  $\alpha p$  definida como mudando o comprimento da flecha com ponto termino  $p$  pelo fator  $\alpha \in \mathbb{R}$  e adição  $p + q$  definida pelo paralelogramo gerado, veja Figura 4.3.

**Comentário 4.3.2.** Note-se que são em bijeção o conjunto  $\Pi_O$  das flechas no plano  $\Pi$  iniciando no ponto  $O$  e o conjunto  $F$  no Exemplo 0.0.1 cujos elementos são flechas  $v$  no plano junto com todas flechas equivalentes a  $v$ . Adição e multiplicação escalar coincidem. Assim os espaços vetoriais  $F$  e  $\Pi_O$  são isomorfos.

**Comentário 4.3.3** (Sistema de coordenadas ortogonal  $OXY$ ). Escolhendo no plano  $\Pi$  dois eixos  $OX$  e  $OY$  ortogonal um ao outro, notação  $OXY$ , recebemos uma bijeção linear

$$\Pi_O \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto (x, y)$$

como definida em (0.0.1) e ilustrada na Figura 4.1.

### 4.3.1 Rotações

Seja  $\Pi_O$  o plano  $\Pi$  junto com um ponto  $O \in \Pi$  fixado. Suponha que podemos medir distância no plano, assim ângulos entre semi-retas do mesmo ponto inicial. Para os elementos  $p \in \Pi_O$  (pontos do plano interpretado simultaneamente como flecha de  $O$  ao ponto), denotamos de

- $C_p$  o círculo com centro  $O$  e passando  $p$ , veja Figura 4.2
- $\ell_p$  a semi-reta iniciando em  $O$  e passando  $p$  (se  $p = O$  seja  $\ell_O := \{O\}$ )
- $\ell_p(\theta)$  a semi-reta obtida pela rotação de  $\ell_p$  em torno  $O$  pelo ângulo  $\theta$  no sentido contra-horário

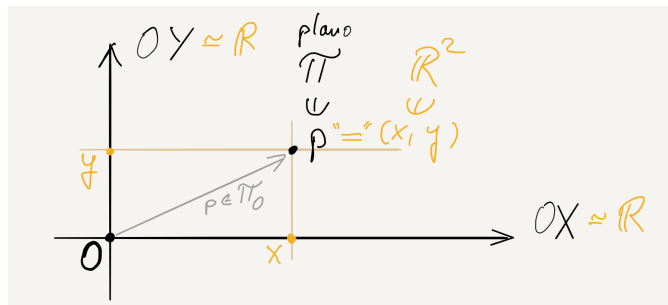


Figura 4.1: Sistema ortogonal de coordenadas  $OXY$  no plano  $\Pi$

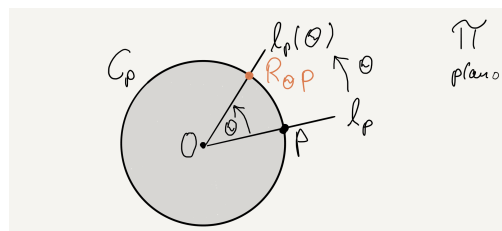


Figura 4.2: Rotação  $R_\theta$  no plano  $\Pi$  em torno do ponto  $O$  por um ângulo  $\theta$

**Definição 4.3.4** (Rotação). A aplicação definida por

$$R_\theta : \Pi_O \rightarrow \Pi_O, \quad p \mapsto \ell_p(\theta) \cap C_p$$

é chamado de **rotação** no plano  $\Pi$  em torno de  $O$  por o ângulo  $\theta$ .

**Comentário 4.3.5** (Preservação de comprimento e ângulos). Como o resultado da rotação é localizado no mesmo círculo a distância de  $O$  fica constante. O ângulo  $\varphi$  entre duas flechas  $p, q \in \Pi_O$  fica constante se aplicamos a rotação  $R_\theta$  pelo *mesmo* ângulo  $\theta$  em ambas flechas. aplicar a rotação  $R_\theta$  pelo mesmo ângulo  $\theta$  em ambas flechas, veja Figura 4.3.

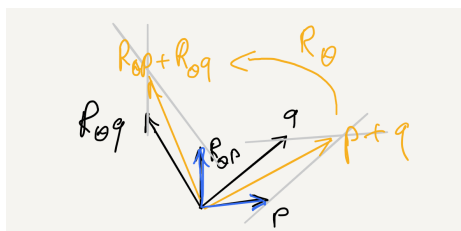


Figura 4.3: Preservação de ângulos

**Lema 4.3.6.** Dado um ângulo  $\theta$ , a rotação  $R_\theta : \Pi_O \rightarrow \Pi_O$  é linear.

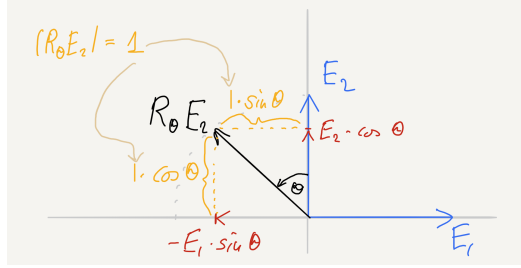


Figura 4.4: Rotação do vetor unitário – coeficientes formam coluna 2 da matriz

*Demonstração.* Lembre que os elementos  $p \in \Pi_O$  são pontos do plano visto como flechas de  $O$  a  $p$ . O comprimento da flecha é a distância dos ponto  $p$  e  $O$ . Dado  $p$ , denotamos ambos, **comprimento da flecha** e **distância de  $O$** , com o símbolo  $|p|$ .

PRESERVAÇÃO DE COMPRIMENTO  $\Rightarrow$  MULTIPLICATIVO. Dado um ponto  $p$  e um escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Se  $p = O$  ou  $\alpha = 0$  temos  $R_\theta(\alpha p) = R_\theta(O) = O = \alpha R_\theta(p)$ . Seja então  $p \neq O$  e  $\alpha \neq 0$ . Segundo preservação de comprimento obtemos

$$\frac{|R_\theta(\alpha p)|}{|R_\theta(p)|} = \frac{|\alpha p|}{|p|} = \pm \alpha \quad \text{então} \quad |R_\theta(\alpha p)| = \pm \alpha |R_\theta(p)|$$

onde o sinal em  $+/- \alpha$  depende se  $\alpha$  é positivo/negativo.

Resta eliminar os absolutos. No caso  $\alpha > 0$  os pontos  $\alpha p$  e  $p$  estão na mesma semi-reta, mas rotação preserva esta propriedade, assim  $R_\theta(\alpha p) = \alpha R_\theta(p)$ . No caso  $\alpha < 0$  os pontos  $\alpha p$  e  $p$  estão em semi-retas opostas. Rotação também preserva esta propriedade, assim  $R_\theta(\alpha p)$  e  $R_\theta(p)$  são múltiplos negativos um do outro. Como  $|R_\theta(\alpha p)| = -\alpha |R_\theta(p)|$  segue que  $R_\theta(\alpha p) = \alpha R_\theta(p)$ .

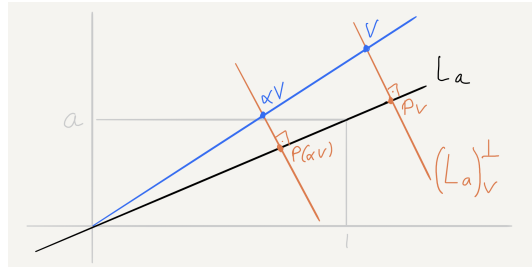
PRESERVAÇÃO DE ÂNGULOS  $\Rightarrow$  ADITIVO. Dado pontos  $p, q$ , considere o paralelogramo definindo a soma  $p + q$ . Aplicando a rotação sabemos que  $R_\theta p$  e  $R_\theta q$  formam o mesmo ângulo como  $p$  e  $q$ . Então o paralelogramo gerado por  $R_\theta p$  e  $R_\theta q$  resulta daquele gerado por  $p$  e  $q$  através de aplicar  $R_\theta$ . Mas assim a diagonal  $R_\theta p + R_\theta q$  resulta de aplicar  $R_\theta$  à diagonal  $p + q$  do paralelogramo original, em símbolos  $R_\theta p + R_\theta q = R_\theta(p + q)$ .  $\square$

### A matriz da rotação num sistema ortogonal de coordenadas

Conforme a definição de eixo, veja Comentário 0.0.3, o vetor unitário no eixo  $OX$  é a flecha correndo de  $O$  ao ponto  $X$ , notação  $E_1$ . Analogamente denotamos de  $E_2$  o vetor unitário no eixo  $OY$

Por definição a matriz  $r_\theta$  da rotação  $R_\theta$  em respeito à base  $\mathcal{E} := \{E_1, E_2\}$  contem como colunas os coeficientes (veja Figura 4.4) de

$$R_\theta E_1 = E_1 \cos \theta + E_2 \sin \theta, \quad R_\theta E_2 = -E_1 \sin \theta + E_2 \cos \theta$$

Figura 4.5: Projeção ortogonal  $P$  sobre a reta  $L_a$ 

**Lema 4.3.7.** A matriz da rotação pelo ângulo  $\theta$  é a matriz real

$$\mathbf{r}_\theta := [R_\theta]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

Lembramos que o sistema ortogonal de coordenadas disponibiliza uma correspondência  $\Pi_{\mathcal{O}} \simeq \mathbb{R}^2$  na qual a base  $\{E_1, E_2\}$  corresponde à base canônica  $\mathcal{E}^2 = \{e_1, e_2\}$ . Obviamente é mais confortável trabalhar com as listas de  $\mathbb{R}^2$  como com as flechas de  $\Pi_{\mathcal{O}}$ . Assim vamos trabalhar no futuro com  $\mathbb{R}^2$ .

### 4.3.2 Projeção ortogonal sobre uma reta

Trabalhamos no plano identificado com  $\mathbb{R}^2$  mediante um sistema ortogonal de coordenadas.

**Definição 4.3.8** (Projeção ortogonal). Seja  $a \in \mathbb{R}$  uma constante e seja  $L_a := \mathbb{R}(1, a)$  a reta no  $\mathbb{R}^2$  passando a origem  $\mathcal{O} = (0, 0)$  e o ponto  $(1, a)$  como ilustrado na Figura 4.5. Para um elemento  $v \in \mathbb{R}^2$  seja  $(L_a)_v^\perp$  a reta ortogonal a  $L_a$  e passando o ponto  $v$ . Então a aplicação que leva  $v$  à interseção das duas retas

$$P = P_{L_a} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto L_a \cap (L_a)_v^\perp \quad (4.3.2)$$

é chamado de **projeção ortogonal** sobre a reta  $L_a$ .

**Lema 4.3.9.** A projeção ortogonal  $P = P_{L_a} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é linear.

*Demonstração.* MULTIPLICATIVO. Similarmente como na prova de Lema 4.3.4 discrimina-se três casos  $\alpha < 0$ , ( $\alpha = 0$  ou  $v = \mathcal{O}$ ), e  $\alpha > 0$ . Vamos tratar o caso  $\alpha > 0$  e deixar os outros ao leitor. Para  $\alpha > 0$  e  $v \neq \mathcal{O}$  obtemos

$$\frac{|v|}{|Pv|} = \frac{|\alpha v|}{|P\alpha v|} = \frac{\alpha|v|}{|P\alpha v|}$$

onde temos usado o Teorema do Raio na primeira igualdade. Como  $|v| \neq 0$  segue, cortando  $|v|$ , que  $|P\alpha v| = \alpha|Pv|$ . Como  $P\alpha v$  e  $Pv$  são elementos da mesma ( $\alpha > 0$ ) semi-reta de  $L_a$ , obtém-se  $P\alpha v = \alpha Pv$ .

ADITIVO. A identidade  $P(v + w) = Pv + Pw$  resulta da Figura 4.6.  $\square$

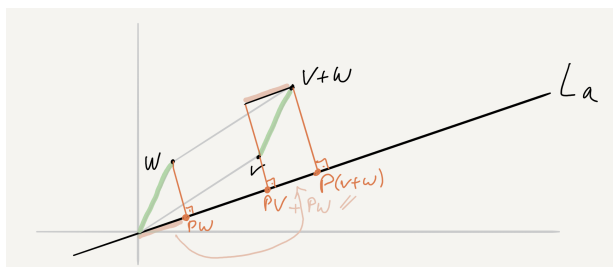


Figura 4.6: A identidade  $P(v + w) = Pv + Pw$

### A matriz da projeção ortogonal

Trabalhamos no plano identificado com  $\mathbb{R}^2$  mediante um sistema ortogonal de coordenadas.

**Lema 4.3.10.** *A matriz da projeção ortogonal sobre a reta  $L_a$  é dada por*

$$\mathbf{p}_a := [P_{L_a}] = \frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix}$$

*Demonstração.* Lema A.4.1 □

### 4.3.3 Reflexão em torno de uma reta

Trabalhamos no plano identificado com  $\mathbb{R}^2$  mediante um sistema ortogonal de coordenadas.

**Definição 4.3.11** (Reflexão). Dado  $a \in \mathbb{R}$ , a aplicação definida assim

$$\begin{aligned} S = S_{L_a} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto v + 2(P_{L_a}v - v) = (2P_{L_a} - I)v \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

é chamado de **reflexão** em torno da reta  $L_a$ . Note que  $S = 2P - I$  é linear.

Use Proposição 4.2.3 e a matriz de  $P$  para obter a **matriz da reflexão** em torno da reta  $L_a$ , com efeito

$$\mathbf{s}_a := [S_{L_a}] = 2\mathbf{p}_a - \mathbb{1} = \frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & -(1-a^2) \end{bmatrix}$$

**Exercício 4.3.12** (Rotação, projeção, reflexão).

1. Sejam  $R, P, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  respectivamente a rotação de  $30^\circ$  em torno da origem, a projeção ortogonal sobre a reta  $y = \frac{1}{3}x$  (notação  $L_{\frac{1}{3}}$ ) e a reflexão em torno da mesma reta.

Dado o vetor  $v = (2, 5)$ , determine suas imagens  $Rv, Pv, Sv$ .



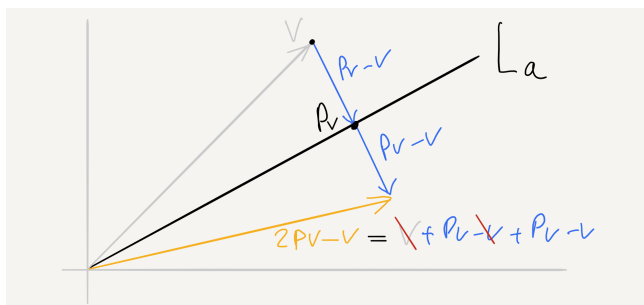


Figura 4.7: Reflexão  $S = 2P - I$  em torno da reta  $L_a$

2. Considere os operadores lineares  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por

$$R = R_{30^\circ}, \quad S = S_{L_2}, \quad P = P_{L_2}.$$

- Mostre que se tem  $PS = SP = P$ .
- Verifique a igualdade  $RSR = S$ .
- Mostre que  $R$  não comuta com  $S$  nem com  $P$ .
- Determine todos os vetores  $v$  tais que  $RPv = 0$  e  $RPv \neq 0$ .

3. Encontre  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  tais que o operador

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$$

tenha como núcleo a reta  $y = 3x$ .

## 4.4 Produto de transformações lineares



## Capítulo 5

# Núcleo e imagem

No Capítulo 5 denotamos de  $E, F$  espaços vetoriais

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K}), \quad F = (F, +, \cdot, \mathbb{K})$$

ambos sobre o mesmo corpo  $\mathbb{K}$ , e denotamos de  $A: E \rightarrow F$  uma transformação linear. Na primeira leitura pense em  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . As letras  $m, n$  denotam números naturais ou zero.

O primeiro objetivo no Capítulo 5 é associar a uma transformação linear  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  dois subespaços

$$N(A) \subset E \xrightarrow{A} F \supset \text{Im}(A)$$

e relacionar seu tamanho mínimo/máximo a injetividade/sobrejetividade de  $A$ . Outros resultados fundamentais são os seguintes: Uma transformação linear  $A$  é injetiva se e somente se leva conjuntos LI em conjuntos LI. Sobrejetividade é equivalente à existencia de uma inversa à direita e injetividade à existencia de uma inversa à esquerda.

**Definição 5.0.1.** Dado uma transformação linear  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  chamamos

$N(A) := \{v \in E \mid Av = \mathcal{O}\}$  o **núcleo** de  $A$  e

$\text{Im}(A) := \{Av \mid v \in E\}$  a **imagem** de  $A$

Dado um subconjunto  $X \subset E$ , seja  $AX := \{Ax \mid x \in X\}$  a imagem de  $X$  sob  $A$ .

**Lema 5.0.2.** Os subconjuntos  $N(A) \subset E$  e  $\text{Im}(A) \subset F$  são subespaços.

*Demonstração.* “ $\text{Im}(A)$  fechado sob  $+$ ”: Dado dois elementos da imagem, ou seja  $Av$  e  $Aw$  onde  $v, w \in E$ , então de linearidade  $Av + Aw = A(v + w) \in \text{Im}(A)$ . “ $\text{Im}(A)$  fechado sob  $\cdot$ ”: Se  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $Av \in \text{Im}(A)$ , então  $\alpha Av = A(\alpha v) \in \text{Im}(A)$ . Deixamos ao leitor provar que  $N(A)$  é fechado sob  $\cdot$  e  $+$ .  $\square$

**Definição 5.0.3** (Posto). A dimensão da imagem é chamado de **posto de uma transformação linear**  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , em símbolos

$$\text{posto}(A) := \dim \text{Im}(A)$$

**Lema 5.0.4** (Os dois subespaços naturais – mínimo e máximo). *Para uma transformação linear  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  injetividade e sobrejetividade correspondem a*

- (i)  $N(A) = \{\mathcal{O}\} \Leftrightarrow A$  é injetivo
- (ii)  $\text{Im}(A) = F \Leftrightarrow A$  é sobrejetivo

*Demonstração.* (i) “ $\Leftarrow$ ” ‘ $\subset$ ’ Seja  $v \in N(A)$ , então  $Av = \mathcal{O} = A\mathcal{O}$  onde temos usado linearidade no segundo passo. Então segundo injetividade como as imagens são iguais, os elementos  $v = \mathcal{O}$  devem ser iguais. ‘ $\supset$ ’ Como subespaço  $N(A)$  contem o vetor nulo. “ $\Rightarrow$ ” Suponha que são iguais as imagens  $Av = Aw$  de dois elementos  $v, w \in E$ . Então  $\mathcal{O} = Av - Aw = A(v - w)$ , e assim  $v - w \in N(A) = \{\mathcal{O}\}$ . Então  $v = w$ .

(ii) “ $\Leftarrow$ ” ‘ $\subset$ ’ trivial. ‘ $\supset$ ’ Dado  $f \in F$ , como  $A$  é sobrejetivo existe um  $v \in E$  tal que  $f = Av$ . Assim  $f \in \text{Im}(A)$ . “ $\Rightarrow$ ” Seja  $f \in F = \text{Im}(A)$ , ou seja  $f = Av$  para um  $v \in E$ , mostrando que  $A$  é sobrejetivo.  $\square$

**Lema 5.0.5.** *Seja  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  e  $X \subset E$ , então*

$$\langle X \rangle = E \Rightarrow \langle AX \rangle = \text{Im}(A)$$

*Demonstração.* ‘ $\subset$ ’ Sem usar  $\langle X \rangle = E$ , um elemento  $f \in \langle AX \rangle$  é da forma de uma soma finita  $f = \sum \alpha_i Ax_i = A \sum \alpha_i x_i \in \text{Im}(A)$  onde  $x_i \in X$  e  $\alpha_i \in \mathbb{K}$ . ‘ $\supset$ ’ Um elemento  $f \in \text{Im}(A) = AE = A\langle X \rangle$  é da forma de uma soma finita  $f = A \sum \alpha_i x_i = \sum \alpha_i Ax_i \in \langle AX \rangle$  onde  $x_i \in X$  e  $\alpha_i \in \mathbb{K}$ .  $\square$

Como  $\text{Im}(A) \subset F$  é um subespaço já sabemos de Teorema 3.2.1 que sua dimensão não é maior daquela de  $F$ . É uma surpresa que isso vale para  $\dim E$  também. Este fato será utilizado no famoso Teorema 5.4.1 de núcleo e imagem.

**Corolário 5.0.6.**  $\forall A \in \mathcal{L}(E, F)$  vale  $\dim \text{Im}(A) \leq \dim E$ .

*Demonstração.* Se  $\dim E = \infty$  não tem nada a provar. No caso  $n = \dim E \in \mathbb{N}_0$  seja  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  uma base de  $E$ . Como  $\langle \mathcal{B} \rangle = E$  temos  $\langle A\mathcal{B} \rangle = \text{Im}(A)$  segundo Lema 5.0.5. Nas outras palavras, o conjunto finito  $A\mathcal{B} = \{A\xi_i \mid i = 1, \dots, n\}$  de  $m \leq n$  elementos (possivelmente uns  $A\xi_i$ 's são iguais) gera o espaço vetorial  $\text{Im}(A)$ . Então  $\dim \text{Im}(A) \leq m \leq n = \dim E$  segundo Lema 3.1.21.  $\square$

**Exercício 5.0.7.** Defina operadores lineares  $A, B : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  como

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \dots) \\ B(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (x_2 - 2x_1, x_3 - 2x_2, \dots). \end{aligned}$$

Determine o núcleo e a imagem de  $A$  e de  $B$ .

**Exemplo 5.0.8** (SL). Dada uma matriz  $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K})$  e uma lista  $b \in \mathbb{K}^m$ . São equivalente os seguintes:

O sistema linear (SL) de  $m$  equações a  $n$  incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

admite uma solução  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ .

$\stackrel{(1.2.6)}{\iff}$  O vetor  $b$  é CL das colunas  $\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}$  da matriz  $\mathbf{a}$ ; veja (1.2.3)

$\stackrel{2}{\iff}$   $b \in \text{Im}(\mathbf{a})$  considerando a matriz como transformação linear  $\mathbf{a}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$

$\stackrel{3}{\iff} \langle \mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}, b \rangle = \langle \mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n} \rangle$

Equivalência 2: Isso é o fato que a imagem de uma matriz é o espaço-coluna, ou seja o conjunto de todas as CLs das colunas da matriz.

Equivalência 3: “ $\Rightarrow$ ” Se  $b$  é CL das colunas a igualdade é trivial. Caso geral: Como as colunas  $\{\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}\}$  geram  $\text{Im}(\mathbf{a})$ ,  $b \in \text{Im}(\mathbf{a})$ , e  $\text{Im}(\mathbf{a})$  é um subespaço obtemos a primeira identidade

$$\langle \mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}, b \rangle = \text{Im}(\mathbf{a}) = \langle \mathbf{a}\mathcal{E}^n \rangle = \underbrace{\langle \mathbf{a}e_1, \dots, \mathbf{a}e_n \rangle}_{\mathbf{a}_{\bullet 1} \quad \mathbf{a}_{\bullet n}}$$

Identidade dois segue do Lema 5.0.5 com a base canônica  $\mathcal{E}^n$  de  $\mathbb{K}^n$ .

“ $\Leftarrow$ ” A identidade fala que  $b$  é CL das colunas  $\mathbf{a}_{\bullet i} = \mathbf{a}e_i \in \text{Im}(\mathbf{a})$ , então  $b \in \text{Im}(\mathbf{a})$  porque  $\text{Im}(\mathbf{a})$  é um subespaço e assim fechado sob adição.

**Exercício 5.0.9.** Seja  $A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:

$$(x, y, z, t) \mapsto (x + y + z + 2t, x - y + 2z, 4x + 2y + 5z + 6t).$$

Encontre  $b \in \mathbb{R}^3$  que não pertença à imagem de  $A$ . Com  $b$ , exiba um sistema linear de 3 equações e 4 incógnitas sem solução.

## 5.1 Sobrejetividade – inversa à direita

**Definição 5.1.1.** Dado  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , uma transformação linear  $B \in \mathcal{L}(F, E)$  é chamado de *uma inversa à direita de A* se a composição satisfaz  $AB = I_F$ .

**Exemplo 5.1.2** (Geralmente inversas à direita não são únicas). Seja  $a \in \mathbb{R}$  e

$$A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x, y), \quad B_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, ax).$$

Então  $AB_a = I_{\mathbb{R}^2}$  para cada um  $a \in \mathbb{R}$ , mas  $B_a \neq B_b$  caso  $a \neq b$ .

**Teorema 5.1.3.** *Suponha  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  onde  $m := \dim F < \infty$ . Então*

$$A \text{ admite uma inversa à direita} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ sobrejetivo}$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Dado uma inversa à direita  $B$  de  $A$ , então  $\forall f \in F$  vale  $ABf = I_F f = f$ . Assim para todo  $f \in F$  existe um  $v \in E$ , com efeito  $v := Bf$ , tal que  $Av = f$ . Mas isso significa que  $A$  é sobrejetivo.

“ $\Leftarrow$ ” Usamos sobrejetividade de  $A$  para construir explicitamente uma inversa à direita de  $A$ . Escolha uma base ordenada  $\mathcal{Y} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$  de  $F$  e, usando sobrejetividade, uma lista  $v = (v_1, \dots, v_m)$  de  $m$  elementos de  $E$  tal que  $Av_j = \eta_j$  para  $j = 1, \dots, m$ . Lembramos de (4.1.4) que a lista  $v$  nos dá uma transformação linear  $B_v : F \rightarrow E$  unicamente determinado pelos valores  $B_v \eta_j := v_j$  nos membros da base  $\mathcal{Y}$ . Resta checar  $AB_v = I_F$ : Escrevendo  $f \in F$  como CL única na base  $\mathcal{Y}$ , ou seja  $f = \sum_j \beta_j \eta_j$ , e usando linearidade de  $B_v$  e de  $A$  obtemos

$$AB_v f = AB_v \sum_j \beta_j \eta_j = A \sum_j \beta_j \underbrace{B_v \eta_j}_{v_j} = \sum_j \beta_j Av_j = \sum_j \beta_j \eta_j = f$$

Note-se a soma é finita porque temos exprimido  $f$  como uma CL. □

**Exercício 5.1.4.** (a) Mostre que  $\{0\}$  e o próprio  $\mathbb{R}$  são os únicos subespaços de  $\mathbb{R}$ .

(b) Seja  $E$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$ . Mostre que  $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  é sobrejetivo ou igual a zero.

(c) Mostre que a derivação  $D : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ ,  $p(x) \mapsto \frac{d}{dx} p(x)$ , é sobrejetiva.

(d) Mostre que a derivação  $D : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $f(x) \mapsto \frac{d}{dx} f(x)$ , é sobrejetiva.

(e) Encontre uma inversa à direita  $J : \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  para a derivação  $D$  em iii).

## 5.2 Injetividade – inversa à esquerda

**Teorema 5.2.1.** *Dada uma transformação linear  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , então*

$$A \text{ injetivo} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ leva conjuntos LI em conjuntos LI}$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Seja  $A$  injetivo e  $X \subset E$  um subconjunto LI. Pegue elementos  $Ax_1, \dots, Ax_\ell \in AX$  na imagem e suponha que uma CL deles representa o vetor nulo, ou seja  $\mathcal{O} = \alpha_1 Ax_1 + \dots + \alpha_\ell Ax_\ell = A(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_\ell x_\ell)$  onde os  $\alpha_i$ 's são escalares. Como  $A$  é injetivo, equivalentemente  $N(A) = \{\mathcal{O}\}$  segundo Lema 5.0.4, segue que  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_\ell x_\ell = \mathcal{O}$ . Como  $X$  é LI segue que  $\alpha_1 = \dots = \alpha_\ell = 0$  e isso prova que o subconjunto  $AX \subset F$  é LI.

“ $\Leftarrow$ ” Seja  $v \in E$ . Se  $v \neq \mathcal{O}$ , então o subconjunto  $\{v\} \subset E$  é LI segundo

Comentário 1.3.7 (ii). Assim  $\{Av\} \subset F$  é LI como  $A$  leva LI em LI segundo hipótese. Assim o vetor  $Av$  não pode ser nulo. Temos provado  $v \neq \mathcal{O} \Rightarrow Av \neq \mathcal{O}$ . O contra-positivo então diz que  $Av = \mathcal{O} \Rightarrow v = \mathcal{O}$ . Assim  $N(A) = \{\mathcal{O}\}$ .  $\square$

**Corolário 5.2.2.** *Se  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  é injetivo, então  $\dim E \leq \dim F$ .*

*Demonstração.* Se  $\dim F = \infty$  não tem nada a provar. Seja  $m := \dim F \in \mathbb{N}_0$ . Seja  $B = \{v_1, \dots, v_k\}$  um subconjunto LI de  $E$ , então como  $A$  leva LI em LI segundo Teorema 5.2.1, o conjunto  $AB = \{Av_1, \dots, Av_k\}$  é LI em  $F$  e por isso (Corolário 3.1.18) não pode conter mais elementos como  $\dim F$ , em símbolos  $k := |B| = |AB| \leq m$ . (Como  $A$  é injetivo vale  $|B| = |AB|$ .) Analogamente à prova da parte (a) de Teorema 3.2.1 um subconjunto  $B_* \subset E$  LI com o número máximo  $n (\leq m)$  de elementos gera  $E$  e assim é uma base de  $E$ . Assim  $\dim E := |B_*| = n \leq m := \dim F$ .  $\square$

**Exemplo 5.2.3** (Aplicação). Não existe nenhuma transformação linear  $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a qual é injetiva.

**Definição 5.2.4.** Dado  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , uma transformação linear  $B \in \mathcal{L}(F, E)$  é chamado de *uma inversa à esquerda de  $A$*  se a composição satisfaz  $BA = I_E$ .

**Exemplo 5.2.5** (Geralmente inversas à esquerda não são únicas). Seja  $a \in \mathbb{R}$  e

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, 0), \quad B_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + az, y).$$

Então  $B_a A = I_{\mathbb{R}^2}$  para cada um  $a \in \mathbb{R}$ , mas  $B_a \neq B_b$  caso  $a \neq b$ .

**Teorema 5.2.6.** *Suponha  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  onde  $\dim E, \dim F < \infty$ . Então*

$$A \text{ admite uma inversa à esquerda } B \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ injetivo}$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Se  $Au = Av$ , então  $BAu = BAv$ . Mas  $BA = I$ , daí  $u = v$ . “ $\Leftarrow$ ” Como a dimensão  $n := \dim E$  é finita, escolha uma base  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$ . Baseado na injetividade de  $A$ , segundo Teorema 5.2.1, o conjunto das imagens  $\{A\xi_1, \dots, A\xi_n\}$  é LI em  $F$  e pode ser estendido, segundo Teorema 3.2.1 (b) usando  $\dim F < \infty$ , para obter a base  $\mathcal{B} := \{A\xi_1, \dots, A\xi_n, \eta_1, \dots, \eta_k\}$  de  $F$ . A lista  $w := (\xi_1, \dots, \xi_n, \mathcal{O}, \dots, \mathcal{O}) \in E^{\times(n+k)}$  determina  $B_w \in \mathcal{L}(F, E)$  segundo (4.1.4), ou seja  $B_w(A\xi_i) := \xi_i$  e  $B_w\eta_j := \mathcal{O}$ . Escreve  $v \in E$  como CL única  $v = \sum_i \alpha_i \xi_i$ . Então usando linearidade de  $A$  e de  $B_w$  obtemos

$$B_w Av = B_w A \sum_i \alpha_i \xi_i = \sum_i \alpha_i \underbrace{B_w A \xi_i}_{\xi_i} = v = I_E v$$

para cada um  $v \in E$ .  $\square$

**Exercício 5.2.7.** Determine uma base para a imagem de cada uma das transformações lineares abaixo e indique quais são sobrejetivas.

(a)  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - y, x - y)$ ;

- (b)  $B : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, (x, y, z, t) \mapsto (x + y, z + t, x + z, y + t)$ ;
- (c)  $C : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + \frac{1}{2}y, y + \frac{1}{2}z, z + \frac{1}{2}x)$ ;
- (d)  $D : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2), X \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X$ ;
- (e)  $E : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{R}), p = p(x) \mapsto xp$ .

### 5.3 Bijetividade – inversa

**Definição 5.3.1** (Inversa). Chama-se uma transformação linear  $A : E \rightarrow F$  de **invertível** se  $A$  admite uma inversa à esquerda  $B \in \mathcal{L}(F, E)$  e uma inversa à direita  $C \in \mathcal{L}(F, E)$ . Neste caso  $B = C$ ,<sup>1</sup> denotado  $A^{-1}$ , é dito **a inversa** de  $A$ .

**Exercício 5.3.2.** Sejam  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  e  $B \in \mathcal{L}(F, G)$  invertíveis, mostre que

- a) a inversa de  $A$  (se existisse) é única
- b)  $(A^{-1})^{-1} = A$
- c)  $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- d)  $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$  para escalares não-nulos  $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

#### 5.3.1 Isomorfismos

**Definição 5.3.3** (Isomorfismo). Um **isomorfismo** (entre  $E$  e  $F$ ) é uma transformação linear  $A : E \rightarrow F$  a qual é bijetiva (injetivo e sobrejetivo). Neste caso se diz que  $E$  e  $F$  são espaços vetoriais **isomorfos**, símbolo  $E \simeq F$ .

Para aplicações gerais bijetividade é equivalente a existência da aplicação inversa (a qual claramente herda bijetividade). É interessante observar que se a aplicação bijetiva é linear a aplicação inversa não só existe mas herda linearidade.

**Proposição 5.3.4.** *Seja  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , então*

$$A \text{ isomorfismo} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ é invertível}$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Definimos o candidato  $B$  para ser a inversa de  $A$  assim

$$B : F \rightarrow E, \quad f \mapsto Bf := v \tag{5.3.1}$$

onde  $v$  é o único elemento de  $E$  com  $Av = f$  (existência:  $A$  sobrejetivo, unicidade:  $A$  injetivo). A aplicação definida  $B$  é linear: Sejam  $f, g \in F$ , denotamos  $v := Bf$  e  $w := Bg$ . Então  $Av = f$  e  $Aw = g$  e como  $A$  é linear obtemos  $A(v + w) = Av + Aw = f + g$ , então  $B(f + g) = v + w = Bf + Bg$ . Deixamos ao

<sup>1</sup> Com efeito  $B = BI_F = B(AC) = (BA)C = I_EC = C$ .



leitor verificar que  $B(\alpha f) = \alpha Bf$ . Também tem a propriedade de ser inversa à direita e esquerda, com efeito para  $v \in E$  denota  $f := Av$ , então

$$ABf = Av = f, \quad BAv = Bf = v$$

“ $\Leftarrow$ ” Suponha que  $A$  admite a inversa  $A^{-1} : F \rightarrow E$ . Então  $A^{-1}$  é inversa à direita e à esquerda de  $A$ . Assim  $A$  é sobrejetivo e injetivo segundo os Teoremas 5.1.3 e 5.2.6. Mas bijetivo e linear significa isomorfismo.  $\square$

**Corolário 5.3.5.** *Dado isomorfismos  $E \xrightarrow{A} F \xrightarrow{B} G$ , então composição  $BA$  e múltiplos  $\alpha A$  são isomorfismos para todos os escalares não-nulos  $\alpha \neq 0$ .*

*Demonstração.* Proposição 5.3.4 e Exercício 5.3.2.  $\square$

**Exercício 5.3.6** (Isomorfismo é relação de equivalência). Mostre que isomorfismo ' $\simeq$ ' é uma **relação de equivalência** no conjunto de todos os espaços vetoriais: ou seja, mostre que são satisfeitos os três axiomas seguintes

$$\begin{aligned} E \simeq E & \text{ para cada um espaço vetorial} && \text{(reflexividade)} \\ E \simeq F & \Rightarrow F \simeq E && \text{(simetria)} \\ E \simeq F \text{ e } F \simeq G & \Rightarrow E \simeq G && \text{(transitividade)} \end{aligned}$$

**Teorema 5.3.7.** *Dada uma transformação linear  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , então*

$$A \text{ bijetiva (isomorfismo)} \Leftrightarrow A \text{ leva uma base de } E \text{ numa base de } F$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Seja  $A$  um isomorfismo e  $\mathcal{B}$  uma base de  $E$ . Resta mostrar que o conjunto  $A\mathcal{B}$  é LI e gera  $F$ . LI segue de Teorema 5.2.1 (uma TL injetiva  $A$  leve LI em LI) e como  $\mathcal{B}$  gera  $E$  o Lema 5.0.5 diz que  $\langle A\mathcal{B} \rangle = \text{Im}(A) = F$  onde a segunda identidade é a sobrejetividade de  $A$ .

“ $\Leftarrow$ ” Dado um base  $\mathcal{B}$  de  $E$ , então  $A\mathcal{B}$  é uma base de  $F$  segundo a hipótese. **A INJETIVO** ( $N(A) = \{\mathcal{O}\}$ ): Suponha  $v \in E$  e  $Av = \mathcal{O}$ . Escrevemos  $v$  como CL  $v = \sum_{i=1}^{k(v)} \alpha_i \xi_i$  de elementos  $\xi_i$  da base  $\mathcal{B}$ . Então

$$\mathcal{O} = Av = A \sum_i \alpha_i \xi_i = \sum_i \alpha_i \underbrace{A\xi_i}_{\in A\mathcal{B}}$$

Como  $A\mathcal{B}$  é um conjunto LI todos os coeficientes  $\alpha_i = 0$  se anulam. Assim  $v = \mathcal{O}$  o que mostra que  $N(A) = \{\mathcal{O}\}$ .

**A SOBREJETIVO:** Segundo hipótese  $A\mathcal{B}$  é uma base de  $F$ . Dado  $f \in F$ , escrevemos  $f$  como CL  $f = \sum_{j=1}^{\ell(f)} \beta_j A\xi_j$  de elementos  $A\xi_j$  da base  $A\mathcal{B}$ . O elemento de  $E$  definido por  $v := \sum_j \beta_j \xi_j$  satisfaz  $Av = A \sum_j \beta_j \xi_j = \sum_j \beta_j A\xi_j = f$ .  $\square$

**Corolário 5.3.8.** *Um espaço vetorial  $E$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e de dimensão  $n \in \mathbb{N}_0$  é isomorfo a  $\mathbb{K}^n$ .*

*Demonstração.* Escolha uma base  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$  e defina a aplicação  $A : \mathbb{K}^n \rightarrow E$  na forma  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$ . Note-se que  $A$  é linear e que  $Ae_j = A(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = 1 \cdot \xi_j = \xi_j$ . Assim  $A$  leva a base canônica  $A\mathcal{E}^n = \mathcal{B}$  na base  $\mathcal{B}$ , então  $A$  é um isomorfismo segundo Teorema 5.3.7.  $\square$

**Corolário 5.3.9.** *Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e de dimensões finitas, então*

$$E \simeq F \quad \Leftrightarrow \quad \dim E = \dim F$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Seja  $A : E \rightarrow F$  um isomorfismo e  $\mathcal{B}$  uma base de  $E$ . Então  $A\mathcal{B}$  é base de  $F$  segundo Teorema 5.3.7. e  $|\mathcal{B}| = |A\mathcal{B}|$  como  $A$  é bijetivo. Daí  $\dim E := |\mathcal{B}| = |A\mathcal{B}| = \dim F$ .

“ $\Leftarrow$ ” Corolário 5.3.8 da dois isomorfismos  $E \simeq \mathbb{K}^{\dim E} = \mathbb{K}^{\dim F} \simeq F$ .  $\square$

**Exemplo 5.3.10.** O espaço vetorial  $\mathcal{S}(n)$  das matrizes  $n \times n$  simétricas e o espaço vetorial  $\mathcal{P}_{\frac{n(n+1)}{2}-1}$  dos polinômios de grau menor ou igual  $\frac{n(n+1)}{2} - 1$  são isomorfos. Com efeito as dimensões são iguais – segundo Exercício 3.2.4 (c) e Exemplo 3.1.22 (b) – e assim Corolário 5.3.9 aplica.

**Exercício 5.3.11.** Dado  $A \in \mathcal{L}(E)$  onde  $\dim E < \infty$ , defina

$$\begin{aligned} T_A : \mathcal{L}(E) &\rightarrow \mathcal{L}(E) \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

Prove que  $T_A$  é linear e que  $T_A$  é invertível se, e somente se  $A$  é invertível. Mesmo problema com  $S_A(X) := XA$ .

**Exercício 5.3.12.** Estabeleça um isomorfismo entre o espaço vetorial das matrizes reais simétricas  $n \times n$  e o espaço das matrizes reais *triangulares inferiores* ( $a_{ij} = 0$  se  $i < j$ ).

Idem entre as matrizes anti-simétricas e as triangulares inferiores com diagonal nula.

**Exercício 5.3.13.** Sejam  $E, F$  espaços vetoriais tais que  $\dim E \leq \dim F < \infty$ . Prove que existem  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  e  $B \in \mathcal{L}(F, E)$  tais que  $A$  é injetiva e  $B$  é sobrejetiva.

**Exercício 5.3.14.** Sejam  $E, F$  espaços vetoriais (de dimensão finita ou infinita). Sejam  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  e  $B \in \mathcal{L}(F, E)$  tais que  $AB$  é invertível.

- (a) Prove que  $A$  é sobrejetiva e  $B$  é injetiva.
- (b) Se  $AB$  e  $BA$  são invertíveis, prove que  $A$  é invertível.

## 5.4 Teorema de núcleo e imagem

**Teorema 5.4.1** (Teorema de núcleo e imagem). *Para uma transformação linear  $A: E \rightarrow F$  com domínio  $E$  de dimensão finita  $n$  vale*

$$\dim E = \dim N(A) + \dim \text{Im}(A)$$

*Demonstração.* Segundo Lema 5.0.2 os conjuntos  $N(A)$  e  $\text{Im}(A)$  são subespaços de  $E$  e  $F$ , respectivamente. Segundo Teorema 3.2.1 (c) e Corolário 5.0.6 temos

$$\begin{aligned} k &:= \dim N(A) \leq \dim E =: n < \infty \\ \ell &:= \dim \text{Im}(A) \leq \dim E =: n < \infty \end{aligned}$$

Escolha uma base ordenada  $(\xi_1, \dots, \xi_k)$  de  $N(A)$  e uma  $(A\nu_1, \dots, A\nu_\ell)$  de  $\text{Im}(A)$ . Resta mostrar que

$$\mathcal{B} := (\xi_1, \dots, \xi_k, \nu_1, \dots, \nu_\ell)$$

é uma base de  $E$ , porque neste caso  $\dim E = k + \ell = \dim N(A) + \dim \text{Im}(A)$ .

**$\mathcal{B}$  é LI.** Suponha que uma CL em  $\mathcal{B}$  representa o vetor nulo, ou seja

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k + \beta_1 \nu_1 + \dots + \beta_\ell \nu_\ell = \mathcal{O}$$

Resta mostrar que todos os coeficientes se anulam. Aplique  $A$  usando linearidade e que  $\xi_i \in N(A)$  para obter

$$\alpha_1 \underbrace{A\xi_1}_{\mathcal{O}} + \dots + \alpha_k \underbrace{A\xi_k}_{\mathcal{O}} + \beta_1 A\nu_1 + \dots + \beta_\ell A\nu_\ell = \mathcal{O}$$

Então  $\beta_1 = \dots = \beta_\ell = 0$  porque toda CL no conjunto LI  $\{A\nu_1, \dots, A\nu_\ell\}$  e representando o vetor nulo tem todos coeficientes nulos. Neste caso a primeira identidade simplifica-se para  $\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k = \mathcal{O}$ . Mas os  $\xi_i$ 's formam uma base, então um conjunto LI, assim os coeficientes se anulam  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ .

**$\mathcal{B}$  gera  $E$ .** Dado  $v \in E$ , temos que exprimir  $v$  como CL em  $\mathcal{B}$ . Como temos uma base de  $\text{Im}(A)$ , escrevemos  $Av \in \text{Im}(A)$  como CL  $Av = \beta_1 A\nu_1 + \dots + \beta_\ell A\nu_\ell$  com coeficientes únicos  $\beta_j$ . Mas isso nos dá um elemento  $w$  do núcleo

$$A \underbrace{(v - \beta_1 \nu_1 - \dots - \beta_\ell \nu_\ell)}_{=:w} = \mathcal{O}$$

Exprimindo  $w$  como CL na base do núcleo, com coeficientes únicos  $\alpha_j$ , obtemos

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k = w = v - \beta_1 \nu_1 - \dots - \beta_\ell \nu_\ell$$

Assim temos exprimido

$$v = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k + \beta_1 \nu_1 + \dots + \beta_\ell \nu_\ell$$

como CL em  $\mathcal{B}$ . □

**Corolário 5.4.2.** Para uma transformação linear  $A: E \rightarrow F$  entre espaços vetoriais da mesma dimensão finita  $n = \dim E = \dim F$  são equivalente

$$A \text{ injetivo} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ sobrejetivo} \quad (\Leftrightarrow \quad A \text{ isomorfismo})$$

*Demonstração.* Da hipótese da mesma dimensão e do Teorema 5.4.1 sabemos

$$\dim F = \dim E = \dim N(A) + \dim \text{Im}(A)$$

Injetividade (equivalente a  $N(A) = \{\mathcal{O}\}$  segundo Lema 5.0.4) implica  $\dim F = \dim \text{Im}(A)$ , então  $F = \text{Im}(A)$  (sobrejetividade) segundo Teorema 3.2.1 (d). Vice versa, sobrejetividade ( $F = \text{Im}(A)$ ) implica  $N(A) = \{\mathcal{O}\}$  (injetividade).  $\square$

**Exercício 5.4.3** (Errado na dimensão infinita). Considere os operadores lineares  $A, B: \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  dado por empurrar todos os membros por um lugar

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (0, x_1, x_2, x_3, \dots) \\ B(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (x_2, x_3, \dots) \end{aligned}$$

Mostre que  $A$  é linear e injetivo, mas não é sobrejetivo, enquanto  $B$  é linear e sobrejetivo, mas não é injetivo,

**Corolário 5.4.4.** Na mesma dimensão finita  $n = \dim E = \dim F$  ser inversa à esquerda é equivalente a ser inversa à direita, em símbolos para  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  e  $B \in \mathcal{L}(F, E)$  são equivalentes

$$BA = I_E \quad \Leftrightarrow \quad AB = I_F$$

No todo caso  $A$  é invertível com inversa  $A^{-1} = B = C$ .

*Demonstração.* Temos as três equivalências

$$\begin{aligned} \exists B \in \mathcal{L}(F, E): BA = I_E \\ \Leftrightarrow A \text{ injetivo} \\ \Leftrightarrow A \text{ sobrejetivo} \\ \Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{L}(F, E): AC = I_F \end{aligned}$$

segundo respectivamente os três resultados Teorema 5.2.6, Corolário 5.4.2, e Teorema 5.1.3. Mas neste caso  $C = B$  e este operador é a inversa de  $A$  como mostrado na Definição 5.3.1.  $\square$

**Exemplo 5.4.5.** Dado uma lista não-nula  $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathcal{O}\}$ , o subconjunto

$$H_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_\alpha(x) := \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\} = N(\varphi_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$$

é chamado de hiperplano e foi introduzido no Exemplo 2.1.8. Já sabemos que

$$\dim H_\alpha = n - 1$$

como no Exemplo 3.0.11 d) temos visto uma base composto de  $n - 1$  elementos.

Um caminho alternativo para calcular a dimensão é do ponto da vista como núcleo do funcional linear  $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . O Teorema 5.4.1 diz que

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^n}_{=n} = \dim \underbrace{N(\varphi_\alpha)}_{H_\alpha} + \underbrace{\dim \text{Im}(\varphi_\alpha)}_{=1}$$

Resta ver que  $\text{Im}(\varphi_\alpha) = \mathbb{R}$ . O subespaço  $\text{Im}(\varphi_\alpha)$  de  $\mathbb{R}$  não é o trivial  $\{0\}$  porque  $\varphi_\alpha \alpha = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 > 0$  é não-nulo como  $\alpha \neq (0, \dots, 0)$ . Entao  $\text{Im}(\varphi_\alpha)$  deve ser o outro subespaço de  $\mathbb{R}$ , o  $\mathbb{R}$  mesmo, veja Exercício 2.1.4.



## Capítulo 6

# Soma direta e projeções

No Capítulo 6 denotamos de

$$F, G, H \subset E$$

subespaços de um espaço vetorial  $E$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Na parte das involuções precisamos às vezes que  $1 + 1 \neq 0$  em  $\mathbb{K}$ , veja Corolário 1.1.20. (Vale para  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ , não para  $\mathbb{Z}_2$ .) O objeto central do nosso interesse será o conjunto

$$\mathcal{SC} = \mathcal{SC}(E) := \{(F, G) \mid F \oplus G = E\}$$

composto de **pares**  $(F, G)$  de **subespaços complementares** de  $E$  no sentido que o par decompõe  $E = F \oplus G$  como soma direta.

O nosso objetivo será relacionar o conjunto  $\mathcal{SC}(E)$  bijectivamente com duas classes de operadores lineares em  $E$  – os subconjuntos de  $\mathcal{L}(E)$  dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \mathcal{P}(E) &:= \{P \mid P^2 = P\} && \text{“projeções em } E\text{”} \\ \mathcal{I} = \mathcal{I}(E) &:= \{S \mid S^2 = I_E\} && \text{“involuções em } E\text{”} \end{aligned}$$

Ambas condições fazem sentido no contexto geral de uma aplicação  $s : X \rightarrow X$  num conjunto  $X$ . Para nos são relevantes as **involuções** ( $s^2 = \text{id}$ ). Temos três involuções naturais (i) de trocar os membros

$$\mu : \mathcal{SC} \rightarrow \mathcal{SC}, \quad (F, G) \mapsto (G, F)$$

(ii) de mudar o sinal<sup>1</sup>

$$\sigma : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}, \quad S \mapsto -S$$

e (iii) de tomar diferença com o operador identidade

$$\delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}, \quad P \mapsto I - P$$

Com efeito  $(I - P)^2 = I^2 - 2P + P^2 = I - P$ , assim realmente é uma projeção. Capítulo 6 é ilustrado na Figura 6.1. É comum indicar injetividade de uma aplicação com tal flecha  $f : X \hookrightarrow Y$ , sobrejetividade com tal flecha  $f : X \twoheadrightarrow Y$ .

<sup>1</sup> Na verdade  $-S$  é o inverso aditivo de  $S \in \mathcal{L}(E)$  e o inverso do inverso é a identidade.

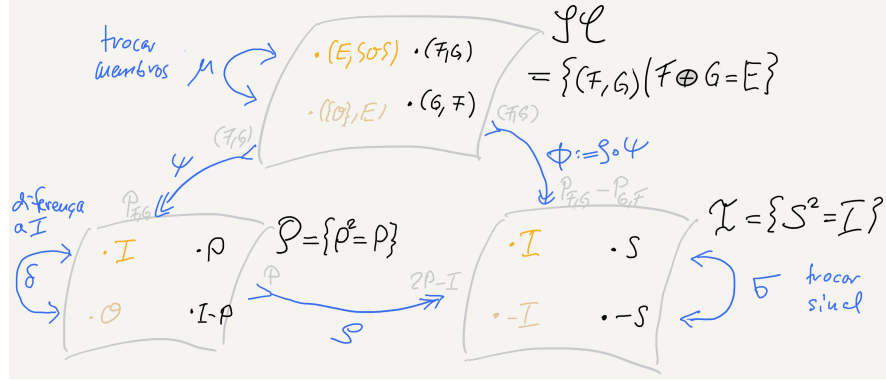


Figura 6.1: Conjuntos  $\mathcal{SC}$  dos subespaços complementares,  $\mathcal{P}$  das projeções, e  $\mathcal{I}$  das involuções lineares – a diagrama das seis bijeções é comutativa

### Preparações e lembranças

**Definição 6.0.6** (Pontos fixos e anti-fixos). Dado um conjunto  $X$  e uma aplicação  $r : X \rightarrow X$ . a) Um elemento  $x \in X$  tal que  $r(x) = x$  chama-se um **ponto fixo** de  $r$ . O conjunto dos pontos fixos de  $r$  satisfaz  $\mathbf{Fix}(r) \subset \text{Im}(r)$ .

b) Se  $X$  é um espaço vetorial denotamos de  $\mathbf{aFix}(r)$  o conjunto de todos os **pontos anti-fixos**  $x$  de  $r$ , ou seja  $r(x) = -x$ .

É fácil – e instrutivo – checar que para aplicações idempotentes num conjunto  $X$  os pontos fixos já formam a imagem inteira, em símbolos

$$r^2 = r \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Fix}(r) = \text{Im}(r) \tag{6.0.1}$$

Para aplicações idempotentes é recomendável – geralmente ajuda bastante o entendimento – trabalhar com  $\mathbf{Fix}(r)$  em vez de  $\text{Im}(r)$ .

**Exercício 6.0.7.** Se  $B \in \mathcal{L}(E)$ , então  $\mathbf{Fix}(B)$ ,  $\mathbf{aFix}(B) \subset E$  são subespaços.

### Produto cartesiano e soma

Lembre-se do Exercício 3.1.23 que o produto cartesiano  $G \times H$  de dois espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão

$$\dim(G \times H) = \dim G + \dim H$$

Dado dois subespaços  $G, H$ , será útil relembrar da Seção 2.3 a soma ordinária  $G + H$  e a soma direta  $G \oplus H$  deles. Se  $G, H$  são de dimensão finita vale a fórmula (3.2.1) a qual diz que

$$\dim(G + H) = \dim G + \dim H - \dim(G \cap H) \tag{6.0.2}$$

**Exercício 6.0.8.** Seja  $E$  um espaço vetorial com subespaços de intersecção trivial  $G \cap H = \{\mathcal{O}\}$ . Prove que  $S : G \times H \rightarrow G \oplus H, (g, h) \mapsto g + h$ , é um isomorfismo (linear, injetivo, sobrejetivo).



## 6.1 Projeções

**Definição 6.1.1.** Os operadores lineares idempotentes  $P^2 = P \in \mathcal{L}(E)$  são chamados de **as projeções** de  $E$ . Um **par de subespaços complementares** de  $E$  é um par  $(F, G)$  de subespaços decompondo  $E$  no sentido que  $F \oplus G = E$ .

**Lema 6.1.2** (Caracterização de projeção). *Seja  $P \in \mathcal{L}(E)$ , então*

$$P \text{ projeção de } E \Leftrightarrow \begin{cases} a) & \forall v \in \text{Im}(P): Pv = v & \text{Im}(P) = \text{Fix}(P) \\ b) & E = \text{Im}(P) \oplus \text{N}(P) & \text{“par complementar”} \end{cases}$$

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Suponha  $P^2 = P$ . a) Já sabemos de (6.0.1) que  $\text{Im}(P) = \text{Fix}(P)$ . b) Intersecção trivial: seja  $v \in \text{Fix}(P) \oplus \text{N}(P)$ , então  $\mathcal{O} = Pv = v$ .

“ $\Leftarrow$ ” Se  $v \in E$ , então  $Pv \in \text{Im}(P) = \text{Fix}(P)$ , assim  $P^2v = P(Pv) = Pv$ .  $\square$

**Definição 6.1.3** (Projeção sobre  $F$  paralelamente  $G$ ). Seja  $(F, G)$  um par de subespaços complementares de  $E$ , escreva  $v \in E = F \oplus G$  na forma  $v = f + g$  com únicos elementos  $f \in F$  e  $g \in G$ , veja Teorema 2.3.4. A aplicação dada por

$$P_{F,G}: E \rightarrow E, \quad v \mapsto f \tag{6.1.1}$$

é chamada de **projeção de  $E$  sobre  $F$  paralelamente  $G$** .

**Lema 6.1.4.** *A aplicação  $P := P_{F,G}$  definida acima é uma projeção de  $E$ .  $E$  imagem (os pontos fixos) e núcleo são dados por  $F$  e  $G$ , em símbolos*

$$F = \text{Im}(P_{F,G}) = \text{Fix}(P_{F,G}), \quad G = \text{N}(P_{F,G})$$

*Além disso  $P_{G,F} = I_E - P_{F,G}$ .*

*Demonstração.* Se  $v = f + g$  e  $\tilde{v} = \tilde{f} + \tilde{g}$ , então  $v + \tilde{v} = f + g + \tilde{f} + \tilde{g} = f + \tilde{f} + g + \tilde{g}$ .

LINEAR: Assim  $P(v + \tilde{v}) = P(f + \tilde{f} + g + \tilde{g}) = f + \tilde{f} = Pv + P\tilde{v}$ . Como  $\alpha v = \alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$  obtemos  $P(\alpha v) = P(\alpha f + \alpha g) = \alpha f = \alpha Pv$ .

IDEMPOTENTE: Vale  $P^2v = P(P(f + g)) = Pf = f = Pv$ .

$\text{Im}(P) = F$ : ‘ $\subset$ ’ óbvio ‘ $\supset$ ’ dado  $f \in F$ , então  $Pf = f$ .

$\text{N}(P) = G$ : ‘ $\subset$ ’ para  $f + g = v \in \text{N}(P)$  vale  $\mathcal{O} = Pv = P(f + g) = f$ . Assim segue que  $v = g \in G$ . ‘ $\supset$ ’ para  $g \in G$  vale  $Pg = P(\mathcal{O} + g) = \mathcal{O}$ .

IDENTIDADE:  $P_{G,F}(f + g) = g = (f + g) - f = I_E(f + g) - P_{F,G}(f + g)$   $\square$

**Teorema 6.1.5.** *A seguinte aplicação é uma bijeção*

$$\begin{aligned} \mathcal{SC} = \{\text{pares de subespaços complementares de } E\} &\xrightarrow{\psi} \{\text{projeções em } E\} = \mathcal{P} \\ (F, G) &\mapsto P_{F,G} \end{aligned}$$

*com inversa  $\chi: P \mapsto (\text{Im}(P), \text{N}(P))$ .*

*Útil lembrar:  $\text{Im}(P) = \text{Fix}(P)$*

Note-se que o subconjunto  $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}(E)$  composto das projeções  $P$  de  $E$  não é um subespaço, por exemplo  $(\alpha P)^2 = \alpha^2 P^2 = \alpha^2 P \neq \alpha P$  caso  $\alpha^2 \neq \alpha \in \mathbb{K}$ . Então não faz sentido falar sobre linearidade da bijeção  $\psi$ .

*Demonstração.* INJETIVO. Suponha  $P_{F,G} = P_{\tilde{F},\tilde{G}}$ , então aplique Lema 6.1.4 duas vezes para obter as identidades  $F = \text{Im}(P_{F,G}) = \text{Im}(P_{\tilde{F},\tilde{G}}) = \tilde{F}$  e analogamente  $G = \text{N}(P_{F,G}) = \text{N}(P_{\tilde{F},\tilde{G}}) = \tilde{G}$ .

SOBREJETIVO. Dado uma projeção  $P$  em  $E$ , Lema 6.1.2 diz que o par definido por  $(F, G) := (\text{Im}(P), \text{N}(P))$  é um par de subespaços complementares. Resta mostrar que  $P = P_{\text{Im}(P), \text{N}(P)} \stackrel{\text{def.}}{=} \psi(F, G)$ . Dado  $w \in E$ , Lema 6.1.2 diz que  $w = f + g$  para únicos elementos  $f \in \text{Im}(P) = \text{Fix}(P)$  e  $g \in \text{N}(P)$ . Então vale

$$P_{\text{Im}(P), \text{N}(P)} w \stackrel{\text{def.}}{=} f \stackrel{\text{pt. fix.}}{=} Pf = Pf + \underbrace{0}_{Pg} \stackrel{\text{lin.}}{=} P(f + g) = Pw$$

INVERSA. Dada uma projeção  $P$  em  $E$ , no item anterior temos visto que

$$P = P_{\text{Im}(P), \text{N}(P)} \stackrel{\text{def.}}{=} \psi(\text{Im}(P), \text{N}(P)) \stackrel{\text{def.}}{=} \psi(\chi(P))$$

Vale  $\chi(\psi(F, G)) \stackrel{\text{def.}}{=} (\text{Im}(P_{F,G}), \text{N}(P_{F,G})) = (F, G)$  segundo Lema 6.1.4.  $\square$

## 6.2 Involuções

**Definição 6.2.1.** Um operador linear  $S \in \mathcal{L}(E)$  cujo quadrado  $S^2 = I_E$  é a identidade chama-se de **involução** de  $E$ . Involuções são isomorfismos.

Com efeito, a condição  $S^2 = I_E$  para ser uma involução implica injetivo e sobrejetivo. Como o núcleo sempre é mínima  $\text{N}(S) = \{\mathcal{O}\}$  e a imagem sempre é máxima  $\text{Im}(S) = E$  estes dois subespaços não são úteis, não – em contraste ao caso de projeções. Os lugares deles como par de subespaços complementares ocupam, no caso de involuções, os subespaços dos pontos fixos e anti-fixos

$$F := \text{Fix}(S), \quad A := \text{aFix}(S)$$

A vinculação entre projeções  $P$  e involuções  $S$ , além de dar decomposições

$$\text{Im}(P) \oplus \text{N}(P) = E = F \oplus A$$

é a igualdade  $S = P_{F,A} - P_{A,F}$  baseada na identidade

$$\text{Im}(P) = \text{Fix}(P)$$

Nosso trajeto será assim: Suponhamos agora que  $2 := 1 + 1 \neq 0$  em  $\mathbb{K}$ , veja Corolário 1.1.20. Primeiro mostramos que a fórmula estabelecida na dimensão 2 para a reflexão em torno de uma reta, veja (4.3.3), nos dá uma bijeção

$$\rho : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{I}, \quad P \mapsto 2P - I_E$$

entre projeções e involuções com inversa  $S \mapsto \frac{1}{2}(I_E + S)$ . Caracterizamos involuções em termos de subespaços complementares com a composição de bijeções

$$\phi := \rho \circ \psi : \mathcal{SC} \rightarrow \mathcal{I}, \quad (F, G) \mapsto \rho(P_{F,G}) = P_{F,G} - P_{G,F} =: S_{F,G}$$

Todo é compatível no sentido que é comutativa a diagrama das 6 bijeções na Figura 6.1.

**Lema 6.2.2** (Caracterização de involução). *Seja  $S \in \mathcal{L}(E)$ , então*

$$S \text{ involução de } E \Leftrightarrow E = \underbrace{\text{Fix}(S)}_{=:F} \oplus \underbrace{\text{aFix}(S)}_{=:A} \quad \text{“par complementar } (F, A)\text{”}$$

*Além disso uma involução  $S$  é da forma  $S = P_{F,A} - P_{A,F}$ .*

*Demonstração.* “ $\Rightarrow$ ” Cada um elemento  $x \in \text{Fix}(S) \cap \text{aFix}(S)$  é nulo porque  $x = Sx = -x$ . Os elementos  $v \in E$  são da forma  $v = Pv + Qv$  onde  $Pv := \frac{1}{2}(v + Sv)$  e  $Qv := \frac{1}{2}(v - Sv)$ . Mas  $S^2 = I_E$  implica  $S(Pv) = Pv$  e  $S(Qv) = -Qv$ .

“ $\Leftarrow$ ” Como  $E = \text{Fix}(S) \oplus \text{aFix}(S)$  os elementos  $v \in E$  são da forma  $v = f + a$  para únicos elementos  $f \in \text{Fix}(S)$  e  $a \in \text{aFix}(S)$ , veja Teorema 2.3.4. Como  $S$  é linear obtemos

$$S^2v = S(S(f + a)) = S(Sf + Sa) = S(f - a) = Sf - Sa = f + a = v$$

para todos os  $v \in E$ . “ $S = S_{F,A}$ ” Escrevendo  $v \in E$  como  $v = f + a$  obtemos

$$Sv = S(f + a) = Sf + Sa = f - a = P_{F,A}v - P_{A,F}v$$

segundo Definição 6.1.3. □

### Involuções e projeções

**Teorema 6.2.3.** *Seja  $1 + 1 \neq 0$  em  $\mathbb{K}$ . A seguinte aplicação é uma bijeção*

$$\begin{aligned} \rho: \mathcal{P} = \{\text{projeções em } E\} &\rightarrow \{\text{involuções em } E\} = \mathcal{I} \\ P &\mapsto 2P - I_E =: S_P \end{aligned}$$

*com inversa  $\rho^{-1} = \gamma: S \mapsto \frac{1}{2}(I_E + S)$ . As projeções  $\gamma(S)$  e  $\gamma(-S)$ , ou seja*

$$P := \frac{1}{2}(I_E + S), \quad Q := \frac{1}{2}(I_E - S)$$

*satisfazem  $P + Q = I_E$  e  $P - Q = S$ .*

*Demonstração.* Seja  $I = I_E$ . BEM DEFINIDO.  $(2P - I)^2 = 4P^2 - 4P + I = I$ . INJETIVO. Suponha  $2P - I = 2\tilde{P} - I$ , adicione  $-I$  para obter  $2P = 2\tilde{P}$ . Então  $P = \tilde{P}$  segundo Corolário 1.1.20.

SOBREJETIVO. Dado uma involução  $S$  em  $E$ , defina  $P := \gamma(S) = \frac{1}{2}(I + S)$  para obter  $\rho(P) = 2P - I = (I + S) - I = S$ .

INVERSA. Dada uma involução  $S$  em  $E$ , no item anterior vimos que  $S = \rho(\gamma(S))$ . De outro lado  $\gamma(\rho(P)) = \gamma(2P - I) = \frac{1}{2}(I + (2P - I)) = P$ . □

### Involuções e subespaços complementares

**Definição 6.2.4** (Involução/reflexão em torno de  $F$  ao longo  $G$ ). *Seja  $(F, G)$  um par de subespaços complementares de  $E$ , escreva  $v \in E = F \oplus G$  na forma  $v = f + g$  com únicos elementos  $f \in F$  e  $g \in G$ , veja Teorema 2.3.4. A aplicação*

$$S_{F,G} := P_{F,G} - P_{G,F}: E \rightarrow E$$

*é chamada de involução (ou reflexão) de  $E$  em torno de  $F$  ao longo  $G$ .*

Vamos justificar chamar  $S_{F,G}$  de involução em torno de  $F$  ao longo  $G$ :

**Lema 6.2.5.** *A aplicação  $S_{F,G}$  definida acima é uma involução de  $E$ . Os pontos fixos e anti-fixos contém  $F$  e  $G$ , em símbolos*

$$F \subset \text{Fix}(S_{F,G}), \quad G \subset \text{aFix}(S_{F,G}) \quad (6.2.1)$$

Valem igualdades nos casos  $\dim E < \infty$  ou  $1 + 1 \neq 0$  em  $\mathbb{K}$ .

Ter igualdades em (6.2.1) é importante para consistência: como  $S_{F,G}$  e uma involução o Lema 6.2.2 aplica e fala que  $S_{F,G} = S_{\text{Fix}(S_{F,G}), \text{aFix}(S_{F,G})}$ . Então espera-se igualdade dos pares  $(F, G) = (\text{Fix}(S_{F,G}), \text{aFix}(S_{F,G}))$ .

*Demonstração.* Dado  $v \in E$ , então  $\exists! f \in F$  e  $\exists! g \in G$  tal que  $v = f + g$ .

**Linearidade:** É óbvio como  $S_{F,G}$  é soma de dois operadores lineares.

**$S^2 = \mathbf{I}_E$ :** Usamos a definição de  $S := S_{F,G}$  e Lema 6.1.4 para obter

$$\begin{aligned} S^2 v &= S((P_{F,G} - P_{G,F})(f + g)) \\ &= S(f - g) \\ &= (P_{F,G} - P_{G,F})(f - g) \\ &= f - (-g) \\ &= v \end{aligned}$$

**$G = \text{aFix}(S_{F,G})$ :** Como  $\text{aFix}(S_{F,G}) = \text{Fix}(S_{G,F})$  o próximo item aplica.

**$F = \text{Fix}(S_{F,G})$ :** '⊂' Seja  $f \in F$ . Como  $F = \text{Im}(P_{F,G}) = \text{Fix}(P_{F,G})$  e  $F = \text{N}(P_{G,F})$  obtemos  $Sf = P_{F,G}f - P_{G,F}f = f$ .

'⊃' **Caso  $1 + 1 \neq 0$  em  $\mathbb{K}$ :** Escreva  $x \in \text{Fix}(S) \subset E$  unicamente na forma  $x = f + g$  onde  $f \in F$  e  $g \in G$ . Então

$$f + g = x = Sx = P_{F,G}(f + g) - P_{G,F}(f + g) = f - g$$

Assim  $g + g = \mathcal{O}$ . Segundo Corolário 1.1.20 obtemos  $g = \mathcal{O}$ . Então  $x = f \in F$ .

'⊃' **Caso  $\dim E < \infty$ :** Como  $(F, G) \in \mathcal{SC}$  e segundo Lema 6.2.2 ( $S^2 = \mathbf{I}_E$ )

$$F \oplus G = E = \text{Fix}(S) \oplus \text{aFix}(S)$$

Então aplicando a fórmula (6.0.2) a cada uma soma direta nos da as igualdades

$$\dim F + \dim G = \dim E = \dim \text{Fix}(S) + \dim \text{aFix}(S)$$

Como  $0 \leq \dim F \leq \dim \text{Fix}(S)$  e  $0 \leq \dim G \leq \dim \text{aFix}(S)$  segundo Teorema 3.2.1 (c), as dimensões devem ser iguais, ou seja

$$\dim F = \dim \text{Fix}(S), \quad \dim G = \dim \text{aFix}(S)$$

Mas, segundo Teorema 3.2.1 (d), inclusão com a mesma dimensão implica igualdade, assim  $F = \text{Fix}(S)$  e  $G = \text{aFix}(S)$ .  $\square$

**Exercício 6.2.6.** Faça um desenho de  $E = \mathbb{R}^2$  com dois subespaços  $F \neq G$  de dimensão 1. Ilustre para varias escolhas de  $v \in E, F, G$  a imagem  $S_{F,G}v$  usando os vetores (pensa em flechas)  $P_{F,G}v$  e  $-P_{G,F}v$ .

### 6.3 Exercícios

Seja  $E$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$ .

- No plano  $\mathbb{R}^2$ , considere as retas  $F_1$  e  $F_2$ , definidas respectivamente pelas equações  $y = ax$  e  $y = bx$ , onde  $a \neq b$  são números reais.
  - Exprima  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  como soma de um vetor de  $F_1$  e um de  $F_2$ .
  - Seja  $P = P_{F_1, F_2} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  a projeção sobre  $F_1$  paralelamente a  $F_2$ . Obtenha a matriz  $[P]$  de  $P$ .
  - Encontre a matriz  $[S]$  da reflexão  $S = S_{F_2, F_1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , em torno da reta  $F_2$ , paralelamente a  $F_1$ .
- Exprima  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  como soma de um vetor do plano  $F_1$ , cuja equação é  $x + y - z = 0$ , com um vetor da reta  $F_2$ , gerada pelo vetor  $(1, 2, 1)$ . Conclua que  $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$ . Determine a matriz  $[P]$  da projeção  $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que tem imagem  $F_1$  e núcleo  $F_2$ .
- Dado  $P \in \mathcal{L}(E)$ , *prove* ou *desprove*:
  - $E = N(P) \oplus \text{Im}(P) \Rightarrow P$  é projeção de  $E$ .
  - $E = N(P) + \text{Im}(P) \Rightarrow P$  é projeção de  $E$ .
  - $P$  é projeção  $\Leftrightarrow I - P$  é projeção.
  - $P$  é projeção  $\Leftrightarrow N(P) = \text{Im}(I - P)$  ( $\Leftrightarrow N(I - P) = \text{Im}(P)$ ).
- Sejam  $F_1, F_2 \subset E$  subespaços com  $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim E < \infty$ . Prove
 
$$E = F_1 \oplus F_2 \iff F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}.$$
- Sejam  $P_1, \dots, P_n : E \rightarrow E$  operadores lineares tais que
 
$$P_1 + \dots + P_n = I \quad \text{e} \quad \forall i \neq j : P_i P_j = \mathcal{O}.$$
 Prove que estes operadores são projeções.
- Sejam  $P, Q \in \mathcal{L}(E)$  projeções e  $1+1 \neq 0$  em  $\mathbb{K}$ , prove que são equivalentes:
  - $P + Q$  é uma projeção;
  - $PQ + QP = \mathcal{O}$ ;
  - $PQ = QP = \mathcal{O}$ .

[Para provar (b)  $\Rightarrow$  (c), multiplique à esquerda e à direita da hipótese  $PQ = -QP$  por  $P$  e conclua  $\mathcal{O} = PQP$ . Consequentemente  $\mathcal{O} = \mathcal{O}Q = PQQPQ = P(-PQ)Q = -PQ$ .]
- Seja  $E = F_1 \oplus F_2$ . O **gráfico** de uma transformação linear  $B : F_1 \rightarrow F_2$  é o subconjunto  $\text{graph}(B) := \{v + Bv \mid v \in F_1\}$  de  $E$ . Prove que
  - $\text{graph}(B)$  é um subespaço de  $E$ .
  - a projeção  $P = P_{F_1, F_2} : E \rightarrow E$ , restrita a  $\text{graph}(B)$ , define um isomorfismo entre  $\text{graph}(B)$  e  $F_1$ .



## Capítulo 7

# Matrizes de transformações lineares

Consideramos uma transformação linear

$$A : E \rightarrow F$$

entre espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Denotamos o operador identidade de

$$I_E : E \rightarrow E, \quad v \mapsto v$$

e o em  $F$  de  $I_F$ , veja (4.1.2). Agora será muito útil escrever uma base ordenada na forma de uma lista ordenada. Sejam  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  e  $\tilde{\mathcal{U}}$  bases ordenadas de  $E$  e  $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$  e  $\tilde{\mathcal{V}}$  de  $F$ . Nas seguintes seções vamos estabelecer e provar os detalhes da seguinte diagrama comutativa<sup>1</sup>

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\mathbf{a}:=[A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}}} & \mathbb{K}^m \\
 & & \downarrow \mathcal{U} & & \downarrow \mathcal{V} \\
 & & E & \xrightarrow{A} & F \\
 \mathbf{p}:=[I_E]_{\mathcal{U},\tilde{\mathcal{U}}} & \simeq & \downarrow \tilde{\mathcal{U}} & & \downarrow \tilde{\mathcal{V}} & \mathbf{q}:=[I_F]_{\mathcal{V},\tilde{\mathcal{V}}} \\
 & & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{a}}:=[A]_{\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\mathcal{V}}}} & \mathbb{K}^m
 \end{array} \quad (7.0.1)$$

Na diagrama  $\mathbf{p}$  é a chamada **matriz de passagem** da base  $\mathcal{U}$  de  $E$  para  $\tilde{\mathcal{U}}$ . Ela leva, dado  $v \in E$ , o vetor coordenada  $[v]_{\mathcal{U}}$  em respeito à base  $\mathcal{U}$  ao vetor coordenada  $\mathbf{p}[v]_{\mathcal{U}} = [v]_{\tilde{\mathcal{U}}}$  em respeito à base  $\tilde{\mathcal{U}}$ . Além disso  $\mathbf{a}$  é a **matriz da transformação linear**  $A : E \rightarrow F$  em respeito às bases  $\mathcal{U}$  do domínio e  $\mathcal{V}$  do contradomínio.

<sup>1</sup> **Comutatividade** significa que caso entre dois espaços vetoriais no diagrama tem dois caminhos de flechas, então não importa o qual usamos. Note que a flecha de um isomorfismo ' $\simeq$ ' também existe na direção reversa (no diagrama só mostramos uma flecha para simplicidade).

**Comentário 7.0.1** (Interpretação da parte triangular esquerda da diagrama). Sejam  $\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}$ , e  $\mathcal{W}$  bases do espaço vetorial  $E$  da dimensão  $n$ . Sejam

- p**: a matriz de passagem de  $\mathcal{U}$  para  $\tilde{\mathcal{U}}$   
**r**: a matriz de passagem de  $\tilde{\mathcal{U}}$  para  $\mathcal{W}$

Vamos entender nesta seção que sob estas hipóteses vale o seguinte

- rp** é a matriz de passagem de  $\mathcal{U}$  para  $\mathcal{W}$   
**p**<sup>-1</sup> é a matriz de passagem de  $\tilde{\mathcal{U}}$  para  $\mathcal{U}$

## 7.1 Bases induzem isomorfismos

**Definição 7.1.1** (Um símbolo com duas significados). Usamos *o mesmo símbolo* para a base e para o isomorfismo determinado pela: Escrevemos

$$\mathcal{U} : \mathbb{K}^n \rightarrow E, \quad x \mapsto \mathcal{U}x$$

para a transformação linear determinada pela base  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , ou seja

$$\mathcal{U}x := (\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \underbrace{\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n}_{=v} \in E \quad (7.1.1)$$

Obviamente a aplicação  $\mathcal{U} : \mathbb{K}^n \rightarrow E$  é linear. Ela é injetiva como a base  $\mathcal{U}$  é LI (Corolário 3.1.2) e sobrejetiva como  $\mathcal{B}$  gera  $E$ .

Portanto  $\mathcal{U} : \mathbb{K}^n \rightarrow E$  é um isomorfismo (símbolo  $\simeq$ ).

No caso  $E = \mathbb{K}^n$  a base canônica  $\mathcal{E}^n$  produz o operador identidade  $\mathcal{E}^n = I_{\mathbb{K}^n}$ .

Seja  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  uma base ordenada de  $E$ . Dado  $v \in E$ , então  $x := \mathcal{U}^{-1}v \in \mathbb{K}^n$  é o vetor coordenada  $[v]_{\mathcal{U}}$  de  $v$  em respeito à base  $\mathcal{U}$  introduzido em (3.1.2): Com efeito como  $\mathcal{B}$  é base exprime-se  $v$  como CL dos elementos de  $\mathcal{B}$  com coeficientes únicos  $x_i$ , ou seja  $v = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n =: \mathcal{U}x$ . Assim

$$\mathcal{U}^{-1}v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [v]_{\mathcal{U}} \in \mathbb{K}^n \quad (7.1.2)$$

O isomorfismo  $\mathcal{U}^{-1} : E \rightarrow \mathbb{K}^n$  é chamado de **sistema de coordenadas** em  $E$ . No caso de  $E = \mathbb{K}^n$  com base canônica  $\mathcal{U} = \mathcal{E}$  abreviamos  $[v] := [v]_{\mathcal{E}}$ .



## 7.2 A matriz em respeito a uma base

Dado uma transformação linear  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  e bases  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  de  $E$  e  $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$  de  $F$ , então podemos representar os elementos  $A\xi_j \in F$  como combinação linear na base  $\mathcal{V}$  com coeficientes  $a_{ij} \in \mathbb{K}$  únicos. Com efeito

$$\boxed{A\xi_j = \eta_1 a_{1j} + \dots + \eta_m a_{mj}} \quad (7.2.1)$$

Note como pela nossa definição o índice do  $\eta_i$  coincide com o primeiro (mais perto) índice do escalar  $a_{ij}$  o qual deve ser escrito *atrás*.

Os escalares  $a_{ij}$  formam uma matriz  $m \times n$  chamada de **matriz de  $A$**  em respeito às bases  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$ , símbolo

$$[A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} := \mathbf{a} = [a_{ij}] \quad (7.2.2)$$

Note-se que a matriz  $\mathbf{a}$  tem como colunas

$$\mathbf{a}_{\bullet j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = [A\xi_j]_{\mathcal{V}}$$

os vetores coordenadas dos imagens  $A\xi_j$ , ou seja

$$[A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} = [[A\xi_1]_{\mathcal{V}} \dots [A\xi_n]_{\mathcal{V}}] = [\mathbf{a}_{\bullet 1} \dots \mathbf{a}_{\bullet n}] = \mathbf{a}$$

No caso  $E = F$  e  $\mathcal{U} = \mathcal{V}$  abreviamos  $[A]_{\mathcal{U}} := [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{U}}$ . No caso  $E = F = \mathbb{K}^n$  e  $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{E}$  abreviamos  $[A] := [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$ .

**Exercício 7.2.1.** Seja  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$  a base canônica e  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  determinado por

$$\begin{aligned} Ae_1 &= 2e_1 - e_2 - e_3 \\ Ae_2 &= -e_1 + e_2 \\ Ae_3 &= -e_1 \quad + e_3 \end{aligned} \quad (7.2.3)$$

Considere a base ordenada  $\mathcal{V} := (e_1, e_1 + e_3, e_1 + e_2)$  e determine a matriz  $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{V}}$ . (Vamos reencontrar  $A$  nos Exercícios 7.3.10 e 8.4.5.)

**Exercício 7.2.2** (Identidade  $I = I_E$ ). Mostre que a matriz da identidade

$$[I]_{\mathcal{U}} := [I]_{\mathcal{U}, \mathcal{U}} = \mathbb{1} \quad (7.2.4)$$

sempre é a matriz identidade se usamos a mesma base  $\mathcal{U}$  para  $I: E \rightarrow E$ .

**Exercício 7.2.3** (Homotetias  $\alpha I$ ). Seja  $E$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensão  $n < \infty$ . Suponha que  $A \in \mathcal{L}(E)$  não seja um múltiplo do operador identidade:  $A \neq \alpha I$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Mostre que existem bases de  $E$  do tipo  $\mathcal{U} = (u, Au, \dots)$  e  $\mathcal{V} = (v, 2Av, \dots)$  tais que as matrizes  $[A]_{\mathcal{U}}$  e  $[A]_{\mathcal{V}}$  de  $A$  são diferentes.

2. Conclua que as **homotetias** (múltiplos  $\alpha I$  do operador identidade) são os únicos operadores cuja matriz não depende da base escolhida.
3. Conclua que as matrizes do tipo  $\alpha \mathbb{1}_n$  são os únicos que comutam (**ab = ba**) com todas matrizes invertíveis  $n \times n$ .

[ad 1.: Conclua  $n \geq 2$ . Mostre que existe conjunto LI da forma  $X = \{v, Av\}$ . Depois estenda  $X$  para receber uma base  $(\xi_1 = v, \xi_2 = Av, \dots, \xi_n)$  de  $E$ .]

**Exercício 7.2.4.** Suponha que  $E = F \oplus G$  e  $n = \dim E$  é finita. Mostre que existe uma base ordenada  $\mathcal{X}$  de  $E$  tal que

$$[P_{F,G}]_{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_k & \mathcal{O}_{k,\ell} \\ \mathcal{O}_{\ell,k} & \mathcal{O}_{\ell} \end{bmatrix}, \quad [S_{F,G}]_{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_k & \mathcal{O} \\ \mathcal{O} & -\mathbb{1}_{\ell} \end{bmatrix}$$

**Teorema 7.2.5.** Levando transformações lineares às suas matrizes

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_{\mathcal{U},\mathcal{V}} : \mathcal{L}(E, F) &\xrightarrow{\cong} \mathbb{M}(n \times m; \mathbb{K}) \\ A &\mapsto [A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  base de  $E$  e  $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$  de  $F$ .

LINEAR. Escreve (7.2.2) para  $A$ , para  $B$ , e depois adiciona as duas equações e use  $(A+B)\xi_j = A\xi_j + B\xi_j$ .

INJETIVO. Suponha  $(a_{ij}) := [A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} = [B]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} =: (b_{ij})$ . Então  $A$  e  $B$  coincidem

$$A\xi_j = \eta_1 a_{1j} + \dots + \eta_m a_{mj} = \eta_1 b_{1j} + \dots + \eta_m b_{mj} = B\xi_j$$

nos elementos de uma base e linearidade implica que coincidem em todo  $v \in E$ .

SOBREJETIVO. Dado  $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathbb{M}(m \times n; \mathbb{K})$ , para cada um  $j$  defina

$$A\xi_j := \eta_1 a_{1j} + \dots + \eta_m a_{mj}$$

Isso determina  $A$  unicamente (Prop. 4.1.12). Então  $\Psi(A) := [A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} = \mathbf{a}$ .  $\square$

Lembre-se do Exemplo 3.1.22 (c) que  $\dim \mathbb{M}(n \times m; \mathbb{K}) = nm$ . Segundo Corolário 5.3.9 isomorfismos preservam dimensões, assim obtemos  $\dim \mathcal{L}(E, F)$ .

**Corolário 7.2.6.**  $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim \mathbb{M}(n \times m; \mathbb{K}) = nm = \dim E \cdot \dim F$

**Teorema 7.2.7.** Considere duas transformações lineares entre espaços vetoriais

$$E \xrightarrow{A} F \xrightarrow{B} G$$

com bases respectivas  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ , e  $\mathcal{W} = (\nu_1, \dots, \nu_p)$ . Então a matriz da composição

$$[BA]_{\mathcal{U},\mathcal{W}} = [B]_{\mathcal{V},\mathcal{W}} [A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \tag{7.2.5}$$

é o produto das matrizes.

*Demonstração.* Sejam  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  as matrizes de  $A$  e  $B$ , seja  $\mathbf{c}$  aquela de  $BA$ . Assim

$$A\xi_j = \sum_{k=1}^m \eta_k a_{kj}, \quad B\eta_k = \sum_{i=1}^p \nu_i b_{ik}, \quad BA\xi_j = \sum_{i=1}^p \nu_i c_{ij}$$

para  $j = 1, \dots, n$  e  $k = 1, \dots, m$ . Use estas identidades para obter

$$\sum_{i=1}^p \nu_i c_{ij} = B(A\xi_j) = \sum_{k=1}^m (B\eta_k) a_{kj} = \sum_{i=1}^p \nu_i \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj}$$

onde no último passo temos permutado a ordem das somas *finitas*. Mas como a base  $\mathcal{W}$  é LI os coeficientes dos  $\nu_i$  devem ser iguais (Corolário 3.1.2).  $\square$

## Matrizes – propriedades herdadas de $\Phi: \mathcal{L} \rightarrow \mathbf{M}$

### 7.3 Mudança de base – diagrama comutativa

Nesta seção estudamos na diagrama (7.0.1) o que acontece a) com um vetor coordenada  $[v]_{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^{-1}v$  se trocamos a base  $\mathcal{U}$  de  $E$  para uma outra base  $\tilde{\mathcal{U}}$  e b) com a matriz de uma transformação linear onde adicionalmente permitimos trocar a base de  $F$ .

#### 7.3.1 Vetor coordenada

A matriz  $\mathbf{p} := [I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}$  do operador identidade, por definição (7.2.1), satisfaz

$$\xi_j = I_E \xi_j = \tilde{\xi}_1 p_{1j} + \dots + \tilde{\xi}_n p_{nj} \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.3.1)$$

Nas outras palavras ela exprime os elementos da *base velha*  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  de  $E$  como combinação linear dos elementos da *base nova*  $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n)$  de  $E$ . Por isso  $\mathbf{p}$  é chamado de **matriz de passagem de  $\mathcal{U}$  para  $\tilde{\mathcal{U}}$** . A matriz de passagem participa do diagrama (7.0.1) fazendo as partes triangulares comutativo (7.0.1).

**Lema 7.3.1.**  $\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{p} = \mathcal{U}$  na diagrama (7.0.1), equivalentemente  $[I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}} = \tilde{\mathcal{U}}^{-1}\mathcal{U}$ .

*Demonstração.* Para  $x \in \mathbb{K}^n$  vale

$$\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{p}x = \left( \tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n \right) \begin{bmatrix} \sum_k p_{1k} x_k \\ \vdots \\ \sum_k p_{nk} x_k \end{bmatrix} = \sum_{\ell} \tilde{\xi}_{\ell} \sum_k p_{\ell k} x_k = \sum_k \underbrace{\left( \sum_{\ell} \tilde{\xi}_{\ell} p_{\ell k} \right)}_{\stackrel{(7.3.1)}{=} \xi_k} x_k = \mathcal{U}x$$

$\square$

**Corolário 7.3.2.** Toda matriz de passagem é um isomorfismo e sua inversa é

$$[I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}^{-1} = [I_E]_{\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{U}} = \mathcal{U}^{-1}\tilde{\mathcal{U}}$$

*Demonstração.* Aplicando  $\tilde{U}^{-1}$  em ambos os lados de  $\tilde{U}\mathbf{p} = \mathcal{U}$  obtém-se  $\tilde{U}^{-1}\mathcal{U} = \mathbf{p} := [I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}$ . Assim  $\mathbf{p}$  é um isomorfismo como  $\mathcal{U}$  e  $\tilde{\mathcal{U}}$  são. Toma as inversas em ambos lados e use (4.1.1) para obter  $[I_E]_{\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{U}}^{-1} = \mathbf{p}^{-1} = \mathcal{U}^{-1}\tilde{U} = [I_E]_{\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{U}}$ .  $\square$

**Comentário 7.3.3** (Trocando a base (o sistema de coordenadas)). Seja  $v \in E$ . Dado o vetor coordenada  $[v]_{\mathcal{U}}$  em respeito a uma base  $\mathcal{U}$  de  $E$ . Para calcular as coordenadas em respeito a uma outra base  $\tilde{\mathcal{U}}$  simplesmente aplique a matriz de passagem  $\mathbf{p} = [I]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}$ , ou seja

$$[I]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}} [v]_{\mathcal{U}} = [v]_{\tilde{\mathcal{U}}}$$

**Exercício 7.3.4.** Considere as bases  $\mathcal{U} = (\xi, \eta)$  e  $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$  de  $\mathbb{R}^2$  onde

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\xi} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\eta} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Seja  $v = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ . Determine os vetores coordenadas  $[v]_{\mathcal{U}}$  e  $[v]_{\tilde{\mathcal{U}}}$ .<sup>2</sup>

### 7.3.2 Matriz de uma transformação linear

**Lema 7.3.5.**  $A\mathcal{U} = \mathcal{V}\mathbf{a}$  na diagrama (7.0.1).

*Demonstração.* Seja  $x \in \mathbb{K}^n$ , então

$$\begin{aligned} A\mathcal{U}x &= A(\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n) \\ &= \underbrace{(A\xi_1)}_{\eta_1 a_{11} + \dots + \eta_m a_{m1}} x_1 + \dots + \underbrace{(A\xi_n)}_{\eta_1 a_{1n} + \dots + \eta_m a_{mn}} x_n \\ &= \sum_{j=1}^m (\eta_j a_{j1}) x_1 + \dots + \sum_{j=1}^m (\eta_j a_{jm}) x_n \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} A\mathcal{U}x &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (\eta_j a_{jk}) x_k = \sum_{j=1}^m \eta_j \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k}_{\mathbf{a}_{j\bullet} x} \\ &= \eta_1 \mathbf{a}_{1\bullet} x + \dots + \eta_m \mathbf{a}_{m\bullet} x = (\eta_1, \dots, \eta_m) \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\bullet} x \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\bullet} x \end{bmatrix} = \mathcal{V}\mathbf{a}x \end{aligned}$$

$\square$

<sup>2</sup> Controle:  $[v]_{\tilde{\mathcal{U}}} = [I]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}} [v]_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{\tilde{\mathcal{U}}}$ ,  $\tilde{U} = [I]_{\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{U}}$

Segundo as Lemas 7.3.5 e 7.3.1 o diagrama (7.0.1) é comutativo, e assim recebemos a relação

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{qap}^{-1}$$

entre as matrizes de  $A$  em respeito às bases novas e velhas.

No caso  $F = E$  munido das bases  $\mathcal{V} = \mathcal{U}$  e  $\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{\mathcal{U}}$  recebemos

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{pap}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{a}} = [A]_{\tilde{\mathcal{U}}}, \quad \mathbf{a} = [A]_{\mathcal{U}}$$

**Definição 7.3.6.** Chama-se **semelhante** duas matrizes quadradas  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  se existe uma matriz invertível  $\mathbf{p}$  tal que  $\mathbf{a} = \mathbf{p}^{-1}\mathbf{bp}$ .

**Exercício 7.3.7.** Mostre que se  $\mathbf{a}$  e  $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{p}^{-1}\mathbf{ap}$  são matrizes  $n \times n$  semelhantes, então existe  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\mathbf{a}$  e  $\tilde{\mathbf{a}}$  são matrizes de  $A$  relativamente a duas bases de  $\mathbb{R}^n$ .

**Caso especial  $E = F = \mathbb{K}^n$  com a base canônica  $\mathcal{E}$  e uma base  $\mathcal{U}$**

Considere o caso de um operador linear  $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  onde  $\mathbb{K}^n$  é munido originalmente da base canônica  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  e depois de uma base nova  $\mathcal{U}$ . Neste caso o diagrama (7.0.1) torna-se no diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\mathbf{a} := [A]} & \mathbb{K}^n \\
 \downarrow \mathcal{E} = I_{\mathbb{K}^n} & \searrow \mathcal{E} = I_{\mathbb{K}^n} & \swarrow \mathcal{E} = I_{\mathbb{K}^n} \\
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^n \\
 \uparrow \mathcal{U} & \swarrow \mathcal{U} & \downarrow \mathcal{U} \\
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{a}} := [A]_{\mathcal{U}}} & \mathbb{K}^n
 \end{array}
 \quad (7.3.2)$$

o qual disponibiliza a relação  $[A]_{\mathcal{U}} = \mathbf{p}[A]\mathbf{p}^{-1}$  entre as matrizes de  $A$  quando trocar a base canônica por qualquer outra base.

**Exercício 7.3.8.** Suponha que  $E = \mathbb{K}^n$  munido da base canônica  $\mathcal{E}$  como base velha, veja diagrama (7.3.2). Então os membros da base nova  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  formam as colunas da matriz inversa  $\mathbf{p}^{-1}$ . Veja Exercício 7.4.6.

Nas outras palavras, como a inversa de  $\mathbf{p} := [I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{E}, \mathcal{U}}$  é  $[I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{U}, \mathcal{E}}$ , vale a seguinte fórmula

$$\boxed{[I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{U}, \mathcal{E}} = [\mathcal{U}]}$$

onde  $[\mathcal{U}]$  denota a matriz cujas colunas são os elementos da base  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{K}^n$ .

**Exemplo 7.3.9.** Em  $\mathbb{R}^3$  considere a base canônica  $\mathcal{E}$  e a base  $\mathcal{V} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$

$$\xi_1 = (1, 1, 0), \quad \xi_2 = (-1, 0, 0), \quad \xi_3 = (0, 0, 1)$$

Determine a matriz de passagem  $\mathbf{p}$  de  $\mathcal{V}$  para  $\mathcal{E}$ , e aquela vice versa.

**Uma solução.** As colunas da matriz  $\mathbf{p} := [I]_{\mathcal{V}, \mathcal{E}} = [\mathcal{V}]$  são os  $\xi_i$ 's. A outra matriz desejada  $\mathbf{q} := [I]_{\mathcal{E}, \mathcal{V}} = \mathbf{p}^{-1}$  é a matriz inversa de  $\mathbf{p}$ . Pode-se calcular com o processo de Gauss-Jordan (MA141), veja § 8.3, ou seja

$$[\mathbf{p} : \mathbb{1}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\text{oe})} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbb{1} : \mathbf{p}^{-1}]$$

**Exercício 7.3.10.** Seja  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$  a base canônica e seja  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  determinado por (7.2.3). Dada a base ordenada  $\mathcal{V} := (e_1, e_1 + e_3, e_1 + e_2)$ , determine a matriz

$$\mathbf{a} = [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{V}} = [I]_{\mathcal{E}, \mathcal{V}} [A]_{\mathcal{V}, \mathcal{E}} [I]_{\mathcal{E}, \mathcal{V}} = \mathbf{p} \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{p}$$

calculando  $\mathbf{p}$  e  $\tilde{\mathbf{a}}$ , veja (7.0.1).<sup>3</sup> (Reencontramos  $A$  nos Exercícios 7.2.1 e 8.4.5.)

## 7.4 Exercícios e umas soluções

### Matriz de uma transformação linear

**Exercício 7.4.1.** Considere a base ordenada  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  de  $\mathbb{R}^3$ , onde

$$u = (1, 1, 1), \quad v = (1, -1, 1), \quad w = (1, 1, -1)$$

Seja  $\mathcal{B}^* = (\phi, \psi, \chi)$  a base (de  $\mathbb{R}^{3*}$ ) dual de  $\mathcal{B}$ . Calcule as matrizes  $[\phi], [\psi], [\chi]$  das transformações lineares  $\phi, \psi, \chi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Uma solução.** Sejam  $\mathcal{E}^3 = (e_1, e_2, e_3)$  e  $\mathcal{E}^1 = (E_1)$  as bases canônicas onde o vetor unitário em  $\mathbb{R}^1$  é a lista  $E_1 = (1)$  de um membro com 1 no 1-ésimo lugar (e nulos nos outros lugares – as quais não têm). Seja  $x_i := \phi e_i$ , então usando a propriedade da base dual e linearidade obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \phi u = \phi(1, 1, 1) = \phi e_1 + \phi e_2 + \phi e_3 = x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 &= \phi v = \phi(1, -1, 1) = \phi e_1 - \phi e_2 + \phi e_3 = x_1 - x_2 + x_3 \\ 0 &= \phi w = \phi(1, 1, -1) = \phi e_1 + \phi e_2 - \phi e_3 = x_1 + x_2 - x_3 \end{aligned}$$

Usamos escalonamento para resolver o SL de 3 equações nas 3 incógnitas  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$  as quais são listas de um membro só. O resultado é

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

Observamos que

$$\begin{aligned} 1 &= x_1 = \phi e_1 = E_1 \phi_{11} = 1 \cdot \phi_{11} = \phi_{11} \\ 0 &= x_2 = \phi e_2 = E_1 \phi_{12} = 1 \cdot \phi_{12} = \phi_{12} \\ 0 &= x_3 = \phi e_3 = E_1 \phi_{13} = 1 \cdot \phi_{13} = \phi_{13} \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup> controle: inverta  $\mathbf{q} = [I]_{\mathcal{V}, \mathcal{E}}$  (Gauss-Jordan):  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

e assim

$$[\phi]_{\mathcal{E}^3, \mathcal{E}^1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Analogamente obtemos

$$[\psi]_{\mathcal{E}^3, \mathcal{E}^1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\chi]_{\mathcal{E}^3, \mathcal{E}^1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Olha só, no caso  $E = \mathbb{R}^n$  a matriz da base dual de qualquer base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  tem em respeito às bases canônicas de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^1$  a forma da base canônica.

**Exercício 7.4.2.** Considere as transformações lineares

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, x + y)$$

e  $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido assim

$$B(x, y, z) = (ax + (a - 1)y + (1 - a)z, -bx + (1 - b)y + bz)$$

onde  $a, b \in \mathbb{R}$  são constantes. Determine o operador  $BA \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ .

[Dica: Use as matrizes  $[A]$  e  $[B]$  que correspondem a  $A$  e  $B$  respectivamente.]

**Uma solução.** Denotamos de  $\mathcal{E}^2 = \{e_1, e_2\}$  e  $\mathcal{E}^3 = \{E_1, E_2, E_3\}$  as bases canônicas. As duas colunas da matriz  $[A] \in M(3 \times 2)$  são formadas das coeficientes seguintes

$$\begin{aligned} Ae_1 &= A(1, 0) = (1, 0, 1) = 1E_1 + 0E_2 + 1E_3 \\ Ae_2 &= A(0, 1) = (0, 1, 1) = 0E_1 + 1E_2 + 1E_3 \end{aligned}$$

As três colunas da matriz  $[B] \in M(2 \times 3)$  são formadas das coeficientes seguintes

$$\begin{aligned} BE_1 &= B(1, 0, 0) = (a, -b) = ae_1 - be_2 \\ BE_2 &= B(0, 1, 0) = (a - 1, 1 - b) = (a - 1)e_1 + (1 - b)e_2 \\ BE_3 &= B(0, 0, 1) = (1 - a, b) = (1 - a)e_1 + be_2 \end{aligned}$$

Assim recebemos

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} a & a - 1 & 1 - a \\ -b & 1 - b & b \end{bmatrix}$$

Use (7.2.5) no primeiro passo e no segundo calcule produto matriz para obter

$$[BA] = [B][A] = \begin{bmatrix} a + 1 - a & a - 1 + 1 - a \\ -b + b & 1 - b + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1}_2$$

Use a relação (7.2.1) entre matriz e operador para concluir que  $BA = I_{\mathbb{R}^2}$ .

**Exercício 7.4.3.** Qual é a matriz  $[A]$  do operador  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido por

$$A(2, 3) = (2, 3) \quad \text{e} \quad A(-3, 2) = (0, 0) ?$$

**Exercício 7.4.4.** Considere as transformações lineares

$$A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}), \quad (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n,$$

e

$$B : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad p = p(x) \mapsto (p(0), p(1), \dots, p(n)).$$

Determina a matriz  $[BA]$  da composição  $BA : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Uma solução.** Seja  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_{n+1})$  a base canônica e seja

$$\mathcal{M} = (x^0, x, x^2, \dots, x^n) =: (\eta_1, \dots, \eta_{n+1}), \quad x^0 := 1$$

a base de  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  composto de monômios. Segundo a definição de  $A$  recebemos

$$Ae_i = A(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = 0x^0 + \dots + 0x^{i-1} + 1x^i + 0x^{i+1} + \dots + 0x^n$$

para  $i = 1, \dots, n+1$ . Segundo (7.2.1) obtemos  $[A]_{\mathcal{E}, \mathcal{M}} = \mathbb{1}_{n+1}$ . Analogamente

$$B\eta_i = (\eta_i(0), \eta_i(1), \dots, \eta_i(n)) = (0^{i-1}, 1^{i-1}, \dots, n^{i-1}) = \sum_{j=1}^{n+1} e_j \underbrace{(j-1)^{i-1}}_{b_{ji}}$$

para cada  $i = 1, \dots, n+1$  o que nos dá a  $i$ -ésima coluna da matriz

$$[B]_{\mathcal{M}, \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0^0 & 0^1 & \dots & 0^n \\ 1^0 & 1^1 & \dots & 1^n \\ 2^0 & 2^1 & \dots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ n^0 & n^1 & \dots & n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & n & \dots & n^n \end{bmatrix}$$

Assim  $[B]_{\mathcal{M}, \mathcal{E}} = [B]_{\mathcal{M}, \mathcal{E}} \mathbb{1}_{n+1} = [B]_{\mathcal{M}, \mathcal{E}} [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{M}} = [BA]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$  segundo (7.2.5).

**Exercício 7.4.5.** Dado  $w = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ , determine a matriz  $[A]$  do operador<sup>4</sup>

$$A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto v \times w$$

Descreva geometricamente o núcleo desse operador e determina sua imagem.

## Mudança de base – vetor

## Mudança de base – matriz

**Exercício 7.4.6.** Seja  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$  a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Suponha vetores  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$  e escalares  $p_{ij} \in \mathbb{R}$  satisfazem

$$e_j = \xi_1 p_{1j} + \xi_2 p_{2j} + \dots + \xi_n p_{nj}, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Mostre que

<sup>4</sup> O **produto vetorial** de dois vetores  $v$  e  $w$  de  $\mathbb{R}^3$  é o vetor  $v \times w$  de  $\mathbb{R}^3$  definido por

$$v \times w = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} y\gamma - z\beta \\ z\alpha - x\gamma \\ x\beta - y\alpha \end{bmatrix}$$



1. a lista ordenada  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  é uma base de  $\mathbb{R}^n$ .
2. a matriz  $\mathbf{p} = [p_{ij}]$  é a inversa da matriz  $\mathbf{q}$  cujas colunas são por definição  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , em símbolos  $\mathbf{q}\mathbf{p} = \mathbb{1}_n$ . Veja Exercício 7.3.8.

Em palavras, obtém-se a matriz  $\mathbf{p} := [I_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{E}, \mathcal{U}}$  de mudança da base canônica  $\mathcal{E}$  para uma base nova  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  como a matriz inversa da matriz

$$\mathbf{q} := [\xi_1 \dots \xi_n]$$

cujas colunas são os  $\xi_i$ 's, em símbolos

$$\mathbf{p} := [I_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{E}, (\xi_1, \dots, \xi_n)} = \mathbf{q}^{-1} = [\xi_1 \dots \xi_n]^{-1}$$

**Exercício 7.4.7.**

Seja  $\mathbf{c} \in M(n \times n; \mathbb{K})$  uma matriz quadrada de posto 1.

- (a) Prove que:  $\mathbf{c}^2 = (\text{tr } \mathbf{c})\mathbf{c}$ . (\*)
- (b) Dado  $n \geq 2$ , generalize:  $\mathbf{c}^n = (\text{tr } \mathbf{c})^{n-1}\mathbf{c}$ .

Poderia usar (e provar) o

**Lema 7.4.8.** Para matrizes  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M(n \times n; \mathbb{K})$  tem-se  $\text{tr}(\mathbf{ab}) = \text{tr}(\mathbf{ba})$ .

[ad (a): Observe que para provar (\*) pode-se mudar a base de  $\mathbb{K}^n$  e provar (\*) para a nova matriz  $\tilde{\mathbf{c}}$ . Lembre-se:  $\text{posto}(\mathbf{c}) = 1$ . Escolha base apropriada de  $\mathbb{K}^n$ .]

**Exercício 7.4.9.** Sejam  $A : E \rightarrow F$  e  $B : F \rightarrow G$  transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita.

1. Prove que:  $B$  injetiva  $\Rightarrow \text{posto}(BA) = \text{posto}(A)$ .
2. Encontre uma condição sobre  $A$  a qual implica  $\text{posto}(BA) = \text{posto}(B)$ .



# Capítulo 8

## Eliminação e aplicações

Agora revisamos do curso MA141 aplicações do processo de escalonar uma matriz  $\mathbf{a}$ . Recomendamos recapitular os detalhes deste processo da Seção 1.2.4.

### 8.1 Dimensão do subespaço gerado

Consideramos  $m$  vetores  $v_1, \dots, v_m$  do espaço vetorial  $\mathbb{K}^n$ . (No caso geral de um espaço vetorial  $E$  de dimensão  $n$  use uma base para chegar em  $\mathbb{K}^n \simeq E$ .) Escreve as  $m$  listas  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{K}^n$  como linhas de uma matriz  $m \times n$ , ou seja

$$\mathbf{a} = (a_{ij}) := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow v_1 \\ \vdots \\ \leftarrow v_m \end{array}$$

Escalonamento da matriz  $\mathbf{a}$ , veja Seção 1.2.4, lida à matriz escalonada  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$ . Enumere as linhas não-nulas de  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$  de cima para baixo, dizemos  $\ell_1, \dots, \ell_d$ .

The diagram shows a matrix  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$  in row echelon form. The matrix is enclosed in large square brackets. The first row has a pivot element  $*_1$  in the first column, followed by some elements, and a crossed-out element  $*$  in the third column. The second row has a pivot element  $*_2$  in the second column, followed by some elements, and a crossed-out element  $*$  in the third column. The third row has a pivot element  $*_d$  in the  $d$ -th column, followed by some elements, and a crossed-out element  $*$  in the  $d$ -th column. The first row of the matrix is circled. To the right of the matrix, the rows are labeled  $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_d$ .

Figura 8.1: Linhas não-nulas  $\ell_1, \dots, \ell_d$  da matriz escalonada  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$

É fácil checar que estas linhas formam um conjunto LI, com efeito

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2 + \dots + \alpha_d \ell_d = \begin{bmatrix} \alpha_1 *_1 \\ \alpha_1 *_1 + \alpha_2 *_2 \\ \vdots \\ \dots \alpha_{d-1} *_d + \alpha_d *_d \end{bmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow \alpha_1 = 0 \\ \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \Rightarrow \alpha_d = 0 \end{array}$$

Então  $\{\ell_1, \dots, \ell_d\}$  é uma base do  $\text{Esp-lin}(\mathbf{a}_{\text{esc}})$ , qual ígual a  $\text{Esp-lin}(\mathbf{a})$  porque operações elementares não mudam o espaço linha, veja Teorema 1.2.18. Então

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \text{Esp-lin}(\mathbf{a}) = \text{Esp-lin}(\mathbf{a}_{\text{esc}}) \subset \mathbb{K}^n$$

é um subespaço com base as linhas não-nulas  $\{\ell_1, \dots, \ell_d\}$  da matriz  $\mathbf{a}_{\text{esc}}$ .

## 8.2 Cálculo do posto

**Lema 8.2.1.** *Dado uma transformação linear  $A: E \rightarrow F$  entre espaços vectoriais das dimensões finitas  $n$  e  $m$ , respectivamente, então*

$$\underbrace{\text{posto}(A)}_{:= \dim \text{Im}(A)} = \underbrace{\text{posto}(\mathbf{a})}_{:= \dim \text{Im}(\mathbf{a})}, \quad \mathbf{a} := [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$$

para qualquer escolha de bases ordenadas  $\mathcal{U}$  de  $E$  e  $\mathcal{V}$  de  $F$ . Repetimos que vale  $\text{posto}(\mathbf{a}) = \text{pc}(\mathbf{a}) = \text{pl}(\mathbf{a})$  segundo Teorema 4.2.2.

*Demonstração.* Temos que

$$\text{posto}(A) := \dim \text{Im}(A) = \dim \text{Im}([A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}) = \dim \text{Im}(\mathbf{a}) =: \text{posto}(\mathbf{a})$$

onde a primeira identidade segue do isomorfismo entre as imagens das transformações lineares  $A$  e  $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$ , veja a diagrama comutativa (7.0.1).  $\square$

**Exemplo 8.2.2.** Dado  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , determine  $\text{posto}(A)$  e uma base de  $\text{Im}(A)$ .

**Uma solução.** Escolhe bases e considere a matriz  $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$  de  $A$ . Aplique escalonamento para a transposta  $\mathbf{a}^t$ , então as linhas não-nulas de  $(\mathbf{a}^t)_{\text{esc}}$ , dizemos  $\ell_1, \dots, \ell_d$ , formam uma base de

$$\text{Esp-lin}((\mathbf{a}^t)_{\text{esc}}) \stackrel{\text{Teor. 1.2.18}}{=} \text{Esp-lin}(\mathbf{a}^t) = \text{Esp-col}(\mathbf{a}) \stackrel{(4.2.3)}{=} \text{Im}(\mathbf{a})$$

e o  $\text{posto}(A) \stackrel{\text{Le. 8.2.1}}{=} \text{posto}(\mathbf{a}) := \dim \text{Im}(\mathbf{a}) = d$  é dado pelo número  $d$  das linhas não-nulas do escalonamento da transposta  $\mathbf{a}^t$ . Resta traduzir a base  $\{\ell_1, \dots, \ell_d\}$  de  $\text{Im}(\mathbf{a}) \subset \mathbb{K}^m$  numa base de  $\text{Im}(A) \subset F$ . Usamos o isomorfismo  $\mathcal{V}: \mathbb{K}^m \rightarrow F$  gerado pela base ordenada  $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$  de  $F$ . Definimos

$$\zeta_i := \mathcal{V}\ell_i \stackrel{\text{def.}}{=} (\eta_1, \dots, \eta_m) \begin{bmatrix} (\ell_i)_1 \\ \vdots \\ (\ell_i)_m \end{bmatrix} \stackrel{\text{def.}}{=} \eta_1(\ell_i)_1 + \dots + \eta_m(\ell_i)_m \in F$$

para obter uma base  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_d\}$  de  $\text{Im}(A)$ .

**Exercício 8.2.3.** Encontre o posto de  $\mathbf{a} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  e uma base da imagem.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Obtém-se posto 2 e uma base é  $\{(1, 1, 1), (0, 1, 2)\}$ . Com efeito, um escalonamento é

$$(\mathbf{a}^t)_{\text{esc}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 8.3 Cálculo da matriz inversa – Gauss-Jordan

**Proposição 8.3.1.** *Caso uma matriz  $n \times n$  (quadrada)  $\mathbf{a}$  admite uma inversa, encontra-se a inversa assim: Considere a matriz  $[\mathbf{a} : \mathbb{1}]$  obtida por escrever a matriz identidade  $\mathbb{1} = \mathbb{1}_n$  à direita de  $\mathbf{a}$ . Aplique as três operações elementares (oe1 – oe3), veja Definição 1.2.17, até a matriz modificada tem a forma  $[\mathbb{1} : \mathbf{b}]$  para uma matriz  $\mathbf{b}$ . Neste caso  $\mathbf{b} = \mathbf{a}^{-1}$  é a inversa buscada.*

$$[\mathbf{a} : \mathbb{1}] \xrightarrow{\text{(oe)}} \dots \xrightarrow{\text{(oe)}} [\mathbb{1} : \underbrace{\mathbf{b}}_{\mathbf{a}^{-1}}]$$

**Dica:** *É aconselhável produzir como passo intermediário uma matriz da forma  $[\mathbf{t} : \mathbf{c}]$  onde  $\mathbf{t}$  é uma matriz triangular superior e depois elimina todas as entradas acima da diagonal para chegar em  $[\mathbb{1} : \mathbf{b}]$ .*

*Ideia de demonstração.* (Veja por exemplo Artin “Álgebra” (1991), p.17.)

As operações elementares podem ser escrito como matrizes invertíveis  $\mathbf{e}$ . O resultado de uma operação elementar numa matriz  $\mathbf{a}$  então é a matriz  $\mathbf{ea}$ . Assim reduzir  $\mathbf{a}$  para a matriz identidade  $\mathbb{1}$  traduz num produto matriz  $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_k \mathbf{a} = \mathbb{1}$ . Aplicando  $\mathbf{a}^{-1}$  da direita obtemos  $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_k \mathbb{1} = \mathbf{a}^{-1}$ . Esta identidade diz que aplicando as mesmas operações elementares na mesma ordem à matriz identidade  $\mathbb{1}$  obtém-se a matriz inversa  $\mathbf{a}^{-1}$ .  $\square$

Antes de começar o processo descrito na Proposição 8.3.1 deve saber que a matriz é invertível. Nas dimensões 2 e 3 a ferramenta mais útil para checar é o determinante.

**Definição 8.3.2.** Nas dimensões 1, 2, 3 define-se  $\det[a_{11}] = a_{11}$  e

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \overbrace{a_{11}a_{22}}^{\text{diagonal}} - \overbrace{a_{21}a_{12}}^{\text{anti-diagonal}}$$

e

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \overbrace{a_{11}a_{22}a_{33}}^{\text{diagonal}} - \overbrace{a_{31}a_{22}a_{13}}^{\text{anti-diagonal}} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Note como o primeiro índice dos  $a_{ij}$ 's embaixo do produto da diagonal / anti-diagonal fica constante e o segundo índice muda ciclicamente.

**Teorema 8.3.3.** *Seja  $\mathbf{a}$  uma matriz  $n \times n$  (quadrada), então*

$$\det \mathbf{a} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} \text{ invertível } (\mathbf{a}^{-1} \text{ existe})$$

**Exercício 8.3.4.** Determine a inversa da matriz  $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  caso existisse.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>  $\det \mathbf{a} = 1 \neq 0$  então  $\mathbf{a}^{-1}$  existe, resultado  $\mathbf{a}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

## 8.4 Resolução de sistemas lineares

Sistemas lineares foram introduzido em Definição 1.2.21 e tratado em Exemplo 5.0.8. Estes conteúdos são pressupostos. Seja  $\mathbf{a}$  uma matriz  $m \times n$  com entradas num corpo  $\mathbb{K}$  e  $b \in \mathbb{K}^m$  uma lista. Lembre-se de (1.2.5) que a equação  $\mathbf{a}x = b$  é chamado de sistema linear de  $m$  equações a  $n$  incógnitas  $(x_1, \dots, x_n) = x$ .

Existência de uma solução  $x$  é equivalente ao fato que a lista  $b$  é localizada na imagem da matriz  $\mathbf{a}$ , em símbolos

$$\mathbf{a}x = b \text{ tem solução } x \Leftrightarrow b \in \text{Im}(\mathbf{a}) \Leftrightarrow p := \text{posto}(\mathbf{a}) = \text{posto}[\mathbf{a} : b]$$

veja Exemplo 5.0.8. Mas neste caso tem como saber quantas soluções?

**Lema 8.4.1.** *Suponha que  $\mathbf{a}x = b$  admite uma solução  $x_0$  ( $b \in \text{Im}(\mathbf{a})$ ). Então*

- a)  $p = n$  ( $\mathbf{a} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  é injetivo)  $\Rightarrow$  a solução é única  $p := \text{posto}(\mathbf{a})$   
 b)  $p < n \Leftrightarrow$  o número de soluções é infinito

No caso b) o conjunto das soluções  $x$  de  $\mathbf{a}x = b$  é dado pela translação do núcleo

$$x_0 + \text{N}(\mathbf{a}) = \{\text{soluções } x \text{ de } \mathbf{a}x = b\}$$

e  $\dim \text{N}(\mathbf{a}) = n - p \geq 1$ .

*Demonstração.* Como a dimensão  $p$  da imagem  $\text{Im}(\mathbf{a}) \subset \mathbb{K}^m$  é no máximo a dimensão  $n$  do domínio, segundo Corolário 5.0.6, temos que  $p \leq \max\{n, m\}$ .

a) Segundo o Teorema 5.4.1 de núcleo e imagem  $n = p$  ( $\dim \mathbb{K}^n = \dim \text{Im}(\mathbf{a})$ ) é equivalente a  $\text{N}(\mathbf{a}) = \{\mathcal{O}\}$  o que, segundo Lema 5.0.4, significa que  $\mathbf{a} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  é injetivo. Por isso  $\mathbf{a} : \mathbb{K}^n \rightarrow \text{Im}(\mathbf{a})$  é um isomorfismo, e assim  $b \in \text{Im}(\mathbf{a})$  corresponde a exatamente um elemento  $x \in \mathbb{K}^n$  tal que  $\mathbf{a}x = b$ .

b) Seja  $\nu \in \text{N}(\mathbf{a})$ , então  $x := x_0 + \nu$  satisfaz  $\mathbf{a}x = \mathbf{a}x_0 + \mathbf{a}\nu = b$ .  $\square$

**Lema 8.4.2.** *Uma lista  $x$  é solução do sistema linear  $[\mathbf{a} : b]$  se e somente se  $x$  é solução do sistema linear associado à matriz escalonada  $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}}$ .*

*Ideia de demonstração.* (Veja por exemplo Artin “Álgebra” (1991), p. 13.)

As operações elementares podem ser escrito como matrizes invertíveis  $\mathbf{e}$ . O resultado de uma operação elementar numa matriz  $\mathbf{a}$  então é a matriz  $\mathbf{e}\mathbf{a}$ . Assim  $\mathbf{a}_{\text{esc}} = \mathbf{p}\mathbf{a}$  onde  $\mathbf{p}$  é da forma  $\mathbf{p} := \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_k$ . Além disso  $\mathbf{e}[\mathbf{a} : b] = [\mathbf{e}\mathbf{a} : \mathbf{e}b]$ , então  $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}} = [\mathbf{p}\mathbf{a} : \mathbf{p}b]$ . ‘ $\Rightarrow$ ’ Se  $\mathbf{a}x = b$ , então  $\mathbf{p}\mathbf{a}x = \mathbf{p}b$ . ‘ $\Leftarrow$ ’ Use  $\mathbf{p}^{-1}$ .  $\square$

**Comentário 8.4.3.** Para resolver o SL  $\mathbf{a}x = b$

- escalone a matriz aumentada  $[\mathbf{a} : b]$
- obtendo uma matriz escalonada  $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}} =: [\tilde{\mathbf{a}} : \tilde{b}]$
- resolve o SL  $\tilde{\mathbf{a}}x = \tilde{b}$  “de baixo para cima”, veja Exemplo 1.2.24
- uma lista  $x$  é solução de  $\tilde{\mathbf{a}}x = \tilde{b}$  se e somente se  $x$  é solução de  $\mathbf{a}x = b$

**Exemplo 8.4.4.** Determine uma base do núcleo da transformação linear

$$A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z, 2x + 4y, 3x + 6y + 3z)$$

**Uma solução.** Para obter uma matriz de  $A$  escolhamos as bases mais simples, a base canônica  $\mathcal{E}^3$ . Obtemos

$$\mathbf{a} := [A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Escalonamos a matriz

$$[\mathbf{a} : \mathcal{O}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\text{oe})} \dots \xrightarrow{(\text{oe})} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_{\text{esc}} : \mathcal{O}]$$

Agora resolvemos o sistema escalonado  $\mathbf{a}_{\text{esc}}x = \mathcal{O}$ , ou seja

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 & \Rightarrow \alpha = -2\beta, \beta \in \mathbb{R} \\ -2\gamma = 0 & \Rightarrow \gamma = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Então  $N(\mathbf{a}) = \mathbb{R}\xi$  onde  $\xi = (-2, 1, 0)$  e  $\mathcal{B} := \{\xi\}$  é uma base.

**Exemplo 8.4.5.** Seja  $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^3$  a base canônica e  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  determinado por

$$\begin{aligned} Ae_1 &= 2e_1 - e_2 - e_3 \\ Ae_2 &= -e_1 + e_2 \\ Ae_3 &= -e_1 + e_3 \end{aligned}$$

Determine os subespaços  $N(A)$ ,  $\text{Im}(A)$ , as dimensões, e uma base de cada um. (Tenhamos encontrado  $A$  antes nos Exercícios 7.2.1 e 7.3.10.)

**Uma solução.** A definição de  $A$  já mostra que a matriz é dada por

$$\mathbf{a} := [A] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Como  $\mathcal{E}$  corresponde ao isomorfismo identidade, veja (7.0.1) com  $\mathcal{U} = \mathcal{E}$ , e usando (4.2.2) obtemos passos 1 e 2 de

$$\text{Im}(A) = \text{Im}(\mathbf{a}) = \text{Esp-col}(\mathbf{a}) = \text{Esp-lin}(\mathbf{a}^t)$$

Escalonamos

$$\mathbf{a}^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\text{oe})} \dots \xrightarrow{(\text{oe})} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{matrix}$$

Então as listas  $\{\ell_1, \ell_3\}$  formam uma base da imagem e assim  $\dim \text{Im}(A) = 2$ .

- Em respeito ao núcleo de  $A = \mathbf{a}$  escalonamos o SL  $\mathbf{a}x = 0$ , ou seja

$$[\mathbf{a} : \mathcal{O}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(\text{oe})} \dots \xrightarrow{(\text{oe})} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolvemos o SL escalonado de baixo para cima, ou seja

$$\begin{cases} 2x - y - z = 0 & \Rightarrow x = z, z \in \mathbb{R} \\ y - z = 0 & \Rightarrow y = z, z \in \mathbb{R} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Assim  $N(A) = \mathbb{R}\xi$  onde  $\xi = (1, 1, 1)$ . Então  $\{\xi\}$  é uma base e a dimensão é 1.

## 8.5 Exercícios e umas soluções

1. Determine o posto da matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

[Dica: Calcule o posto-linha da matriz transposta. Escalonamento (modificando linhas) não muda o espaço-linha.]

2. Calcule a dimensão do subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^5$  gerado pelos vetores

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 1, -1, 1) & v_2 &= (1, -1, -1, 0, 1) \\ v_3 &= (0, 1, 1, -1, -1) & v_4 &= (-1, 1, 1, -1, 1) \end{aligned}$$

Decida se o vetor  $b = (6, 18, 1, -9, 8)$  pertence ou não a este subespaço.

3. Obtenha uma base para o subespaço  $F$  de  $\mathbb{R}^4$  gerado pelo conjunto

$$\{(1, 2, 3, 4), (3, 4, 7, 10), (2, 1, 3, 5)\}.$$

[Dica: Use os vetores como as linhas de uma matriz. Escalonamento.]  
Determine a dimensão de  $F$ .

4. Encontre uma base para o núcleo da transformação linear

$$\begin{aligned} C : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\mapsto (2x + y - z + 3t, x - 4y + 2z + t, 2y + 4z - t) \end{aligned}$$

[Dica: Calcule a matriz de  $C$ . Escalonamento. Resolva o sistema linear homogêneo resultante.]



5. Use escalonamento para resolver o sistema linear

$$\begin{aligned}x + 3y + z &= 1 \\2x + 6y + 9z &= 7 \\2x + 8y + 8z &= 6\end{aligned}$$

nas incógnitas  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

6. Decida quais das matrizes possuem inversa e calcule quando existir:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$



# Aula 21



- § 4.1.3 esp. dual  $E^*$
- § 10.1.1 prod. interno e  $E^*$
- Cap. 11 Adjunta
- § 11.1 (excs. adjunta)



## Capítulo 9

# Subespaços invariantes

Durante o Capítulo 3 denotamos de  $A \in \mathcal{L}(E)$  uma transformação linear, alternativamente chamado de operador linear

$$A: E \rightarrow E, \quad E = (E, +, \cdot, \mathbb{K})$$

num espaço vetorial sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e de dimensão finita  $n = \dim E$ .

**Motivação.** A matriz  $[A]_{\mathcal{B}}$  de  $A$  depende da base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Assim chega naturalmente o desejo de escolher uma base  $\mathcal{X}$  tal que a matriz toma uma forma simples, por exemplo uma forma diagonal

$$[A]_{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} =: \text{diag} [\lambda_1, \dots, \lambda_n] \quad (9.0.1)$$

Tal simplificação máxima, para uma diagonal, é realmente possível para uma classe de operadores muito especiais e importante – os operadores auto-adjuntos as quais pode-se definir na presença de mais uma estrutura no espaço vetorial  $E$  – um chamado produto interno, veja Capítulo 10.

**Definição 9.0.1.** Um subespaço  $F \subset E$  é chamado de **invariante por  $A$**  se a imagem  $AF \subset F$  é contido no subespaço. Neste caso o operador linear  $A|_F: F \rightarrow F, f \mapsto Af$ , é chamado de **restrição de  $A$** .

**Exemplo 9.0.2.**

- a)  $F = \{\mathcal{O}\}$  e  $F = E$  (os subespaços invariantes triviais)
- b)  $F = \text{N}(A), \text{Im}(A), \text{Fix}(A), \text{aFix}(A)$  (subespaços invariantes canônicos de  $A$ )

**Lema 9.0.3** (Dimensão 1). *Para subespaços invariantes com  $\dim F = 1$  vale*

$$F \text{ invariante por } A \Leftrightarrow \exists \lambda = \lambda(A) \in \mathbb{K}: Af = \lambda f \forall f \in F$$

**Lema 9.0.4** (Dimensão 2). Para subconjuntos  $\{u, v\} \subset E$  LI vale

$$F := \langle u, v \rangle \text{ invariante por } A \Leftrightarrow Au, Av \in \langle u, v \rangle$$

Em palavras, subconjuntos  $\{u, v\}$  LI geram subespaços invariantes se e somente se as imagens  $Au$  e  $Av$  são CLs de  $u$  e  $v$ .

**Definição 9.0.5** (autovalor, autovetores, espectro). Seja  $A \in \mathcal{L}(E)$ .

a) Por definição chama-se um vetor não-nulo

$$v \in E \setminus \{\mathcal{O}\} \text{ autovetor de } A \quad :\Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}: Av = \lambda v$$

em palavras, se a imagem  $Av$  é um múltiplo de  $v$ . Neste caso o escalar  $\lambda$  é chamado de **autovalor de  $A$**  e  $v = v_\lambda$  um autovetor associado a  $\lambda$ .

b) O **espectro de  $A$**  é o conjunto composto de

$$\{\text{todos os autovalores de } A\} =: \text{spec } A$$

**Observação 9.0.6.** Achar autovetores é equivalente a achar subespaços invariantes de dimensão 1.

**Exercício 9.0.7** (Autovetores não são únicas).

- Os múltiplos não-nulos de um autovetor são autovetores .
- Somas de autovetores associados ao mesmo autovalor  $\lambda$  são autovetores.

**Definição 9.0.8** (Autosubespaço e multiplicidade geométrica). Seja  $A \in \mathcal{L}(E)$ .

a) Dado um autovalor  $\lambda$  de  $A$ , então o conjunto

$$E_\lambda := \{\text{todos os autovetores de } A \text{ associado a } \lambda\} \cup \{\mathcal{O}\}$$

é um subespaço de  $E$  chamado de **autosubespaço** associado ao autovalor  $\lambda$ . Note que  $E_\lambda \neq \{\mathcal{O}\}$ .

b) A **multiplicidade geométrica** de um autovalor  $\lambda$  é a dimensão

$$g_\lambda := \dim E_\lambda$$

do autosubespaço.

**Exercício 9.0.9.** Um operador não injetivo  $A$  tem 0 como autovalor e o núcleo

$$N(A) = E_0$$

é o autosubespaço do autovalor 0.

**Exemplo 9.0.10** (Rotações, reflexões, cisalhamento).



**Teorema 9.0.11** (Autovetores associado a autovalores diferentes são LI).  
 Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  são autovalores dois-a-dois diferentes, então qualquer escolha  $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  de autovetores associados forma um conjunto LI.

**Corolário 9.0.12.**  $n := \dim E \Rightarrow |\text{spec } A| \leq n$

**Corolário 9.0.13.** Suponha que  $A \in \mathcal{L}(E)$  possui  $n = \dim E \in \mathbb{N}$  autovalores dois-a-dois diferentes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , então obtém-se uma matriz diagonal

$$[A]_{\mathcal{X}} = \text{diag} [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$$

veja (9.0.1), para qualquer seleção  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de autovetores associados.

**Exercício 9.0.14.** Seja  $A \in \mathcal{L}(E)$  e  $\lambda \in \text{spec } A$ , então vale:

- a)  $E_\lambda = N(A - \lambda I_E)$
- b)  $\lambda \in \text{spec } A \Leftrightarrow A - \lambda I_E$  não admite inversa
- c)  $E_\lambda$  é subespaço invariante por  $A$
- d)  $\forall \xi \in E_\lambda \setminus \{\mathcal{O}\}$ : o subespaço  $\langle \xi \rangle$  é invariante por  $A$
- e) Um subespaço 1-dimensional invariante por  $A$  é composto de autovetores.

**Exercício 9.0.15.** Seja  $\mathcal{U} = \{\xi_1, \xi_2\} \subset E$  LI e  $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ , então o conjunto

$$\{a\xi_1 + b\xi_2, c\xi_1 + d\xi_2\} \text{ é LD} \quad \Leftrightarrow \quad ad - bc = 0$$

- A) Polinômio característico - autovalores
- B) Traço e determinante
- C) Matrizes reais diagonalizáveis

## Parte III

# Estruturas adicionais e operadores especiais



# Aula 18



# Capítulo 10

## Produto interno

Neste Capítulo 10 consideramos exclusivamente sub/espços vetoriais **reais**

$$F \subset E = (E, +, \cdot, \mathbb{R})$$

o que quer dizer que o corpo neste capítulo são os números reais. As letras  $k, n \in \mathbb{N}_0$  denotam números naturais, no caso de dimensão finita elas denotam as dimensões de  $F$  e  $E$ . Além disso a letra

$$E = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

denota um espaço vetorial munido de um produto interno.

### 10.1 Produto interno, norma, distância

**Definição 10.1.1** (Produto interno). Um **produto interno**<sup>1</sup> num espaço vetorial real  $G$  é uma função de duas variáveis

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: G \times G \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$$

a qual satisfaz os três axiomas

- (SIM)  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$  (simetria)
- (BL)  $\langle u + \tilde{u}, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle \tilde{u}, v \rangle, \quad \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$  (bi-linearidade)<sup>2</sup>
- (POS)  $u \neq \mathcal{O} \Rightarrow \langle u, u \rangle > 0$  (positividade)

para todos os vetores  $u, v, \tilde{u}, \tilde{v} \in G$  e escalares  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Neste caso  $E$  é chamado de **espaço vetorial com produto interno**.

<sup>1</sup> Produtos internos são também chamados de **produtos escalares**.

<sup>2</sup> Note que simetria implica linearidade também na segunda variável, por isso o nome para o axioma dois, abreviando bi-linearidade, é justificado.

**Lema 10.1.2.** Num espaço vetorial  $E$  com produto interno vale

$$\begin{aligned} \langle v, \mathcal{O} \rangle &= 0 \quad \forall v \in E \\ \text{(ND)} \quad \langle u, v \rangle &= \langle \tilde{u}, v \rangle \quad \forall v \in E \quad \Rightarrow \quad u = \tilde{u} && \text{(não-degenerado)} \\ \text{(ND)'} \quad \langle u, v \rangle &= 0 \quad \forall v \in E \quad \Rightarrow \quad u = \mathcal{O} && \text{(não-degenerado)'} \end{aligned}$$

**Exemplo 10.1.3** (Produto euclidiano em  $\mathbb{R}^n$ ). A função

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_0: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = [x_1 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

é chamado de **produto euclidiano** em  $\mathbb{R}^n$ . O leitor pode verificar os 3 axiomas. Caso não especificamos diferentemente o  $\mathbb{R}^n$  sempre será munido do produto euclidiano.

**Exemplo 10.1.4** (Produto interno mediante integração). No espaço vetorial  $C^0([a, b])$  das funções reais contínuas num intervalo  $[a, b]$  integração

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (10.1.1)$$

define um produto interno. Deixamos ao leitor verificar os 3 axiomas.

**Exemplo 10.1.5** (Integração **não** dando produto interno). No espaço vetorial  $C^0(\mathbb{R})$  das funções reais contínuas no  $\mathbb{R}$  inteiro, integração, nem sobre  $\mathbb{R}$ , nem sobre um intervalo  $[a, b]$ ,

$$\langle f, g \rangle_\infty := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx, \quad \langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x) dx$$

define um produto interno em  $C^0(\mathbb{R})$ , não.

O problema no primeiro caso são valores infinitos, por exemplo  $\langle 2, 3 \rangle_\infty = \infty$ .

O problema no segundo caso é o axioma (POS). Seja  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua a qual anula-se em  $[a, b]$ , mas não no complemento inteiro. Por exemplo, suponha  $u(b+1) = 1$ . Assim  $u \neq \mathcal{O}$  não é a função nula, mas a integral  $\langle u, u \rangle = \int_a^b u(x)^2 dx = 0$  não é positivo.

**Exemplo 10.1.6** (Polinômios em  $\mathbb{R}$  e integração sobre  $[a, b]$ ). Em contraste ao espaço  $C^0(\mathbb{R})$ , no espaço vetorial dos polinômios  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  integração sobre  $[a, b]$  produz um produto interno! Deixamos ao leitor mostrar que (10.1.1) realmente satisfaz o axioma (POS).

[Dica: Em quantos pontos um polinômio de grau  $n$  pode-se anular no máximo?]



**Normas – norma induzida**

**Definição 10.1.7.** Uma **norma** num espaço vetorial real  $X$  é uma função

$$|\cdot| : X \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto |x|$$

a qual satisfaz os três axiomas

- (HOM)  $|\alpha x| = \alpha |x|$  (homogeneidade)  $\Rightarrow |\mathcal{O}| = 0$   
 ( $\Delta$ )  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (desigualdade triangular)  
 (POS)  $x \neq \mathcal{O} \Rightarrow |x| > 0$  (positividade)

para todos os vetores  $x, y \in X$  e escalares  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Neste caso  $X$  é chamado de **espaço vetorial normado**.

**Definição 10.1.8** (Norma induzida). Num espaço vetorial  $E$  com produto interno existe para cada um vetor  $v$  um número não-negativo

$$|v| = |v|_{\langle \cdot, \cdot \rangle} := \sqrt{\langle v, v \rangle} \geq 0$$

chamado de **norma induzida** de  $v$ , ou informalmente o “comprimento” do vetor. Um vetor de comprimento  $|v| = 1$  é chamado de **vetor unitário** e às vezes denotado de  $\hat{v}$  para ênfase.

**Lema 10.1.9.** Num espaço vetorial  $E$  com produto interno a norma induzida é uma norma. Além disso para todo vetor não-nulo  $u := \frac{1}{|u|}u$  é um vetor unitário.

**Métricas – métrica induzida**

**Definição 10.1.10.** Uma **métrica**<sup>3</sup> num conjunto  $M$  é uma função

$$d: M \times M \rightarrow [0, \infty) \\ (q, p) \mapsto d(q, p)$$

a qual satisfaz os três axiomas

- (SIM)  $d(q, p) = d(p, q)$  (simetria)  
 ( $\Delta$ )  $d(q, r) \leq d(q, p) + d(p, r)$  (desigualdade triangular)  
 (POS)  $d(q, q) = 0$  mas  $q \neq p \Rightarrow d(q, p) > 0$  (positividade)

para todos os pontos  $q, p \in M$ . Neste caso  $M$  é chamado de **espaço métrico**.

**Definição 10.1.11** (Métrica induzida). Num espaço vetorial normado a função

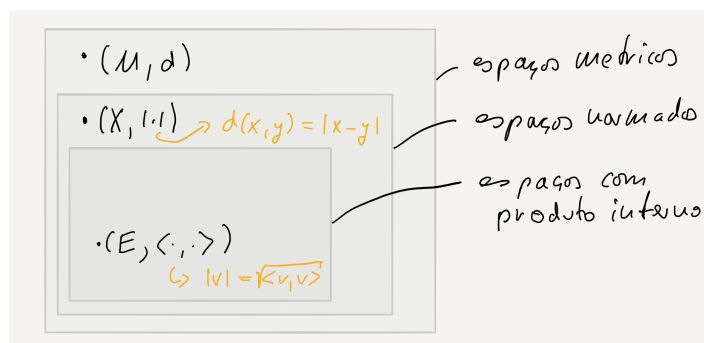
$$d(x, y) = d_{|\cdot|}(x, y) := |x - y|$$

é chamado de **métrica induzida** ou **distância** entre dois pontos.

**Lema 10.1.12.** A métrica induzida  $d(x, y) := |x - y|$  é uma métrica.

Então produtos internos disponibilizam normas e normas disponibilizam distâncias. As inclusões são ilustrados na Figura 10.1.

<sup>3</sup> Métricas são também chamadas de **funções distância** ou simplesmente **distâncias**.

Figura 10.1: Produto interno  $\rightarrow$  norma  $\rightarrow$  função distância

### 10.1.1 Produto interno e espaço dual – dualidade

Um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  num espaço vetorial  $E$  com  $\dim E = n$  finita disponibiliza um isomorfismo canônico<sup>4</sup> entre  $E$  e seu espaço dual

$$\begin{aligned} D: E &\rightarrow E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ v &\mapsto \langle v, \cdot \rangle \end{aligned} \quad (10.1.2)$$

chamado de **dualidade** e onde  $\langle v, \cdot \rangle$  é a transformação linear abreviada de

$$v^* := \langle v, \cdot \rangle: E \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \langle v, u \rangle$$

**Teorema 10.1.13** (Dualidade). *O operador  $D$  em (10.1.2) é um isomorfismo.*

*Demonstração.* Linearidade de (10.1.2) vale segundo o axioma (BL) de bilinearidade. Injetividade vale segundo o axioma (POS) na sua incarnação (ND)'. Sobrejetividade é equivalente a injetividade segundo Corolário 5.4.2 porque as dimensões  $\dim E = n = \dim E^*$  são iguais segundo Lema 4.1.20.  $\square$

**Exercício 10.1.14** (Produto interno induzido no espaço dual). Mostre que

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_* := \langle D^{-1} \cdot, D^{-1} \cdot \rangle: E^* \times E^* \rightarrow \mathbb{R}$$

é um produto interno no espaço dual de  $E$ .

**Exercício 10.1.15.** Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e seja  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  uma base de  $E$ . Dado números  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , prove que existe um único vetor  $w \in E$  tal que

$$\langle w, \xi_1 \rangle = \alpha_1, \dots, \langle w, \xi_n \rangle = \alpha_n.$$

<sup>4</sup> **Canônico** significa sem a necessidade de fazer escolhas das quais o objeto construído eventualmente vai depender. Por exemplo, se  $\dim E = \dim G$ , então  $E$  e  $F$  são isomorfos segundo Corolário 5.3.9, mas não tem um isomorfismo canônico geralmente. E de um isomorfismo com muita escolha geralmente não pode extrair informações intrínsecas.

As afirmações continuam em Lema 10.1.16.

[Dica: Proposição 4.1.12 diz que uma transformação linear  $\psi: E \rightarrow \mathbb{R}$  é determinada por seus valores numa base, dizemos  $\psi\xi_i := \alpha_i$ . Defina  $w := D^{-1}\psi$ .]

**Lema 10.1.16** (Continuando Exercício 10.1.16). *Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e seja  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  uma base de  $E$ . Prove que existe uma única base  $\mathcal{V} = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$  de  $E$  tal que*

$$\langle \eta_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n$$

Defina  $a_{ij} := \langle \xi_i, \xi_j \rangle$  e  $b_{ij} := \langle \eta_i, \eta_j \rangle$ , onde  $i, j = 1, \dots, n$ . Prove que as matrizes  $\mathbf{a} = (a_{ij})$  e  $\mathbf{b} = (b_{ij})$  são inversas uma da outra.

*Demonstração.* Dado uma base  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  de  $E$ , seja  $\mathcal{B}^* = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  a base dual (4.1.5) de  $E^*$ . Isomorfismos levam base em base (Teorema 5.3.7), assim  $\mathcal{V} := D^{-1}\mathcal{B}^*$  é uma base de  $E$ . Para os elementos  $\eta_i := D^{-1}\phi_i$  de  $\mathcal{V}$  vale

$$\langle \eta_i, \xi_j \rangle = \langle D^{-1}\phi_i, \xi_j \rangle \stackrel{(10.1.2)}{=} (D(D^{-1}\phi_i)) \xi_j = \phi_i \xi_j \stackrel{(4.1.5)}{=} \delta_{ij}$$

Segundo Teorema 7.2.5  $I_E = D^{-1}D$  traduz em  $[I_E]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = [D^{-1}D]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ . Assim

$$\mathbb{1} \stackrel{(7.2.4)}{=} [I_E]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = [D^{-1}D]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} \stackrel{(7.2.5)}{=} [D^{-1}]_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}} [D]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}^*} = \mathbf{ba}$$

onde resta provar a última identidade. (Como as matrizes são quadradas  $\mathbb{1} = \mathbf{ba}$  é equivalente a  $\mathbb{1} = \mathbf{ab}$ .) Mais detalhado, resta provar que

$$\mathbf{c} := [D^{-1}]_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}} = \mathbf{b} := (\langle \eta_i, \eta_j \rangle) \quad , \quad \mathbf{d} := [D]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}^*} = \mathbf{a} := (\langle \xi_i, \xi_j \rangle)$$

Começamos com a definição de

$$\begin{aligned} b_{ji} &:= \langle \eta_j, \eta_i \rangle \\ &= \langle \eta_i, \eta_j \rangle \\ &= \langle D^{-1}\phi_i, \eta_j \rangle \\ &= (D(D^{-1}\phi_i)) \eta_j \\ &= \phi_i \eta_j \\ &= \phi_i (D^{-1}\phi_j) \\ &\stackrel{*}{=} \phi_i (\xi_1 c_{1i} + \dots + \xi_n c_{ni}) \\ &= \phi_j \xi_j c_{ji} \\ &= c_{ji} \end{aligned}$$

onde  $*$  vale por definição (7.2.1) da matriz  $[D^{-1}]_{\mathcal{B}^*, \mathcal{B}} =: (c_{ij})$ . Deixamos ao leitor provar similarmente  $a_{ji} = d_{ji}$ .  $\square$

### 10.1.2 Produto interno e matrizes

Seja  $G$  um espaço vetorial de dimensão finita  $n$ . Uma vez fixado uma base ordenada  $\mathcal{B}$  de  $G$ , tem uma aplicação

$$\Phi = \Phi_{\mathcal{B}}: S^+(n) \rightarrow \{\text{produtos internos em } G\}$$

entre os conjuntos  $S^+(n)$  das matrizes reais  $n \times n$  simétricas **positivas**<sup>5</sup> e dos produtos internos em  $G$ .

De outro lado, tem uma aplicação

$$\Phi = \Phi_{\mathcal{B}}: \{\text{bases ordenadas de } G\} \rightarrow \{\text{produtos internos em } G\}$$

entre os conjuntos das bases ordenadas de  $G$  e dos produtos internos em  $G$ .

#### A matriz de um produto interno

**Definição 10.1.17** (Matrizes do produto interno). Dado uma base ordenada  $\mathcal{B} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  de  $E$ , calcule todos os números reais

$$g_{ij} := \langle \xi_i, \xi_j \rangle$$

e coloque numa matriz quadrada denotada, dependente do contexto, de

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}} := (g_{ij})_{i,j=1}^n \in M(n \times n)$$

Esta matriz é chamada de **matriz do produto interno** em respeito à base  $\mathcal{B}$ . Deixe nos simplificar também a notação dos vetores coordenadas

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \in M(n \times 1)$$

dos vetores  $u \in E$  em respeito a  $\mathcal{B}$ , veja (7.1.2).

**Comentário 10.1.18.** Note que  $\mathbf{g}_{\mathcal{B}}$  é uma matriz real simétrica positiva. Usando a base  $\mathcal{B}$  e os vetores coordenadas  $\mathbf{u}_{\mathcal{B}}$  pode-se escrever o produto interno em  $E$  como produto matriz ou como produto euclidiano

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^n u_i g_{ij} v_j = \underbrace{\mathbf{u}^t}_{1 \times n} \underbrace{\mathbf{g}}_{n \times n} \underbrace{\mathbf{v}}_{n \times 1} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{g}\mathbf{v} \rangle_0 =: \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbf{g}} \quad (10.1.3)$$

para os vetores  $u, v$  de  $E$ .

<sup>5</sup> Uma matriz real quadrada  $\mathbf{g}$  é chamada de **matriz positiva** se

$$\sum_{i,j=1}^n g_{ij} u_i u_j > 0$$

para todas as listas não nulas  $u \in \mathbb{R}^n$ .

**Exemplo 10.1.19.** Nos polinômios reais de grau menor ou igual um

$$\mathcal{P}_1(\mathbb{R}) := \{p(x) = a_0 + a_1x \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$$

considere a base ordenada  $\mathcal{B} = (\xi_1, \xi_2) = (3, 1 + x)$ . Integração

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$$

da um produto interno em  $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$  cuja matriz em respeito a  $\mathcal{B}$  tem entradas

$$g_{11} := \langle \xi_1, \xi_1 \rangle = \int_{-1}^1 3 \cdot 3 dx = 9x \Big|_{-1}^1 = 18$$

$$g_{22} := \langle \xi_2, \xi_2 \rangle = \int_{-1}^1 (1+x) \cdot (1+x) dx = (x + x^2 + x^3/3) \Big|_{-1}^1 = 8/3$$

$$g_{12} := \langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \int_{-1}^1 3(1+x) dx = (3x + 3x^2/2) \Big|_{-1}^1 = 6$$

$$g_{21} := \langle \xi_2, \xi_1 \rangle \stackrel{(\text{SIM})}{=} \langle \xi_1, \xi_2 \rangle = g_{12} = 6$$

**Exercício 10.1.20** (Continuamos Exemplo 10.1.19). Determine a distância

$$d(\xi_1, \xi_2) := \|\xi_1 - \xi_2\| := \sqrt{\langle \xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_2 \rangle}$$

dos dois membros da base de  $E = \mathcal{P}_1$ .

**Uma solução em  $E$ .** Inserindo na fórmula obtemos para o quadrado

$$d(\xi_1, \xi_2)^2 = \int_{-1}^1 \underbrace{(3 - (1+x))^2}_{4+4x+x^2} dx = (4x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3) \Big|_{x=-1}^1 = \frac{26}{3}$$

**Outra solução em coordenadas.** A matriz  $[g]_{\mathcal{B}}$  já conhecemos, calculamos

$$[\xi_1 - \xi_2]_{\mathcal{B}} = [\xi_1]_{\mathcal{B}} - [\xi_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Com isso, usando (10.1.3) no primeiro passo, obtemos

$$\begin{aligned} d(\xi_1, \xi_2)^2 &= \langle [\xi_1 - \xi_2]_{\mathcal{B}}, [g]_{\mathcal{B}} [\xi_1 - \xi_2]_{\mathcal{B}} \rangle_0 \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 8/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle_0 \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 10/3 \end{bmatrix} \right\rangle_0 \\ &= \frac{26}{3} \end{aligned}$$

### O produto interno de uma base ordenada

**Proposição 10.1.21** (Existência de produtos internos). *Um espaço vetorial real  $G$  de dimensão finita  $n$  admite um produto interno – um produto interno  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{B}}$  para cada uma base ordenada  $\mathcal{B}$ .*

*Demonstração.* Dado uma base ordenada  $\mathcal{B} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  de  $G$ , defina

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{B}} := \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_0 \quad (10.1.4)$$

para  $u, v \in G$  onde  $\mathbf{u} = [u]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor coordenada, veja (7.1.2).  $\square$

**Exercício 10.1.22.** Seja  $G = \mathbb{R}^n$ . Mostre que o produto interno associado à base canônica  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_0$  reproduz o produto euclidiano no  $\mathbb{R}^n$ .

## 10.2 Ortogonalidade

**Definição 10.2.1.** Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno.

- (i) Chama-se dois vetores  $u$  e  $v$  **ortogonais**, ou **perpendiculares**, símbolo  $u \perp v$ , se tem produto nulo  $\langle u, v \rangle = 0$ . (Note  $\mathcal{O} \perp v$  para todos vetores.)
- (ii) Chama-se  $X \subset E$  um **subconjunto ortogonal** se os vetores de  $X$  são dois-a-dois ortogonais.
- (iii) Chama-se  $X \subset E$  um **subconjunto ortonormal (ON)** se  $X$  é composto de vetores unitários dois-a-dois ortogonais.
- (iv) Uma base  $\mathcal{Z} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  é chamado de **base ortonormal (ON)** se

$$\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases} \quad (10.2.1)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o símbolo de Kronecker.

**Teorema 10.2.2** (Conjuntos ortogonais, sem  $\mathcal{O}$ , são LI).

$$X \subset E \setminus \{\mathcal{O}\} \text{ conjunto ortogonal} \Rightarrow X \text{ LI}$$

**Exercício 10.2.3.** Dado uma base ON  $\mathcal{Z} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  de  $E$ , mostre que

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \varepsilon_i \quad \Leftrightarrow \quad v_i = \langle \varepsilon_i, v \rangle, \quad i = 1, \dots, n$$

para cada um vetor  $v \in E$ .

**Exercício 10.2.4.** Seja  $\mathcal{B}$  uma base ordenada de um espaço vetorial real  $G$  de dimensão finita  $n$ . Seja  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{B}}$  o produto interno correspondente (10.1.4). Mostre que  $\mathcal{B}$  é uma base ON de  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{B}}$ .

**Exemplo 10.2.5** (Conjuntos e bases ortogonais).

- a) A base canônica  $\mathcal{E}^n$  é ortonormal em respeito a  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ .
- b) O conjunto  $\{(0, 0), (-1, 1)\}$  é ortogonal em  $\mathbb{R}^2$ .
- c) O conjunto  $\{(1, 1), (-1, 1)\}$  é uma base ortogonal de  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 10.2.6** (Teorema de Pitágoras generalizado). *Sejam  $u, v \in E$ , então*

$$u \perp v \quad \Leftrightarrow \quad |u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2$$

**Exemplo 10.2.7.** Para vetores não-nulos  $u, v \in \mathbb{R}^2$  ter produto nulo

$$0 = \langle u, v \rangle_0 = |u| \cdot |v| \cdot \cos \angle(u, v)$$

é equivalente que o ângulo entre eles é retângulo, ou seja  $\angle(u, v) \in \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ .

### 10.2.1 Projecção ortogonal sobre uma reta

**Definição 10.2.8** (Projecção ortogonal sobre uma reta  $\mathbb{R}\hat{u}$ ). Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno. Para  $u \in E$  não-nulo, seja  $\hat{u} = \frac{1}{|u|}u$  o vetor unitário correspondente, definimos a transformação linear

$$\begin{aligned} \text{pr}_u: E &\rightarrow E \\ v &\mapsto \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \langle \hat{u}, v \rangle \hat{u} =: \text{pr}_{\hat{u}} v \end{aligned}$$

**Comentário 10.2.9** (Idempotente - projecção).

- a)  $\text{pr}_u(\alpha u) \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha \frac{\langle u, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u = \alpha u \quad \Rightarrow \quad \text{pr}_u|_{\mathbb{R}u} = I_{\mathbb{R}u}$
- b)  $(\text{pr}_u)^2 v = \underbrace{\text{pr}_u}_{I \text{ em } \mathbb{R}u} \underbrace{\text{pr}_u v}_{\in \mathbb{R}u} = \text{pr}_u v$  e assim  $\text{pr}_u$  é uma projecção em  $E$ .

**Lema 10.2.10** (Projecções não aumentam comprimento).  $|\text{pr}_u v| \leq |v| \quad \forall v \in E$

*Demonstração.* □

## 10.3 Ângulos e comprimentos em $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$

**Comentário 10.3.1.** Para  $u = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  vale

$$\text{dist}(u, \mathcal{O}) \stackrel{\text{Pit.}}{=} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\langle u, u \rangle_0} =: |u|_0$$

**Lema 10.3.2.** Para  $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathcal{O}\}$  vale  $\langle u, v \rangle_0 = |u|_0 \cdot |v|_0 \cdot \cos \angle(u, v)$ .

**Comentário 10.3.3.** São equivalentes

$$\langle u, v \rangle_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos \theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta \in \{\pi/2, 3\pi/2\} \quad \Leftrightarrow \quad u \perp v$$

## 10.4 Desigualdades

**Proposição 10.4.1** (Desigualdade de Schwarz). *Para vetores  $u, v \in E$  vale*

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u| \cdot |v|$$

*onde igualdade “=” é equivalente a um de  $u, v$  é múltiplo do outro.*

**Proposição 10.4.2** (Desigualdade triangular). *Para vetores  $u, v \in E$  vale*

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

*onde igualdade “=” é equivalente a um de  $u, v$  é múltiplo não-negativo do outro.*



# Aula 19



## 10.5 Ortonormalização segundo Gram-Schmidt

**Hipótese.** Seja  $\mathcal{X} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  uma base ordenada de um espaço vetorial  $E$  com produto interno. Denotamos de

$$F_1 := \langle \xi_1 \rangle \subset \dots \subset \boxed{F_k := \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle} \subset \dots \subset F_n := \langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle = E$$

os subespaços gerados pelos primeiros  $1, 2, \dots, n$  membros da base  $\mathcal{X}$ .

**Passo 1.** Vamos construir iterativamente bases ortogonais

- (1) base ortogonal  $\{\eta_1\}$  de  $F_1$ : escolha  $\eta_1 := \xi_1$  e já pronto  
 (k) dado  $k \geq 1$  suponha que  $\{\eta_1, \dots, \eta_k\}$  é base ortogonal de  $F_k$  e defina

$$\eta_{k+1} := \xi_{k+1} - \sum_{i=1}^k \text{pr}_{\eta_i} \xi_{k+1} = \xi_{k+1} - \sum_{i=1}^k \frac{\langle \eta_i, \xi_{k+1} \rangle}{\langle \eta_i, \eta_i \rangle} \eta_i \quad (10.5.1)$$

(k + 1) então  $\{\eta_1, \dots, \eta_k, \eta_{k+1}\}$  é uma base ortogonal de  $F_{k+1}$

o processo usa o último membro  $\xi_n$  de  $\mathcal{X}$  quando  $k = n - 1 \Rightarrow k + 1 = n$

(n) ao fim obtemos a base ortogonal  $\{\eta_1, \dots, \eta_k, \eta_{k+1}, \dots, \eta_n\}$  de  $F_n = E$

**Demonstração (k)  $\Rightarrow$  (k + 1).** Suponha (k) e defina  $\eta_{k+1}$ , então

- a)  $\eta_{k+1} \perp \eta_1, \dots, \eta_k$   $\langle \eta_{k+1}, \eta_j \rangle \stackrel{(k)}{=} \langle \xi_{k+1}, \eta_j \rangle - \langle \xi_{k+1}, \eta_j \rangle = 0$   
 b)  $\eta_{k+1} \notin F_k \stackrel{(k)}{=} \langle \eta_1, \dots, \eta_k \rangle \ni \mathcal{O}$  suponha por absurdo  $\eta_{k+1} \in \langle \eta_1, \dots, \eta_k \rangle$   
 $\Rightarrow \xi_{k+1} \in \langle \eta_1, \dots, \eta_k \rangle = F_k := \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle$  contradição  
 c)  $\eta_{k+1} \in F_{k+1}$   $\eta_{k+1} \in \langle \eta_1, \dots, \eta_k, \xi_{k+1} \rangle \stackrel{(k)}{=} \langle \xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1} \rangle =: F_{k+1}$

Segundo hipótese (k) o conjunto  $\{\eta_1, \dots, \eta_k\}$  é LI. Além disso  $\eta_{k+1}$  é não-nulo segundo b) e ortogonal a  $\eta_1, \dots, \eta_k$  segundo a). Sendo assim o conjunto ortogonal  $\{\eta_1, \dots, \eta_k, \eta_{k+1}\}$  é LI segundo Teorema 10.2.2. Note que o subespaço

$$\langle \eta_1, \dots, \eta_{k+1} \rangle \subset \langle \xi_1, \dots, \xi_{k+1} \rangle$$

é contido num subespaço da mesma dimensão  $k + 1$ . Então os dois são iguais segundo Teorema 3.2.1 (d). Por isso  $\{\eta_1, \dots, \eta_{k+1}\}$  é base ortogonal de  $F_{k+1}$ .

**Passo 2.** A base  $\mathcal{Z} := \{\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_n\}$  de  $E$  é ortonormal.

**Comentário 10.5.1.** No caso que  $\xi_{k+1}$  já é ortogonal a  $\eta_1, \dots, \eta_k$  a definição de  $\eta_{k+1}$  mostra que  $\eta_{k+1} = \xi_{k+1}$ . O processo de Gram-Schmidt não muda  $\xi_{k+1}$ .

**Exercício 10.5.2** (Listas arbitrárias). Seja  $(\xi_1, \dots, \xi_\ell)$  uma lista arbitrária de  $\ell$  vetores  $\xi_i \in E$ , dobros e o vetor nulo tudo permitido. Pode-se aplicar o processo de Gram-Schmidt com a seguinte modificação pequena da hipótese

(k) dado  $k \geq 1$  suponha o conjunto  $\{\eta_1, \dots, \eta_k\}$  é ortogonal e gera  $F_k$ , defina

$$\eta_{k+1} := \xi_{k+1} - \sum_{\substack{i=1 \\ \eta_i \neq \mathcal{O}}}^k \text{pr}_{\eta_i} \xi_{k+1} = \xi_{k+1} - \sum_{\substack{i=1 \\ \eta_i \neq \mathcal{O}}}^k \langle \hat{\eta}_i, \xi_{k+1} \rangle \hat{\eta}_i$$

Obtém-se também uma lista  $(\eta_1, \dots, \eta_\ell)$  cujos membros são dois-a-dois ortogonais, só agora é possível que uns são nulos. Com efeito, mostre que

$$\xi_{k+1} \in \langle \xi_1, \dots, \xi_k \rangle \stackrel{(k)}{=} \langle \eta_1, \dots, \eta_k \rangle \Rightarrow \eta_{k+1} = \mathcal{O}$$

[Dica: Note que  $\langle \hat{\eta}_i, \xi_{k+1} \rangle$  é a  $i$ -ésima coordenada do vetor  $\xi_{k+1}$  na base ON composto daqueles  $\hat{\eta}_i$  onde  $\eta_i \neq \mathcal{O}$  é nao -nulos. Exercício 10.2.3.]

**Exercício 10.5.3.** Determine uma base ON do subespaço  $F \subset \mathbb{R}^3$  gerado por

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle := \langle \cdot, \cdot \rangle_0$$

**Solução com Gram-Schmidt (GS).** Definição (10.5.1) dos  $\eta_{k+1}$  diz que

$$\begin{aligned} \eta_1 &:= \xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |\eta_1|^2 := \langle \eta_1, \eta_1 \rangle = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3 \\ \eta_2 &:= \xi_2 - \frac{\langle \eta_1, \xi_2 \rangle}{|\eta_1|^2} \eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}_{=1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |\eta_2|^2 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \eta_3 &:= \xi_3 - \frac{\langle \eta_1, \xi_3 \rangle}{|\eta_1|^2} \eta_1 - \frac{\langle \eta_2, \xi_3 \rangle}{|\eta_2|^2} \eta_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}_{=2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{8} \underbrace{\left\langle \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}_{=\frac{2}{3} \cdot 2} \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Segundo GS e como  $\eta_3 = \mathcal{O}$  sabemos que  $F := \langle \xi_1, \xi_2, \xi_3 \rangle = \langle \eta_1, \eta_2, \eta_3 \rangle = \langle \eta_1, \eta_2 \rangle$ . GS diz que o conjunto  $\{\eta_1, \eta_2\}$  é ortogonal, então LI segundo Teorema 10.2.2 usando que  $\eta_2, \eta_2 \neq \mathcal{O}$ . O conjunto ortogonal  $\{\eta_1, \eta_2\}$  é uma base ortogonal de  $F$  porque é LI e gera  $F$ . Uma base ON é composto dos vetores

$$\varepsilon_1 := \frac{1}{|\eta_1|} \eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2 := \frac{1}{|\eta_2|} \eta_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10.5.2)$$

### 10.5.1 Existência e extensão de bases ortogonais

Lembramos que um espaço vetorial de dimensão finita admite um produto interno – cada uma base ordenada  $\mathcal{B}$  induz um, notação  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}}$ , veja (10.1.4).

**Teorema 10.5.4** (Existência). *Um espaço vetorial  $E$  com produto interno e de dimensão finita  $n$  admite uma base ON  $\mathcal{Z} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ .*

*Demonstração.* Pegue uma base ordenada  $\mathcal{X} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  de  $E$  e aplique o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt.  $\square$

**Proposição 10.5.5** (Extensão). *Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno. Toda base ON  $\mathcal{X}$  de um subespaço  $F$  estende-se a uma base ON de  $E$ .*

*Demonstração.* Segundo Teorema 3.2.1 (b) a base  $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$  de  $F$  é contida numa base ordenada  $\mathcal{Y}$  de  $E$ , dizemos  $\mathcal{Y} = (\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$ . Aplique Gram-Schmidt para obter  $\mathcal{Z} = (\xi_1, \dots, \xi_k, \varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n)$ .  $\square$

### 10.5.2 Projecção ortogonal sobre um subespaço

O processo de Gram-Schmidt prova a existência de bases ONs (pegue qualquer base e aplique o processo). É importante usar uma base ON nesta definição:

**Definição 10.5.6** (Projecção ortogonal sobre um subespaço  $F$ ). Escolha uma base ordenada ON  $\mathcal{Y} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$  de  $F$  e defina a transformação linear

$$\begin{aligned} \text{pr}_F: E &\rightarrow E \\ v &\mapsto \sum_{i=1}^k \text{pr}_{\varepsilon_i} v = \sum_{i=1}^k \langle \varepsilon_i, v \rangle \varepsilon_i \end{aligned} \quad (10.5.3)$$

**Teorema 10.5.7** (Propriedades da projecção ortogonal). 1.  $\text{pr}_F$  é linear

2.  $(\text{pr}_F)^2 = \text{pr}_F$

3. bem definido (independente da base ON  $\mathcal{Y}$ )

4.  $\text{pr}_F|_F = I_F \in \mathcal{L}(F)$

5.  $\text{Im}(\text{pr}_F) = F$

6.  $\omega := (v - \text{pr}_F v) \perp f \quad \forall f \in F$

7.  $\forall v \in E$  vale<sup>6</sup>  $\text{dist}(v, F) := \min_{f \in F} \underbrace{\text{dist}(v, f)}_{=: |v-f|} = |v - \text{pr}_F v|$

*Demonstração.*  $\square$

<sup>6</sup> como  $\dim F < \infty$  ínfimo igual mínimo

## 10.6 Complemento ortogonal

**Definição 10.6.1.** O **complemento ortogonal** de um subespaço  $F \subset E$  é

$$F^\perp := \{v \in E \mid \langle v, f \rangle = 0 \ \forall f \in F\}$$

**Exercício 10.6.2.** O complemento ortogonal  $F^\perp$  é um subespaço de  $E$ .

**Proposição 10.6.3** (Relações entre  $F$  e  $F^\perp$  e a projeção  $\text{pr}_F$  de (10.5.3)).

- (i)  $F^\perp = \text{N}(\text{pr}_F)$
- (ii)  $F = \text{Im}(\text{pr}_F)$
- (iii)  $E = F \oplus F^\perp$  e  $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$
- (iv)  $\text{pr}_F = P_{F, F^\perp}$  veja (6.1.1),
- (v)  $(F^\perp)^\perp = F$

*Demonstração.* □

**Exercício 10.6.4.** No Exercício 10.6.4 temos calculado a base ON  $\mathcal{Z} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ , veja (10.5.2), do subespaço  $F := \langle \xi_1, \xi_2, \xi_3 \rangle$ . Determine uma base ON do complemento ortogonal

$$F^\perp := \{v \in E \mid \langle v, f \rangle = 0 \ \forall f \in F\} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid v \perp \varepsilon_1, v \perp \varepsilon_2\}$$

Vale a ultima igualdade porque a condição  $\langle v, f \rangle = 0$  é linear em  $f$ , então é suficiente checar para os elementos  $f$  de uma base só.

**Uma solução.**

$$v \perp \varepsilon_1: 0 = \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (x - y + z)$$

$$v \perp \varepsilon_2: 0 = \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (x + 2y + z)$$

Multiplique identidade um por  $\sqrt{3}$  e dois por  $\sqrt{6}$  e forma a diferença das identidades resultantes para obter

$$0 - 0 = 0 - 3y - 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

Com isso obtemos da identidade um que

$$z = -x, \ x \in \mathbb{R} \text{ livre}, \quad F^\perp = \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Uma base ON de  $F^\perp$  é composto do vetor  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$ .

## 10.7 Exercícios e umas soluções

### Exercícios.

1. Prove que  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2,$$

define um produto interno em  $\mathbb{R}^2$ .

2. Seja  $E$  um espaço vetorial com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Prove que para todo  $u, v \in E$ :

$$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2 \quad (10.7.1)$$

onde  $|\cdot| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  é a **norma induzida**. Interprete (10.7.1) geometricamente.

3. Considere os vetores  $u = (2, -1, 2)$ ,  $v = (1, 2, 1)$  e  $w = (-2, 3, 3)$ . Determine o vetor de  $\mathbb{R}^3$  que é a projeção ortogonal de  $w$  sobre o plano gerado por  $u$  e  $v$ .
4. Considere a base  $\mathcal{U} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  onde

$$\xi_1 = (1, 1, 1), \quad \xi_2 = (1, -1, 1), \quad \xi_3 = (1, -1, -1).$$

Aplique o método de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ . Determine a matriz  $\mathbf{p}$  de passagem da base  $\mathcal{U}$  para a base  $\mathcal{B}$ .

5. Determine as bases obtidas de  $\mathcal{U} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  pelo processo de Gram-Schmidt nos casos seguintes:

- (a)  $\xi_1 = (3, 0, 0)$ ,  $\xi_2 = (-1, 3, 0)$ ,  $\xi_3 = (2, -5, 1)$ ;  
 (b)  $\xi_1 = (-1, 1, 0)$ ,  $\xi_2 = (5, 0, 0)$ ,  $\xi_3 = (2, -2, 3)$ .

6. Prove que o produto vetorial  $\cdot \times \cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definido no Exercício 7.4.5, satisfaz:

- (a)  $u \times v = -v \times u$ ;  
 (b)  $u \times (v + \tilde{v}) = u \times v + u \times \tilde{v}$ ;  
 (c)  $u \times (\alpha v) = \alpha(u \times v)$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ;  
 (d)  $u \times v \neq 0 \iff \{u, v\}$  é um conjunto LI;  
 (e)  $u \times v$  é ortogonal a  $u$  e ortogonal a  $v$ ;  
 (f)  $e_1 \times e_2 = e_3$ ,  $e_2 \times e_3 = e_1$ ,  $e_3 \times e_1 = e_2$ .





# Capítulo 11

## A adjunta

Neste Capítulo 11 consideramos exclusivamente espaços vetoriais de dimensão finita com produtos internos

$$E = (E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E), \quad F = (F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$$

e dimensões finitas  $n := \dim E$  e  $m := \dim F$ . Dévido aos produtos internos o corpo sempre será  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Em vez de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$  ou  $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$  escrevemos simplesmente  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , o contexto indica do qual produto interno trata-se, aquele de  $E$  ou  $F$ .

**Teorema 11.0.1.** *É um isomorfismo a transformação linear definida assim*

$$\begin{aligned} \chi = \chi_{\langle \cdot, \cdot \rangle}: E &\rightarrow E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \\ v &\mapsto \langle v, \cdot \rangle \end{aligned}$$

onde  $\langle v, \cdot \rangle: E \rightarrow \mathbb{R}$  é a transformação linear  $w \mapsto \langle v, w \rangle$ .

*Demonstração.* □

**Definição 11.0.2** (Adjunta). A **adjunta** de uma transformação linear  $A: E \rightarrow F$  entre espaços vetoriais com produtos internos é a transformação linear

$$\begin{aligned} A^*: F &\rightarrow E \\ w &\mapsto (\chi_{\langle \cdot, \cdot \rangle_E})^{-1} \underbrace{\langle w, A \cdot \rangle_F}_{\in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*} \end{aligned}$$

Deixamos ao leitor checar linearidade.

**Proposição 11.0.3** (Critério para adjunta). *Sejam  $y \in E$  e  $w \in F$ , então*

$$y = A^*w \quad \Leftrightarrow \quad \langle y, v \rangle = \langle w, Av \rangle \quad \forall v \in E$$

**Lema 11.0.4.** *Dado  $A, B \in \mathcal{L}(E)$ , então*

$$B^*A = \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad Av \perp Bv \quad \forall v \in E$$

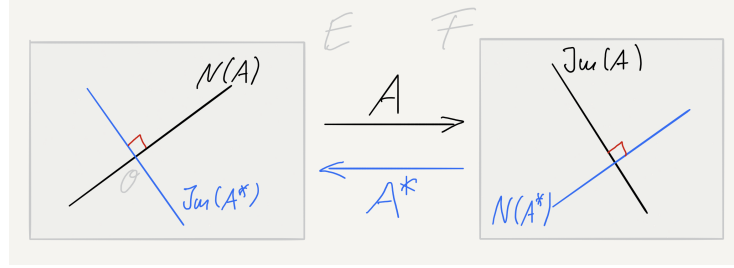


Figura 11.1: Operador  $A$  e sua adjunta  $A^*$  tem subespaços ortogonais

*Demonstração.* Dado  $v \in E$ , então  $\langle Av, Bv \rangle = \langle B^*Av, v \rangle = \langle \mathcal{O}, v \rangle = 0$   $\square$

**Corolário 11.0.5.** *Seja  $A \in \mathcal{L}(E)$ , então  $A^*A = \mathcal{O} \Rightarrow A = \mathcal{O}$ .*

*Demonstração.* Seja  $v \in E$ . Então  $\langle Av, Av \rangle = 0$  segundo Lema 11.0.4. Assim  $Av = \mathcal{O}$  segundo axioma (POS). Isso vale  $\forall v \in E$ , assim o operador  $A = \mathcal{O}$ .  $\square$

**Teorema 11.0.6.**  $A: E \rightarrow F$  e  $F \leftarrow E: A^*$

- a)  $N(A) = \text{Im}(A^*)^\perp$   
 $\text{Im}(A) = N(A^*)^\perp$
- b)  $N(A^*) = \text{Im}(A)^\perp$   
 $\text{Im}(A^*) = N(A)^\perp$

*Demonstração.*  $\square$

**Corolário 11.0.7.**  $\text{posto}(A) = \text{posto}(A^*)$

*Demonstração.*  $\square$

**Corolário 11.0.8.** *Seja  $\mathbf{a} \in M(m \times n)$  e  $b \in \mathbb{R}^m$ , então*

$$\mathbf{a}\mathbf{x} = b \text{ possui uma solução} \quad \Leftrightarrow \quad b \perp N(\mathbf{a}^t)$$

*Demonstração.*  $\square$

**Teorema 11.0.9** (A matriz da adjunta é a matriz transposta). *Seja  $\mathbf{a} = (a_{ij}) := [A]_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}}$  a matriz de uma transformação linear  $A: E \rightarrow F$  em respeito a bases ordenadas ortonormais  $\mathcal{X} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  e  $\mathcal{Y} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ . Então*

- (i)  $a_{ij} = \langle \eta_i, A\xi_j \rangle$
- (ii)  $\mathbf{a} = [A]_{\mathcal{X}, \mathcal{Y}} \Leftrightarrow \mathbf{a}^t = [A^*]_{\mathcal{Y}, \mathcal{X}}$

*Demonstração.*  $\square$

**Lema 11.0.10** (Critério para dois operadores  $A$  e  $B$  são iguais). *Dado operadores  $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$  e bases arbitrárias  $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  e  $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ , então*

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \langle \eta_i, A\xi_j \rangle = \langle \eta_i, B\xi_j \rangle \quad \forall i, j$$

*Demonstração.* □

**Teorema 11.0.11** (Regras básicas para a adjunta).

- (i)  $I = I^*$
- (ii)  $(A + B)^* = A^* + B^*$
- (iii)  $(\alpha A)^* = \alpha A^*$
- (iv)  $(BA)^* = A^*B^*$
- (v)  $(A^*)^* = A$

*Demonstração.* □

**Teorema 11.0.12** (Adjunta e injetividade e sobrejetividade).

- (i)  $A$  injetivo  $\Leftrightarrow A^*$  sobrejetivo
- (ii)  $A$  sobrejetivo  $\Leftrightarrow A^*$  injetivo
- (iii)  $A$  isomorfismo  $\Leftrightarrow A^*$  isomorfismo

*Demonstração.* □

### 11.0.1 Método para construir inversas à direita/esquerda

**Proposição 11.0.13** (inversas à direita e esquerda).

- a)  $A$  sobrejetivo  $\Rightarrow AA^* \in \mathcal{L}(F)$  invertível e  $A A^* (AA^*)^{-1} = I_F$
- b)  $A$  injetivo  $\Rightarrow A^*A \in \mathcal{L}(E)$  invertível e  $(A^*A)^{-1} A^*A = I_E$

*Demonstração.* □

### 11.0.2 Traco – produto interno em $\mathcal{L}(E, F)$

## 11.1 Exercícios e umas soluções

### Exercício 11.1.1.

Para todos os exercícios:  $E$  é um espaço vetorial de dimensão  $n < \infty$ , munido de um produto interno.

1. Determine uma inversa à direita para

$$A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 2x - y - z),$$

e uma inversa à esquerda para

$$B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y, x + 3y, 4x + y).$$

2. Dado

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

calcule  $\mathbf{a}\mathbf{a}^T$  e, a partir daí, encontre uma matriz  $\mathbf{b} \in M(3 \times 2)$  tal que  $\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbb{1}_2$ .

3. Seja  $P$  uma projeção em  $E$  ( $P \in \mathcal{L}(E)$  e  $P^2 = P$ ). Prove que a adjunta  $P^*$  também é uma projeção em  $E$ . Dê um exemplo em que  $P^* \neq P$ .
4. Considere o produto interno no espaço vetorial  $M(n \times n)$  definido por

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle := \text{tr}(\mathbf{a}^T \mathbf{b}) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}.$$

Mostre que o subespaço  $\mathcal{A}$  das matrizes anti-simétricas é o complemento ortogonal em  $M(n \times n)$  do subespaço  $\mathcal{S}$  das matrizes simétricas:

$$\mathcal{A} = \mathcal{S}^\perp \quad \text{e} \quad \mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = M(n \times n).$$

5. Sejam  $F_1, F_2 \subset E$  subespaços. Prove que

$$(a) \quad (F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp \quad (b) \quad F_1^\perp + F_2^\perp = (F_1 \cap F_2)^\perp.$$

6. Uma matriz quadrada  $\mathbf{a}$  chama-se *diagonalizável* quando é semelhante a uma matriz  $\mathbf{d} = (d_{ij})$  do tipo *diagonal* ( $d_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ ), ou seja, quando existe  $\mathbf{p}$  invertível tal que  $\mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{p} = \mathbf{d}$ . Prove que:

- (a)  $\mathbf{a}$  diagonalizável  $\Rightarrow \mathbf{a}^T$  diagonalizável.
- (b) Se a matriz do operador  $A \in \mathcal{L}(E)$  relativamente a uma base de  $E$  é diagonalizável, então o é em relação a qualquer outra base.

## **Aula 20 – P2**



# Aula X





## Capítulo 12

# Operadores auto-adjuntos



## Capítulo 13

# Operadores ortogonais

13.1 Matrizes

13.2 Operadores

13.3 Decomposição polar



# Apêndice A

## Demonstrações restantes

### A.1 Espaços vetoriais

**Lema A.1.1** (Lema 1.1.5). *Seja  $(G, *)$  um grupo. Então vale o seguinte.*

- 1) *O elemento neutro é único.*
- 2) *Os elementos inversos são únicos.*
- 3) *Para todos os elementos  $f, g, h \in G$  vale:*

- a)  $f * g = f * h \Rightarrow g = h$  *(lei da corte)*
- b)  $f * g = f \Rightarrow g = e$
- c)  $f * g = e \Rightarrow g = \bar{f}$

*Demonstração.* 1) Se  $e, \tilde{e} \in G$  satisfazem o axioma (elemento neutro), então usando o axioma para  $e$  e depois para  $\tilde{e}$  obtemos que  $e = e * \tilde{e} = \tilde{e}$ .

2) Seja  $g \in G$ . Se  $\bar{g}, \tilde{g} \in G$  satisfazem o axioma (inverso) para  $g$ , então obtemos

$$\bar{g} = e * \bar{g} = \underbrace{(\tilde{g} * g)}_{=e} * \bar{g} = \tilde{g} * \underbrace{(g * \bar{g})}_{=e} = \tilde{g} * e = \tilde{g}$$

usando (elem. neutro) no início e fim, (inverso) $_{\tilde{g}}$ , (associatividade), (inverso) $_{\bar{g}}$ .

- 3) a)  $g = e * g = (\bar{f} * f) * g = \bar{f} * (f * g) \stackrel{\text{hip.}}{=} \bar{f} * (f * h) = (\bar{f} * f) * h = e * h = h$ .
- b) Use a) com  $h = e$ . c) Use a) com  $h = \bar{f}$ . □

**Lema A.1.2** (Lema 1.1.10). *Seja  $\mathbb{K}$  um corpo e  $0 \in K$  é o elemento neutro da adição. Então  $0\beta = 0$  e  $\beta 0 = 0$  para todos os elementos  $\beta \in \mathbb{K}$ .*

*Demonstração.* Seja  $\beta \in \mathbb{K}$ , denotamos o inverso aditivo de  $-\beta$ . Então

$$\beta \stackrel{(\text{el.n.})}{=} 1\beta \stackrel{(\text{el.n.})_+}{=} (1+0)\beta \stackrel{(\text{distr.})}{=} 1\beta + 0\beta \stackrel{(\text{el.n.})}{=} \beta + 0\beta$$

Usamos esta identidade para obter a segunda igualdade no seguinte

$$0 \stackrel{(\text{inv.})}{=} (-\beta) + \beta = -\beta + (\beta + 0\beta) \stackrel{(\text{ass.})_+}{=} (-\beta + \beta) + 0\beta \stackrel{(\text{inv.})}{=} 0 + 0\beta \stackrel{(\text{el.n.})}{=} 0\beta$$

□

**Lema A.1.3** (Lema 1.1.18). *Para o vetor nulo  $\mathcal{O} \in E$  de um espaço vetorial e o elemento neutro aditivo  $0 \in \mathbb{K}$  do corpo vale o seguinte.*

- (i)  $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$  para todos os escalares  $\alpha \in \mathbb{K}$ .
- (ii)  $0v = \mathcal{O}$  para todos os vetores  $v \in E$ .
- (iii) Para todo o escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$  e todo o vetor  $w \in E$  são equivalentes:

$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O}$$

*Demonstração.* (i) CASO  $\alpha = 0$ . Como  $\alpha\mathcal{O} + 0\mathcal{O} = (\alpha + 0)\mathcal{O} = \alpha\mathcal{O}$ , então  $0\mathcal{O} = \mathcal{O}$  pela lei da corte (Lema A.1.1 3b) para  $(G, *) = (E, +)$ . CASO  $\alpha \neq 0$ . Tal  $\alpha$  tem um inverso aditivo, notação  $\alpha^{-1}$ . Seja  $v \in E$ , então

$$v \stackrel{(\text{comp.})}{=} 1v \stackrel{(\text{inv.})_{\mathbb{K}}}{=} (\alpha\alpha^{-1})v \stackrel{(\text{comp.})}{=} \alpha(\alpha^{-1}v)$$

Usando este resultado no início e no fim do seguinte obtemos que

$$v + \alpha\mathcal{O} = \alpha(\alpha^{-1}v) + \alpha\mathcal{O} \stackrel{(\text{distr.})_E}{=} \alpha((\alpha^{-1}v) + \mathcal{O}) \stackrel{(\text{el.n.})_{E,+}}{=} \alpha(\alpha^{-1}v) = v$$

Então  $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$  pela lei da corte (Lema A.1.1 3b) para  $(G, *) = (E, +)$ .

- (ii) Como  $v + 0v = 1v + 0v = (1 + 0)v = 1v = v$  a lei da corte diz que  $0v = \mathcal{O}$ .
- (iii) '⇒' Suponha  $\alpha w = \mathcal{O}$ . Caso  $\alpha = 0$ , pronto. Caso  $\alpha \neq 0$  concluímos que

$$w \stackrel{(\text{comp.})}{=} 1w \stackrel{(\text{el.n.})_{\mathbb{K}}}{=} (\alpha^{-1}\alpha)w \stackrel{(\text{comp.})}{=} \alpha^{-1}(\alpha w) \stackrel{\text{hip.}}{=} \alpha^{-1}\mathcal{O} \stackrel{(i)}{=} \mathcal{O}$$

'⇐' Se  $w = \mathcal{O}$ , então  $\alpha\mathcal{O} \stackrel{(i)}{=} \mathcal{O}$ , pronto. Se  $\alpha = 0$ , então  $0w \stackrel{(ii)}{=} \mathcal{O}$ , pronto. □

**Corolário A.1.4** (Corolário 1.1.19). *Para todos os  $\alpha \in \mathbb{K}$  e  $w \in E$  vale:*

- a)  $\alpha(-w) = -(\alpha w)$
- b)  $(-\alpha)w = -(\alpha w)$

*Demonstração.* a) Temos que mostrar que a soma de  $\alpha w$  e o candidato para ser seu inverso aditivo iguale o vetor nulo. Com efeito

$$\alpha w + \alpha(-w) \stackrel{(\text{distr.})_E}{=} \alpha(w + (-w)) \stackrel{(\text{el.n.})_{E,+}}{=} \alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$$

onde o último passo é parte (i) de Lema A.1.3.

b) Temos o objetivo análogo de chegar ao vetor nulo, com efeito

$$\alpha w + (-\alpha)w \stackrel{(\text{distr.})_E}{=} (\alpha + (-\alpha))w \stackrel{(\text{el.n.})_{\mathbb{K},+}}{=} 0w = \mathcal{O}$$

onde o último passo é parte (ii) de Lema A.1.3. □

## A.2 Subespaços

**Lema A.2.1** (Lema 2.2.4). *Todo subconjunto LI  $\{u, v\} \subset \mathbb{R}^2$  gera  $\mathbb{R}^2$ .*

*Demonstração.* Vai ter 4 passos. I. Os vetores  $u, v$  não são múltiplos um do outro: Suponha por absurdo que  $u = \alpha v$  para um  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então  $1u + (-\alpha)v = 1\alpha v - (\alpha v) = \mathcal{O}$  contradizendo LI. II.  $u \neq \mathcal{O}$ : Caso contrário  $u = \mathcal{O} = 0v$  contradizendo I. III.  $v \neq \mathcal{O}$ : Análogo. IV. Seja  $v \in \mathbb{R}^2$ . Caso  $w = \mathcal{O}$  escrevemos  $w = 0u$ , pronto. Caso  $v \neq \mathcal{O}$ : Agora identificamos  $\mathbb{R}^2$  com o plano usando dois eixos  $OXY$ , veja Figura 2. Segundo II. e III. temos duas retas  $\mathbb{R}u$  e  $\mathbb{R}v$  passando ambas a origem  $O$ , mas não são iguais segundo I. Recebemos um paralelogramo com dois lados parte das retas e dois vértices sendo  $O$  e  $v$ ; pensa Figura 2 com  $OX$  e  $OY$  substituído para  $Ou$  e  $Ov$ . Então a flecha  $v$  é a soma de duas flechas do paralelogramo, uma flecha sendo um múltiplo de  $u$  e a outra de  $v$ . Pronto.  $\square$

**Teorema A.2.2** (Teorema 2.3.4). *Sejam  $F_1, F_2 \subset F$  três subespaços de um espaço vetorial  $E$ , então são equivalentes*

$$F = F_1 \oplus F_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \in F, \exists! f_1 \in F_1, f_2 \in F_2 \text{ tal que } f = f_1 + f_2$$

*Demonstração.* ' $\Rightarrow$ ' Seja  $f \in F$ . Como hipótese temos duas informações, a saber (i)  $F = F_1 + F_2$  e (ii)  $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$ , dando existência e unicidade.

EXISTÊNCIA: De (i) sabemos que  $f = f_1 + f_2$  para um  $f_1 \in F_1$  e um  $f_2 \in F_2$ .

UNICIDADE. Suponha que  $f = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$  também para um  $\tilde{f}_1 \in F_1$  e um  $\tilde{f}_2 \in F_2$ . Então  $F_1 \ni f_1 - \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 - f_2 \in F_2$ . Assim cada um lado pertence a ambos espaços, então a  $F_1 \cap F_2$  o qual segundo (ii) iguale  $\{\mathcal{O}\}$ . Como não tem outro elemento, cada um lado deve ser o vetor nulo.

' $\Leftarrow$ '  $F_1 + F_2 = F$ : A hipótese *existência* disponibiliza a primeira inclusão  $F \subset F_1 + F_2 \subset F$  e a segunda vale como  $F_1, F_2 \subset F$ .

$F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$ : Seja  $f \in F_1 \cap F_2$ , a mostrar  $f = \mathcal{O}$ . Note que  $f \in F$  como  $F_1, F_2 \subset F$ . Então segundo a propriedade do vetor nulo

$$\underbrace{f}_{\in F_1} + \underbrace{\mathcal{O}}_{\in F_2} = f = \underbrace{\mathcal{O}}_{\in F_1} + \underbrace{f}_{\in F_2} \quad (\text{A.2.1})$$

Mas pela hipótese *unicidade* escrever  $f$  como soma de um elemento de  $F_1$  e um elemento de  $F_2$  é único, então  $f = \mathcal{O}$  e  $\mathcal{O} = f$ .  $\square$

## A.3 Bases – SLH

**Teorema A.3.1** (Teorema 3.1.11). *Dado uma matriz  $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K})$ . Se tem menos linhas (equações) como colunas (incógnitas), em símbolos  $m < n$ , então o sistema linear homogêneo (SLH)*

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

admite soluções  $x = (x_1, \dots, x_n)$  não triviais (não todos  $x_j$  nulos).

*Demonstração.* Se todos os coeficientes  $a_{ij}$  são nulos, então todos os elementos  $x \in \mathbb{K}^n$  são soluções. Sejam então não todos coeficientes nulos: A prova usa indução sobre o número  $m$  de equações.

**$m = 1$ :** Em  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$  temos pelo menos dois incógnitas segundo nossa hipótese  $n > m = 1$ . Além disso, pelo menos um dos coeficientes é não-nulo, dizemos  $a_{1n} \neq 0$  (caso fosse um outro renomeamos eles). Então

$$\left( x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{a_{11}}{a_{1n}}x_1 - \dots - \frac{a_{1,n-1}}{a_{1n}}x_{n-1} \right)$$

é uma solução para cada um  $(x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{K}^{m-1}$ .

**$m - 1 \Rightarrow m$ :** Caso todos os coeficientes da última equação em (\*) são nulos, então as primeiras  $m - 1$  equações tem uma solução não-trivial  $x$  pela hipótese da indução ( $x$  também resolve a última equação: os coeficientes dela são nulos).

Suponha então que pelo menos um coeficiente da última equação em (\*) não é nulo, dizemos  $a_{mn} \neq 0$ . Nas primeiras  $n - 1$  equações de (\*) substitua  $x_n$  por

$$x_* := -\frac{a_{m1}}{a_{mn}}x_1 - \dots - \frac{a_{m,n-1}}{a_{mn}}x_{n-1}$$

para obter um SLH de  $m - 1$  equações a  $\tilde{n} := n - 1 > m - 1$  incógnitas. O qual tem uma solução  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$  pela hipótese  $m - 1$  da indução. Verifica-se que  $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_*)$  é uma solução não-trivial de (\*).  $\square$

## A.4 Transformações lineares

**Lema A.4.1** (Lema 4.3.10). *Trabalhamos no plano  $\Pi$  identificado com  $\mathbb{R}^2$  mediante um sistema ortogonal de coordenadas. A projeção ortogonal sobre a reta  $L_a$  é denotada de  $P = P_{L_a} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e dada por (4.3.2). Sua matriz é*

$$\mathbf{p}_a := [P_{L_a}] = \frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.1})$$

onde  $[P_{L_a}] := [P_{L_a}]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$  denota a matriz em respeito à base canônica.

*Demonstração.* Seja  $a \in \mathbb{R}$ . Dado um elemento  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , denota sua imagem sob  $P$  de  $(X, Y) := Pv \in L_a = \{(x, ax) \mid x \in \mathbb{R}\}$ . Assim  $X$  e  $Y$  são funções de  $(x, y)$  e  $Y = aX$ . Resta determinar a função  $X(x, y)$ . Vamos provar

$$X(x, y) = \frac{1}{1+a^2}x + \frac{a}{1+a^2}y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{A.4.2})$$

Segundo o Teorema de Pitágoras a distância  $\text{dist}(\mathcal{O}, v)$  entre a origem  $\mathcal{O} = (0, 0)$  e o vetor  $v = (x, y)$  é dada por  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Assim, usando Pitágoras de novo na



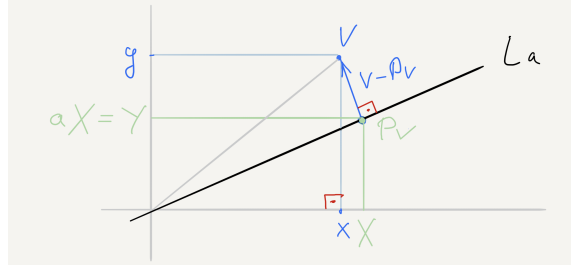


Figura A.1: Dois ângulos retângulos - usando Pitágoras duas vezes

igualdade dois, veja Figura A.1, obtemos

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= \text{dist}(\mathcal{O}, v)^2 \\
 &= \text{dist}(\mathcal{O}, Pv)^2 + \text{dist}(v, Pv)^2 \\
 &= X^2 + (aX)^2 + (\text{comprimento}^2 \text{ do vetor } v - Pv = (x - X, y - aX)) \\
 &= X^2 + (aX)^2 + (x - X)^2 + (y - aX)^2 \\
 &= X^2 + (aX)^2 + x^2 - 2xX + X^2 + y^2 - 2aYX + a^2X^2
 \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$X(x, y)^2(1 + a^2) = X(x, y)(x + ay)$$

**Caso**  $X(x, y) \neq 0$ . Divida por  $X(x, y)$  e  $1 + a^2$  para obter (A.4.2).

**Caso**  $X(x, y) = 0$ . Então  $Y(x, y) = aX(x, y) = 0$  e assim  $Pv = (X, Y) = \mathcal{O}$ . Como a projeção é ortogonal o ponto  $v$  deve ser localizado na reta  $(L_a)_{\mathcal{O}}^{\perp}$  ortogonal a  $L_a$  e passando a origem. Mas esta reta resulta de  $L_a$  mediante uma rotação por  $\pi/2$  ( $90^\circ$ ), em símbolos

$$(L_a)_{\mathcal{O}}^{\perp} = R_{\pi/2}L_a = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ at \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \{(-at, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Então  $v$  é da forma  $(-at, t)$  para um  $t \in \mathbb{R}$  e tal par satisfaz (A.4.2) também.

Para concluir note-se que os coeficientes na última identidade de

$$Pe_1 = P(1, 0) = (X(1, 0), Y(1, 0)) = X(1, 0)e_1 + Y(1, 0)e_2$$

disponibiliza a primeira coluna da matriz (A.4.1) e analogamente

$$Pe_2 = X(0, 1)e_1 + Y(0, 1)e_2$$

disponibiliza a segunda coluna. Para obter os valores de  $X$  e  $Y$  nos pontos  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  usa-se a fórmula (A.4.2).  $\square$



# Referências Bibliográficas



# Índice Remissivo

- $v \times w$  produto vetorial, 90  
 $A|_F$  restrição de  $A \in (E)$ , 105  
 $A^*$  adjunta, 131  
 $A^{-1}$  inversa, 45, 66  
 $Av := A(v)$  operador linear, 43  
 $A_f^B = A_f \in \mathcal{L}(E, F)$ , 47  
 $AX := \{Ax \mid x \in X\}$  imagem do conjunto  $X$  sob  $A$ , 61  
 $C^0(\mathbb{R})$  funções contínuas  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 26  
 $C^k(\mathbb{R})$  funções  $k$  vezes continuamente diferenciáveis, 26  
 $C^\infty(\mathbb{R})$  funções suaves  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 26  
 CL combinação linear, 21  
 CLe combinação linear estrita, 20  
 $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$  espaço vetorial, 12  
 $E_\lambda$  autosubespaço, 106  
 $\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\}$  base canônica, 14, 28, 32  
 $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$  base canônica, 15, 28, 32  
 $\mathcal{E}^{m \times n} := \{e^{ij}\}_{i,j}$  base canônica, 32  
 Esp-col( $\mathbf{a}$ ), 16  
 $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) := \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{K}\}$ , 17  
 Fix( $r$ ) conjunto dos pontos fixos, 74  
 aFix( $r$ ) conjunto dos pontos anti-fixos, 74  
 $(G, *)$  grupo, 8  
 $H_\alpha$  hiperplano no  $\mathbb{R}^n$ , 26, 32, 37, 70  
 Im( $A$ ) imagem, 61  
 $I = I_E$  operador identidade, 46  
 $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  corpo, 9  
 $\mathbb{K}v$  reta passando  $v$  e  $\mathcal{O}$ , 26  
 LI/LD linearmente in/dep., 22  
 $\mathcal{L}(E, F)$  operadores lineares, 45  
 $\mathcal{L}(E)$  operadores lineares em  $E$ , 46  
 $M(m \times n)$  matrizes  $m \times n$ , 15, 30, 37  
 $\mathcal{A}, \mathcal{S}$  matrizes anti-/simétricas, 30  
 $N(A)$  núcleo, 61  
 $\mathcal{O}$  vetor nulo, 13  
 (oe) operações elementares, 17  
 $\mathcal{P}(\mathbb{K})$  polinômios, 17  
 $\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  polinômios reais e aqueles do grau  $\leq n$ , 26, 37  
 $P = P_{L_a} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  projeção ortogonal sobre a reta  $L_a$ , 57  
 $\mathbf{p}_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  matriz da projeção ortogonal, 58  
 $P_{F,G} : E \rightarrow E$  projeção sobre  $F$ , 75  
 $\mathbb{R}^n$  listas ordenadas de  $n$  reais, 14, 37  
 $\mathbb{R}^\infty$  sequências reais, 14  
 $\mathbb{R}_0^\infty$  quase todos membros nulos, 14, 26, 37  
 $R_\theta \in \mathcal{L}(\Pi_O)$  rotação no plano, 55  
 $\mathbf{r}_\theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  matriz da rotação, 57  
 $S = S_{L_a} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  reflexão em torno da reta  $L_a$ , 58  
 $\mathbf{s}_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  matriz da reflexão, 58  
 $S^2 = I_E : E \rightarrow E$  involução, 73  
 $S_{F,G} := P_{F,G} - P_{G,F}$  involução (ou reflexão), 77  
 $\mathcal{SC}(E) = \{(F, G) \mid F \oplus G = E\}$ , 73  
 SL sistema linear, 19, 63  
 SLH sistema linear homogêneo, 19, 34, 145  
 TL transformação (ou operador) linear, 43  
 $\mathbb{1} = \mathbb{1}_n = \text{diag}(1, \dots, 1) \in M(n \times n; \mathbb{K})$  matriz identidade, 15  
 $\forall, \exists, \exists!$  “para todos”, “existe”, “existe unicamente”, 3  
 $\mapsto$  injetivo, 73  
 $\twoheadrightarrow$  sobrejetivo, 73

- $:=$  “definido por”, 3  
 $\simeq$  isomorfismo, 66  
 $\langle X \rangle$  subespaço gerado por  $X$ , 27  
 $\langle v_1, \dots, v_\ell \rangle := \langle \{v_1\} \cup \dots \cup \{v_\ell\} \rangle$ , 27  
 $|X|$  número de elementos de um conjunto  $X$ , 7  
 $|\alpha|$  absoluto de um número  $\alpha$ , 3  
 $\mathbf{a} = (a_{ij})$  matriz, 15  
 $\mathbf{a}^t = (a_{ij}^t = a_{ji})$  matriz transposta, 15  
 $\mathbf{a}_{\bullet k}, \mathbf{a}_{k \bullet}$   $k$ -ésima coluna, linha, 15  
 $\mathbf{a}_{\text{esc}}$  matriz escalonada, 18  
 $a_{ij}$   $i$ -ésima linha,  $j$ -ésima coluna, 15  
 $\delta_{ij}$  símbolo de Kronecker, 48  
 $\text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$  matriz diagonal, 105  
 $e_i \in \mathbb{K}^n$   $i$ -ésimo vetor canônico, 14  
 $\mathbf{e}_{\mp}^{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}^{ij} \mp (\mathbf{e}^{ij})^t) \in \mathcal{A}/\mathcal{S}$ ,  $i \leq j$ , 40  
 $E^*$  espaço dual de  $E$ , 48  
 $\mathbf{g}_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}}$  matriz do produto interno, 118  
 $g_\lambda := \dim E_\lambda$  multiplicidade geométrica, 106  
 $[a, b], (a, b)$  intervalo fechado, aberto, 3  
 $\mathbf{[a : b]}$  matriz aumentada, 18  
 $[v]_{\mathcal{B}}$  vetor coordenada do vetor  $v$  na base  $\mathcal{B}$ , 34  
 $[v]_{\mathcal{B}}$  vetor coordenada do vetor  $v$  na base  $\mathcal{B}$ , 82  
 $[v] := [v]_{\mathcal{E}^m}$  na base canônica, 34  
 $[v] := [v]_{\mathcal{E}^m}$  na base canônica, 82  
 $[A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$  matriz de  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , 83  
 $[A] = [A]_{\mathcal{E}^n, \mathcal{E}^m}$  nas bases canôn., 51  
 $[A]_{\mathcal{U}} := [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{U}}$ , 83  
 $[A] := [A]_{\mathcal{E}}$  na base canônica, 83  
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$  produto euclidiano em  $\mathbb{R}^n$ , 114  
 $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$  produto interno em  $E^*$ , 116  
 $\text{posto}(A) := \dim \text{Im}(A)$ , 62  
 $\text{pr}_F$  projeção ortogonal sobre subespaço  $F$ , 127  
 $\text{pr}_u$  projeção ortogonal sobre reta  $\mathbb{R}u$ , 121  
 $\text{pca}$  posto-coluna, 50  
 $\text{pla}$  posto-linha, 50  
 $X \times Y$  produto cartesiano, 8  
 $Y^{\times k} := Y \times \dots \times Y$ , 8, 37  
 $\text{spec } A$  espectro de  $A \in \mathcal{L}$ , 106  
 $F \oplus G$  soma direta, 29  
 $X + Y$  soma de subconjuntos, 29  
 $\text{tr } \mathbf{a} := \sum_{i=1}^n a_{ii}$  traço, 40  
 $\cup$  união de conjuntos disjuntos, 7  
 $\hat{v}$  vetor unitário, 115  
 $(\Delta)$  desigualdade triangular, 115  
 $(\text{POS})$  positividade, 115  
 $(\text{SIM})$  simetria, 115  
 $(\Delta)$  desigualdade triangular, 115  
 $(\text{HOM})$  homogeneidade, 115  
 $(\text{POS})$  positividade, 115  
 $(\text{BL})$  bi-linearidade, 113  
 $(\text{POS})$  positividade, 113  
 $(\text{SIM})$  simetria, 113  
adição  
de funções, 17  
adjunta, 131  
autovalor  
multiplicidade geométrica, 106  
autovalor de  $\mathbf{A}$ , 106  
autovetor, 106  
base, 31  
canônica, 14, 15, 28, 32  
das matrizes  $m \times n$ , 32  
extensão, 127  
ordenada, 31, 46  
ortonormal (ON), 120  
bijetivo, 45, 66  
canônico, 116  
combinação linear, 21  
‘de vetores’, 21  
combinação linear estrita  
(num conjunto), 20  
complemento ortogonal, 128  
composição  
de funções, 12  
comutar  
matrizes, 17  
comutativo  
diagrama  $\neg$ , 81  
conjunto, 7  
composto de elementos  
 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_\ell$ , 3, 7  
finito, 7

- gerando, 27
- linearmente independente LI, 22
- ordenado, 7
- que gera, 27
- conjuntos
  - interseção de  $-$ , 7
  - união de  $-$ , 7
- convolução, 45
- coordenadas
  - de um vetor, 34
  - no plano, 2
- corpo, 9
- decomposição
  - de vetores, 29
- diagrama
  - comutativo, 81
- distância, 115
  - entre dois pontos, 115
  - no  $\mathbb{R}^2$ , 121
- dualidade, 116
- eixo, 2
- elemento neutro
  - aditivo, 9
  - multiplicativo, 9
- escalares, 13
- espaço dual  $E^*$ , 48
- espaço métrico, 115
- espaço vetorial, 12
  - base, 31
  - com produto interno, 113
  - normado, 115
  - real ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ), 49
  - subespaço, 25
  - trivial, 14
- espaço-coluna, 16
- espaço-linha, 16
- extensão
  - base ON, 127
- fechado sob uma operação, 25
- funções
  - adição de  $-$ , 17
  - composição de  $-$ , 12
  - multiplicação de  $-$ , 12
- funcional
  - $\mathbb{K}$ -linear, 48
  - linear, 48
  - real, 48
- gráfico, 79
- Gram-Schmidt (GS), 125
- grau
  - de um polinômio, 17
- grupo, 8
  - abeliano, 9
- hiper, 37
- hiperplano, 26, 32, 70
- homomorfismo, 43
- homotetia, 84
- imagem, 61
- independência linear
  - de um conjunto, 22
- inimigo da clareza
  - desnecessidade, 20
- injetivo, 45, 73
- interseção de conjuntos, 7
- invariante
  - subespaço  $-$ , 105
- inversa, 66
  - à direita, 63
  - à esquerda, 65
  - de um operador linear, 45
- invertível, 66
  - transformação linear, 45
- involução, 73
  - $S_{F,G}$ , 77
  - $S_{F,G}$  em torno de  $F$ , 77
  - linear, 76
- isomorfismo, 45, 66
  - inversa, 45
- Kronecker
  - símbolo de  $-$ , 48
- lei
  - da corte, 8
- linearidade, 43
- linearmente in/dependente, 22

- métrica, 115
  - induzida, 115
- matriz
  - anti-/simétrica, 30
  - aumentada, 18
  - de passagem, 85
  - de passagem entre bases, 81
  - de uma transformação linear, 51, 83
  - entradas da –, 15
  - escalonada, 18
    - pivôs, 18
  - identidade  $\mathbf{1}$ , 15
  - linhas e colunas, 15
  - operações elementares numa –, 17
  - positiva, 118
  - produto –, 16
  - projeção ortogonal, 58
  - reflexão, 58
  - rotação, 57
  - traço de uma – quadrada, 40
  - transposta  $\mathbf{a}^t$ , 15
- matrizes
  - comutam, 17
  - semelhante, 87
  - triangulares
    - inferiores, 40
- monômios, 28, 32
- multiplicação
  - de funções, 12
- multiplicidade
  - geométrica, 106
- núcleo, 61
- norma, 115
  - induzida, 115
- operações elementares numa matriz, 17
- operador
  - identidade, 46
- operador linear, 43
  - em  $\mathbf{E}$ , 46
  - inversa, 45
- origem, 14
- ortogonal
  - complemento –, 128
  - subconjunto –, 120
  - vetores, 120
- ortonormal (ON)
  - base –, 120
  - subconjunto –, 120
- par
  - de subespaços complementares, 73, 75
- perpendicular
  - vetores, 120
- pivôs, 18
- polinômio, 17, 26
  - de grau  $\leq n$ , 26
  - grau de um –, 17
- ponto
  - anti-fixo, 74
  - fixo, 74
- positiva
  - matriz –, 118
- posto
  - coluna, 50
  - linha, 50
  - transformação linear, 62
- produto
  - cartesiano, 8, 37
  - escalar (= interno), 113
  - euclidiano, 114
  - interno, 113
  - matriz, 16
  - vetorial  $\times$ , 90
- produto interno
  - induzido em  $\mathbf{E}^*$ , 116
- projeção, 73, 75
  - $\mathbf{P}_{\mathbf{F},\mathbf{G}}$  sobre  $\mathbf{F}$ , 75
  - ortogonal, 57
    - sobre reta, 121
    - sobre subespaço, 127
- projeção ortogonal
  - matriz da –, 58
- reflexão
  - $\mathbf{S}_{\mathbf{F},\mathbf{G}}$ , 77
  - em torno de uma reta, 58
  - matriz da –, 58
- relação



- de equivalência, 67
- restrição, 105
- rotação, 55
  - matriz de  $-$ , 57
  - no plano, 1
- semelhante
  - matrizes  $-$ , 87
- sistema de
  - coordenadas
    - no plano, 2
- sistema de coordenadas, 82
- sistema linear (SL), 19, 63
  - inogeneidade, 19
  - resolver “de baixo para cima”, 19
- sistema linear homogêneo (SLH), 19, 34
- sobrejetivo, 45, 73
- soma
  - de subconjuntos, 29
  - direta, 29
- spectro, 106
- subconjunto
  - ortogonal, 120
  - ortonormal (ON), 120
  - translação de  $-$ , 29
- subconjuntos
  - herdam LI, 33
  - soma de  $-$ , 29
- subespaço
  - invariante, 105
  - vetorial, 25
- subespaços
  - complementares, 73, 75
  - soma direta de  $-$ , 29
- teorema
  - decomposição única de vetores, 29
- traço, 40
- transformação linear
  - adjunta, 131
  - gráfico, 79
  - inversa, 66
  - invertível, 66
  - matriz de uma  $-$ , 83
  - restrição, 105
- transformação linear (TL), 43
- translação, 29
- transposta, 15
- união de conjuntos, 7
- verdade vazia, 22
- vetor
  - decomposição, 29
  - unitário, 115
- vetor coordenada, 34, 82
- vetor nulo, 13
- vetores, 13
  - ortogonais/perpendicular, 120