Álgebra Linear

Notas da aula[1]
MA327 2020-2

manuscrito em progresso

Joa Weber
UNICAMP

10 de novembro de 2020

[1] versão final estará la: www.math.stonybrook.edu/∼joa/PUBLICATIONS/MA327.pdf

Sumário

Introdução

Àlgebra Linear

é o estudo dos espaços lineares e das transformações lineares.

Uma outra palavra para espaço linear é espaço vetorial.

Exemplo 0.0.1 (O espaço vetorial F das flechas equivalentes no plano)**.** Seja F o conjunto das flechas v no plano Π,

onde consideramos iguais duas flechas se têm a mesma direção e comprimento, munido das operações de multiplicar uma flecha v com um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ e de adicionar duas flechas v e w.

Multiplicação (escalar). Pela definição αv é a flecha na direção de v cujo comprimento é α vezes aquele de v (muda-se a direção caso o número α é negativo).

Adição (vetorial). Pela definição $v + w$ é a flecha cujo ponto inicial é aquela de v e cujo ponto termino p é obtido depois fazer uma translação de w movendo o ponto inicial de w no ponto termino de v. Então p é definido como o ponto termino do novo w.

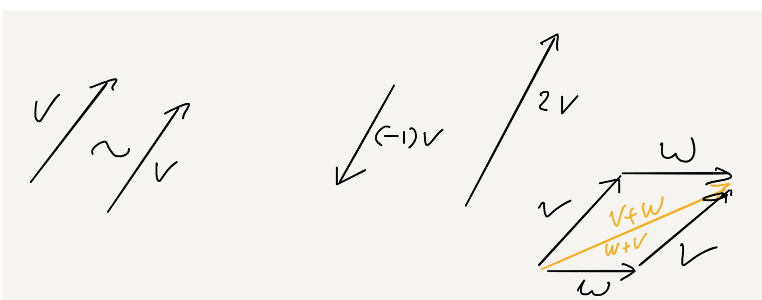

Figura 1: Flechas consideradas iguais, multiplicação escalar, e adição

Tal F é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ e um exemplo de uma transformação linear em F é dado pela rotação $r_\theta : F \to F$ de uma flecha v pelo angulo θ em torno do ponto inicial.

Exemplo 0.0.2 (Pares de números reais)**.** Seja $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ o conjunto de todas listas ordenadas de dois membros reais munido da adição membro-por-membro e multiplicação com um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ também membro-por-membro. Então $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Comentário 0.0.3 (Identificação dos conjuntos e operações – isomorfismo)**.** Os dois exemplos anteriores são "iguais" no sentido seguinte. Suponhamos que na reta podemos medir a distância 1. No plano Π escolha um **eixo** OX, ou seja uma reta com dois pontos diferentes O e X da distância 1, e um segundo eixo OY cujo primeiro ponto O é aquele do OX e qual intersecta OX exatamente no ponto O. Uma tal escolha de dois eixos é chamado um **sistema de coordenadas** no plano, símbolo OXY.

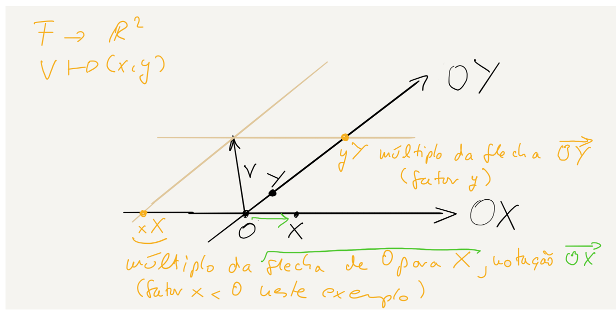

Figura 2: Sistema de coordenadas OXY composto de dois eixos OX e OY

Observe-se que um eixo OX chega com uma direção (de O para X) e com um comprimento unitário (o comprimento do segmento entre O e X). Uma escolha de coordenadas OXY no plano Π nos das uma aplicação

$$F \to \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto (x, y) \tag{0.0.1}$$

a qual identifica os elementos de F com os elementos de $\mathbb{R}^2$ unicamente (bijetora) – e ainda é **linear**, ou seja compatível com as duas operações no domínio e as duas no contradomínio. Uma tal aplicação (bijetora linear) é chamado um **isomorfismo** entre espaços vetoriais. Deixamos ao leitor definir esta aplicação. [Dica: Os pontos O, X e O, Y dão duas flechas. Represente um elemento de F por uma flecha equivalente com ponto inicial O. Pensa num paralelogramo tal que O e o ponto termino da flecha equivalente são dois vértices opostos.]

Exemplo 0.0.4 (Funções contínuas e integração)**.** Sejam $a < b$ dois números reais. Então o quadruplo $V = (C^0([a, b], \mathbb{C}), +, \cdot, \mathbb{R})$ que é composto do conjunto das funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ munido com as duas operações de adicionar $f + g$ duas funções e multiplicar αf uma função com um numero real $\alpha \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Também $W = (\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R})$ composto das números reais $\mathbb{R}$ munido das operações óbvias é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Integração $T : V \to W$, $f \mapsto \int_a^b f(x)\, dx$, é compatível com as duas adições e multiplicações (em V e em W) no sentido que

$$T(f + g) = Tf + Tg, \qquad T(\alpha f) = \alpha Tf$$

para todos os vetores $f, g \in V$ e escalares α do corpo $\mathbb{R}$. Uma aplicação T entre espaços vetoriais qual respeita as duas operações no domínio e no contradomínio é chamada uma transformação linear.

Notações

Para uma lista extensiva dos símbolos usados veja o Índice Remissivo na página 117.

Comentário 0.0.5 (Números)**.** Vamos trabalhar com os seguintes **números**

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$	naturais
$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	inteiros
$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$	racionais
$\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ "a reta real"	reais
$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ "o plano complexo"	complexos

Com $|\alpha|$ denotamos o absoluto de um numero α. Denotamos **intervalos** fechados de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e abertos de $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Usamos os símbolos

$\forall$ "para todos os" $\exists$ "existe um" $\exists!$ "existe um único"

A notação $w := v$ significa que o objeto w **é definido** pelo lado direito v. Escrevendo $\dim E = n$ ou $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ indica sem ser mencionado explicitamente que n e k são números naturais, e assim a dimensão e o numero de elemento do conjunto são **finitas**.

Convenções

Cor cinza. Parágrafos e maiores partes de texto em cinza indicam matéria avançada direcionado às turmas A e B do "cursão", mas não às outras turmas. Palavras individuais em cinza geralmente são nomes ou informações complementares.

Parte I

Teoria dos espaços vetoriais

Capítulo 1

Espaços vetoriais

1.1 Axiomas

Definição 1.1.1. Um **conjunto** X é composto de elementos os quais são dois-a-dois diferentes. Então não faz sentido escrever expressões da forma ~~$\{2, 3, 2\}$~~. Um conjunto não é ordenado, por exemplo $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. A **união** de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \cup B$ cujos elementos pertencem ou a A ou a B. Por exemplo

$$\{2, 3\} \cup \{2\} = \{2, 3\} = \{3, 2\} \tag{1.1.1}$$

A **interseção** de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \cap B$ cujos elementos pertencem a A e também a B. Chama-se um conjunto **ordenado** se seus elementos são enumerados, por exemplo $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. O conjunto que não contem nenhum elemento é chamado **o conjunto vazio**, símbolo $\emptyset$. Usamos a notação $A \dot{\cup} B$ para transferir a informação adicional que os dois conjuntos A e B são **disjuntos**, ou seja não tem nenhum elemento comum, em símbolos $A \cap B = \emptyset$. Denotamos de $|X|$ o **número de elementos de um conjunto** quando o número é finito. Neste caso X é chamado de **conjunto finito**.

Um **subconjunto** de um conjunto X é um conjunto A tal que cada um elemento de A é elemento de X, notação $A \subset X$. Observe que conforme esta definição, o conjunto vazio $\emptyset$ é subconjunto de todos conjuntos: para todo conjunto X temos $\emptyset \subset X$.

Definição 1.1.2. O **produto cartesiano** $X \times Y$ de dois conjuntos X e Y é o conjunto de todas listas ordenadas (x, y) dos elementos $x \in X$ e $y \in Y$, ou seja

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

Observe que se um fator fica vazio, ou seja $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$, então $X \times Y = \emptyset$. Abreviamos

$$Y^{\times k} := Y \times \cdots \times Y \tag{1.1.2}$$

se na direita temos k fatores.

1.1.1 Grupo

Definição 1.1.3. Um conjunto não-vazio $G \neq \emptyset$ munido de uma operação

$$* : G \times G \to G, \quad (f, g) \mapsto f * g$$

é chamado um **grupo**, notação $(G, *)$, se valem os três axiomas

1. $f*(g*h) = (f*g)*h$ para todos os elementos $f, g, h \in G$ (associatividade)
2. existe um elemento $e \in G$ tal que (elemento neutro)

   $$e * g = g, \qquad g * e = g$$

   para todos os elementos $g \in G$.
3. para todo $g \in G$ existe um elemento, notação $\bar{g} \in G$, t.q. (inverso)

   $$g * \bar{g} = e, \quad \bar{g} * g = e$$

Em palavras,

> *um grupo é um conjunto não-vazio munido de uma operação associativa, contendo um elemento neutro, e tal que qualquer elemento admite um inverso.*

O seguinte lema diz que um grupo G tem exatamente um elemento neutro, notação comum e, e cada um elemento g de G tem exatamente um inverso, notação $\bar{g}$. Ás vezes é comum e útil escrever o elemento neutro na forma 0 ou 1 e os inversos na forma $-g$ ou g^{-1} — veja os dois exemplos em Exercício 1.1.6 a).

Lema 1.1.4. *Seja $(G, *)$ um grupo. Então vale o seguinte.*
1) *O elemento neutro é único.*
2) *Os elementos inversos são únicos.*
3) *Dado elementos $f, g, h \in G$, então vale:*
   a) $f * g = f * h \;\Rightarrow\; g = h$ *(lei da corte)*
   b) $f * g = f \;\Rightarrow\; g = e$
   c) $f * g = e \;\Rightarrow\; g = \bar{f}$

Note que b) e c) são consequências imediatas de a).

Demonstração. Lema A.1.1. □

Definição 1.1.5. Um grupo $(G, *)$ é chamado de **abeliano** se a ordem dos dois elementos na operação não importa, em símbolos $f*g = g*f$. (comutatividade)

Exercício 1.1.6. Mostre que
a) são grupos (ainda abelianos): $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, \cdot)$
b) não são grupos: $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{N}_0, +)$ e $(\mathbb{Z}, \cdot)$
c) não são grupos abelianos: as matrizes 3×3 e as rotações em $\mathbb{R}^3$.

1.1.2 Corpo

Definição 1.1.7. Um conjunto $\mathbb{K}$ munido de duas operações[1]

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K} \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$$

é chamado um **corpo** se valem os três axiomas

1. $(\mathbb{K}, +)$ é um grupo abeliano.
(O *elemento neutro* seja denotado 0 e $-\alpha$ denota o *inverso* de $\alpha \in \mathbb{K}$.)

2. $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.
(O *elemento neutro* seja denotado 1 e α^{-1} denota o *inverso* de $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.)

3. Distributividade: $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$.
(É costume escrever $\alpha\beta$ em vez de $\alpha \cdot \beta$.)

Para distinguir chamamos o elemento neutro da primeira operação – para a qual temos usado o símbolo "+" ainda que geralmente não tem nada ver com adição de números – o **elemento neutro aditivo**. Chamamos o elemento neutro da segunda operação – motivado pelo uso do símbolo "·" – o **elemento neutro multiplicativo**. Como é feio escrever $\alpha + (-\beta)$ para a soma de um elemento com um elemento inverso aditivo definimos $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$. Isso é uma abreviação só, não é, nem tem diferença. Analogamente simplificamos a notação escrevendo α/β em vez de $\alpha\beta^{-1}$.

Corolário 1.1.8. *Um corpo contem pelo menos dois elementos.*

Demonstração. Pelas axiomas 1 e 2 cada uma operação tem um elemento neutro as quais não podem ser iguais por causa de 2. □

Lema 1.1.9. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $0 \in K$ é o elemento neutro da adição. Então $0\beta = 0$ e $\beta 0 = 0$ para todos os elementos $\beta \in \mathbb{K}$.*

Demonstração. Lema A.1.2. □

Exemplos de corpos

Exemplo 1.1.10. Sao corpos
a) $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$
b) $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ onde as operações são definidas assim

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)$$
$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(bc + ad)$$

Exercício 1.1.11. Os números inteiros $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ não formam um corpo.

[1] as quais vamos batizar aos nomes "+" e "·" – ainda que *geralmente não tem nada ver com adição e multiplicação de números*, mas esta escolha é motivada pelos exemplos principais (Exemplo 1.1.10) nos quais "+" e "·" são adição e multiplicação de números

Exemplo 1.1.12 (Adição e multiplicação modulo n)**.** Dado um número natural $n \in \mathbb{N}$, defina no conjunto $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ as duas operações

$$a +_n b := a + b \pmod n, \qquad a \cdot_n b := ab \pmod n$$

para todos os elemento $a, b \in \mathbb{Z}_n$.[2]

Fato. $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ é um corpo $\iff$ n é um número primo.

Para valores pequenos de n pode-se checar da mão se $\mathbb{Z}_n$ é um corpo ou não. Só precisa-se calcular as tabelas de adição e de multiplicação. Vamos ilustrar isso num exemplo.

Exemplo 1.1.13 ($\mathbb{Z}_4$ não é um corpo.)**.** Para checar se $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ e $(\mathbb{Z}_4 \backslash \{e_{+_4}\}, \cdot_4)$ são grupos abelianos é útil calcular as tabelas de adição e de multiplicação.

• $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ é um grupo abeliano? Para responder calculamos os valores na tabela

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

São 4 passos:

1. Determinar o elemento neutro de $+_4$: Checamos se a linha em cima da linha solida horizontal, ou seja a linha 0 1 2 3, tem uma cópia nas linhas embaixo. Sim, tem 0 1 2 3. Neste caso o elemento em frente da cópia é o elemento neutro de $+_4$, certo? No nosso caso $e_{+_4} = 0$. Se não tem copia, não tem elemento neutro, então não temos um grupo.

2. Inversos: Na cada dos (neste caso 4) linhas de valores na tabela localiza o elemento neutro 0 (se existir). Então o elemento g em frente da linha de 0 e o elemento em cima da coluna de 0, notação $\bar{g}$, são inversos um do outro. Caso uma linha não contem 0, então este g não tem inverso, então não temos um grupo. No nosso caso todo elemento g tem um inverso:

g	$\bar{g}$ (denotado $-g$)
0	0
1	3
2	2
3	1

3. Associatividade: Calculando caso por caso temos que checar se $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$ para todas as possibilidades. No nosso caso vale.

[2] Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\ell \in \mathbb{Z}$ um número inteiro. Pela definição o elemento $\ell \pmod n \in \mathbb{Z}_n$ é o resto $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ que falta depois você "enche" ℓ com múltiplos de n. Em símbolos, $l \pmod n := r$ onde $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ é o único elemento tal que $l = kn + r$ para um $k \in \mathbb{Z}$.

4. Grupo abeliano (comutatividade): Vale se a tabela é simétrica em respeito à diagonal. No nosso caso vale.

Na verdade temos esquecido um passo: No início de tudo temos que checar se a operação é bem definida, ou seja os valores da operação (os valores na tabela) realmente são elementos do conjunto, ou não. Olhamos a tabela - sim.
Nosso resultado é que $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ é um grupo abeliano.

• $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$ é um grupo abeliano? Para responder calculamos a tabela

$\cdot_4$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

Como o valor 0 não é elemento de $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ a multiplicado $\cdot_4$ não é uma operação em $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$, então não pode ser um grupo.

Ainda assim vamos repetir os 4 passos para $\cdot_4$ (em vez de $+_4$) para ver se tem outras falhas ainda. As respostas são:

1. Elemento neutro de $\cdot_4$: Tem, é o elemento $e_{\cdot_4} = 1$.
2. Inversos: Na cada dos (neste caso 3) linhas de valores na tabela localizamos o elemento neutro 1 (se existir). No nosso caso

g	$\bar{g}$ (denotado g^{-1})
1	1
2	não tem!
3	3

o elemento 2 não tem um inverso e já por isso não temos um grupo.
3. Associatividade: Ainda que a fórmula $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$ vale, os valores não são todos em $Z_4 \setminus \{0\}$.
4. Grupo abeliano (comutatividade): A tabela é simétrica em respeito à diagonal, mas os valores não são todos em $Z_4 \setminus \{0\}$.

Nosso resultado é que $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$ não é um grupo abeliano.

Exercício 1.1.14. Seja $n = 6$:

1. Calcule a tabela da adição e da multiplicação no caso $\mathbb{Z}_6$.
2. Identifique os elementos neutros da adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_6$. Eles sempre existem?
3. Para todo $a \in \mathbb{Z}_6$ identifique o elemento inverso aditivo.
4. Para todo $a \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$ identifique o elemento inverso multiplicativo, se existir.
5. Cheque que $\mathbb{Z}_6$ não é um corpo. Quais dos axiomas não valem?

Matéria avançada

Motivado pelas perguntas da Turma C na 1ª aula 2016-2 vamos dar um exemplo de um corpo onde a primeira operação não está relacionada à adição de números nem a segunda à multiplicação de números.

Exercício 1.1.15 (Corpo $(P, \cdot, \circ)$ onde $\cdot$ não é adição e $\circ$ não é multiplicação)**.** Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a função $p_\alpha : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $x \mapsto x^\alpha$. Seja o conjunto

$$P := \{p_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

composto de todas funções $p_\alpha(x) = x^\alpha$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ e munido das operações

$$\begin{aligned} \cdot : P \times P &\to P \\ (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \cdot p_\beta \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \circ : P \times P &\to P \\ (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \circ p_\beta \end{aligned}$$

chamado de **multiplicação**[3] e **composição**[4] de funções, respectivamente. Mostre que:

1. As duas operações são bem definidas: $p_\alpha \cdot p_\beta \in P$ e $p_\alpha \circ p_\beta \in P$, de fato

$$p_\alpha \cdot p_\beta = p_{\alpha+\beta}, \qquad p_\alpha \circ p_\beta = p_{\alpha\beta}$$

2. $(P, \cdot)$ é um grupo abeliano com elemento neutro $p_0 \equiv 1$.
3. $(P \setminus \{p_0\}, \circ)$ é um grupo abeliano com elemento neutro $p_1(x) = x$.
4. Distributividade: $(p_\alpha \cdot p_\beta) \circ p_\gamma = (p_\alpha \circ p_\gamma) \cdot (p_\beta \circ p_\gamma)$, $\forall p_\alpha, p_\beta, p_\gamma \in P$.

1.1.3 Espaço vetorial

Definição 1.1.16. Um **espaço vetorial *E* sobre um corpo** $\mathbb{K}$[5] é um quádruplo $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ composto de um conjunto E, um corpo $\mathbb{K}$, e duas operações

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ (v, w) &\mapsto v + w \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot\ : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\alpha, v) &\mapsto \alpha v \end{aligned}$$

chamado de *adição* e *multiplicação escalar*, respectivamente, tal que vale

1. $(E, +)$ é um grupo abeliano.
   (O *elemento neutro* é denotado $\mathcal{O}$ e chamado o **vetor nulo**.)
2. Distributividade: $\begin{cases} (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \\ \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \end{cases}$
3. Compatibilidade: $\begin{cases} (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \\ 1v = v \end{cases}$

[3] $(p_\alpha \cdot p_\beta)(x) := p_\alpha(x) \cdot p_\beta(x)$
[4] $(p_\alpha \circ p_\beta)(x) := p_\alpha(p_\beta(x))$
[5] fala-se abreviando "*E é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$" ou ainda "*E é um espaço vetorial*".

Onde as identidades tem que ser válidas para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e todos $v, w \in E$. Chama-se **escalares** os elementos do corpo $\mathbb{K}$ e **vetores** os elementos de E.

Lema 1.1.17. *Seja $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ um espaço vetorial e $0 \in \mathbb{K}$ e $\mathcal{O} \in E$, então:*

(i) $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ *para todos os escalares* $\alpha \in \mathbb{K}$.

(ii) $0v = \mathcal{O}$ *para todos os vetores* $v \in E$.

(iii) *Para todo o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo o vetor $w \in E$ são equivalentes:*

$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O} \tag{1.1.3}$$

Demonstração. Lema A.1.3. □

Corolário 1.1.18 (Compatibilidade dos inversos aditivos com multiplicação)**.** *Para todo o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo o vetor $w \in E$ vale:*

a) $(-\alpha)w = -(\alpha w)$

b) $\alpha(-w) = -(\alpha w)$

Demonstração. Corolário A.1.4. □

Corolário 1.1.19. *Seja $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ no qual $1 + 1 \neq 0$. Neste caso para $v \in E$ temos*

$$v + v = \mathcal{O} \qquad \Rightarrow \qquad v = \mathcal{O}$$

Demonstração. Como $\mathcal{O} = v + v = 1v + 1v = (1 + 1)v$ segue de (1.1.3) que ou $1 + 1 = 0$ no corpo $\mathbb{K}$ ou $v = \mathcal{O}$. (Lembre-se que $1 \in \mathbb{K}$, assim 1 geralmente não é um número e $1+1$ não tem nada ver com 2... Veja nota de rodapé no Lema 6.2.5.) □

1.2 Exemplos de espaços vetoriais

Exemplo 1.2.1 (O espaço vetorial trivial $\{\mathcal{O}\}$)**.** Seja E um conjunto com 1 elemento só. Vamos já denotar aquele elemento com o símbolo $\mathcal{O}$ (porque?). Então $E = \{\mathcal{O}\}$. Seja $\mathbb{K}$ um corpo qualquer. Não tem escolha nenhuma para definir as duas operações

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E \\ (\mathcal{O}, \mathcal{O}) &\mapsto \mathcal{O} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cdot\; : \mathbb{K} \times E &\to E \\ (\alpha, \mathcal{O}) &\mapsto \mathcal{O} \end{aligned}$$

Então $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ satisfaz os axiomas de um espaço vetorial, denotado simplesmente $E = \{\mathcal{O}\}$ e chamado de **espaço vetorial trivial**.

Exemplo 1.2.2 (Um corpo $\mathbb{K}$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$)**.** Usa-se as duas operações chegando com o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ como as duas operações necessárias para tornar um conjunto, escolhemos $E := \mathbb{K}$, num espaço vetorial sobre um corpo, escolhemos $\mathbb{K}$. Com efeito $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

1.2.1 Listas ordenadas

Exemplo 1.2.3 (O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$)**.** Seja

$$\mathbb{R}^n := \{u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto de todas as listas ordenadas de n números reais. Chamamos α_i o i-ésimo membro da lista. As duas operações

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

são definidas como adição membro-por-membro e multiplicação de todos membros com um escalar $\beta \in \mathbb{R}$. Checando todos axiomas vê-se que $\mathbb{R}^n$ é um espaco vetorial sobre o corpo dos números reais, notação $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^n$ só. O vetor nulo, também chamado de **origem**, é a lista

$$\mathcal{O} = (0, \ldots, 0)$$

e o inverso de um elemento $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é a lista $(-\alpha_1, \ldots, -\alpha_n)$ a qual denotamos com o símbolo $-u$.

O ***i*-ésimo vetor canônico** é a lista de n membros

$$e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

cujo i-ésimo membro é o número 1 e todos outros sao nulo 0. O conjunto

$$\mathcal{E}^n := \{e_1, \ldots, e_n\} \tag{1.2.1}$$

de todos os vetores canônicos é chamado de **base canônica** de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.2.4 (O espaço vetorial $\mathbb{R}^\infty$ sobre $\mathbb{R}$)**.** O conjunto

$$\mathbb{R}^\infty := \{u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \in \mathbb{R}\}$$

de todas as sequências reais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ sob adição e multiplicação membro-por-membro, notação $(\mathbb{R}^\infty, +, \cdot, \mathbb{R})$.

Exemplo 1.2.5 (O espaço vetorial $\mathbb{R}^\infty_0$ sobre $\mathbb{R}$)**.** O conjunto

$$\mathbb{R}^\infty_0 := \{u \in \mathbb{R}^\infty \mid \text{só um número finito de membros são não-nulos}\}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ sob adição e multiplicação membro-por-membro como no exemplo prévio, notação $(\mathbb{R}^\infty, +, \cdot, \mathbb{R})$.
Dado $i \in \mathbb{N}$, a sequência com todos membros nulos exceto o i-ésimo qual é 1 denotamos também de e_i. O conjunto de todos os e_i's é denotado de

$$\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \ldots\} \tag{1.2.2}$$

e chamado de **base canônica** de $\mathbb{R}^\infty_0$.

Comentário 1.2.6 ($\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^\infty$)**.** Os espaços vetoriais $\mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K}^\infty$ sobre qualquer corpo $\mathbb{K}$ são definidos analogamente Exemplos 1.2.3 e 1.2.4.

1.2.2 Matrizes

Exemplo 1.2.7 (Espaço vetorial das matrizes $m \times n$)**.** O **espaço vetorial das matrizes $\boldsymbol{m \times n}$ sobre um corpo** $\mathbb{K}$ é o conjunto

$$\mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K}) := \left\{ \mathbf{a} = (a_{ij}) \;\middle|\; a_{ij} \in \mathbb{K},\, i = 1, \dots m,\, j = 1, \dots, n \right\}$$

onde a matriz $\mathbf{a} = (a_{ij})$ é o quadro de escalares com m linhas e n colunas [6]

$$\mathbf{a} = (a_{ij}) := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

munido da adição (entrada por entrada)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (c_{ij}), \qquad c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

e da multiplicação escalar (entrada por entrada)

$$\beta \mathbf{a} = \beta\,(a_{ij}) := (c_{ij}), \qquad c_{ij} := \beta a_{ij}$$

para escalares $\beta \in \mathbb{K}$. A matriz $\mathbf{a}^t$ com entradas $(a_{ij})^t = a_{ji}$ é chamada de **transposta** da matriz $\mathbf{a}$. Uma **matriz quadrada** é uma matriz $n \times n$.

O vetor nulo é a matriz nula $\mathbf{0}$ cujas entradas são todas o escalar nulo $0 \in \mathbb{K}$. Se na matriz nula $n \times n$ colocamos o escalar $1 \in \mathbb{K}$ ao longo da diagonal obtemos a **matriz identidade** $\mathbb{1} = \mathbb{1}_n$. O elemento inverso aditivo, notação $-\mathbf{a}$, de uma matriz $\mathbf{a} = (a_{ij})$ tem como entradas os inversos aditivos dos a_{ij}, notação $-a_{ij}$.

No caso do corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ usamos a notação $\mathrm{M}(m \times n) := \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{R})$ para o **espaço vetorial dos matrices reais $\boldsymbol{m \times n}$**.

Definição 1.2.8 (Linhas e colunas de matrizes)**.** Seja $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$ uma matriz $m \times n$. Note-se que o primeiro índice i de uma entrada a_{ij} indica a linha e o segundo j a coluna dela. Tendo isso na vista vamos denotar a **$\boldsymbol{k}$-ésima coluna**, respectivamente a **$\boldsymbol{\ell}$-ésima linha**, de uma matriz $\mathbf{a}$ com os símbolos

$$\mathbf{a}_{\bullet k} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a}_{\ell \bullet} = \begin{bmatrix} a_{\ell 1} & \dots & a_{\ell m} \end{bmatrix} \tag{1.2.3}$$

Temos escolhido o símbolo $\bullet$ para sugerir "este índice é aberto" – ele corre e assim gera uma lista, ou vertical ou horizontal dependente se $\bullet$ fica no primeiro ou no segundo lugar. Assim podemos escrever a matriz $\mathbf{a}$ nas formas seguintes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\bullet} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\bullet} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\bullet 1} & \dots & \mathbf{a}_{\bullet n} \end{bmatrix}$$

[6] Os escalares a_{ij} são chamadas as **entradas da matriz**. Observe que a entrada a_{ij} está localizada na i-ésima linha e j-ésima coluna.

Produto matriz

Para duas matrizes $\mathbf{a}$ de tipo $m \times n$ e $\mathbf{b}$ de tipo $k \times p$ pode se definir o chamado **produto matriz** no caso que $n = k$ coincidem:

$$\mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K}) \times \mathrm{M}(n \times p; \mathbb{K}) \to \mathrm{M}(m \times p; \mathbb{K}), \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{ab} := (c_{ij}) \tag{1.2.4}$$

onde

$$c_{ij} := \mathbf{a}_{i\bullet} \mathbf{b}_{\bullet j} := a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

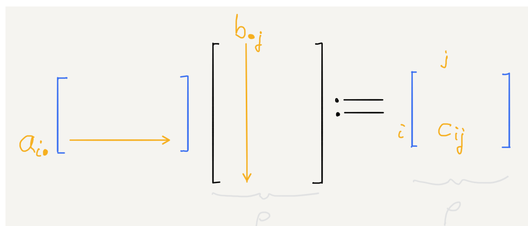

Figura 1.1: Produto matriz – o número de colunas de $\mathbf{a}$ iguale o de linhas de $\mathbf{b}$

Lema 1.2.9 (Propriedades do produto matriz)**.** *Vale o seguinte*

(i) $(\mathbf{cb})\mathbf{a} = \mathbf{c}(\mathbf{ba})$

(ii) $\mathbf{c}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{ca} + \mathbf{cb}$ *e* $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$

(iii) $\mathbf{a}\mathbb{1}_n = \mathbf{a}$ *e* $\mathbb{1}_m \mathbf{a} = \mathbf{a}$ $\qquad \mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$

(iv) $\mathbf{b}(\alpha \mathbf{a}) = \alpha(\mathbf{ba})$

para todos $\alpha \in \mathbb{K}$ *e matrizes* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *tal que as operacoes fazem sentido.*

Definição 1.2.10 (Matriz inversa)**.** Uma matriz quadrada $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{K})$ admite uma inversa se existe uma matriz quadrada $\mathbf{b}$ tal que $\mathbf{ab} = \mathbb{1}_n$, equivalentemente $\mathbf{ba} = \mathbb{1}_n$. Caso existe, tal $\mathbf{b}$ é única e denotado $\mathbf{a}^{-1}$; veja Seção 5.3.1.

Definição 1.2.11 (Matrizes quadradas comutando)**.** Dizemos que duas matrizes quadradas $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathrm{M}(n \times n; \mathbb{K})$ **comutam** se $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$.

1.2.3 Funções e polinômios

Exercício 1.2.12. Dado um conjunto não-vazio $X \neq \emptyset$ e um corpo $\mathbb{K}$, seja

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) := \{f \mid f : X \to \mathbb{K} \text{ função}\}$$

o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{K}$. Adição de funções e multiplicação com um escalar são definidas assim

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

para todos os $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostre que $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Comentário 1.2.13. A próxima observação ilustra o poder da matemática e um *ponto fundamental* dela - economizar através de abstração e *encontrar o certo ponto da vista.*

Observação 1.2.14.

a) Se $X = \{1, \dots, n\}$, então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$.

b) Se $X = \mathbb{N}$, então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^\infty$.

c) Se $X = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$, então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathrm{M}(m \times n)$.

Exercício 1.2.15 (Polinômios $\mathcal{P}(\mathbb{K})$)**.** Dados escalares $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, então chama-se uma soma finita

$$p = p(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$$

de **polinômio** na variável $x \in \mathbb{K}$ e, no caso $\alpha_n \neq 0$, de **grau $\boldsymbol{n}$**. Forneça o conjunto dos polinômios com uma estrutura de um espaço vetorial $(\mathcal{P}(\mathbb{K}), +, \cdot, \mathbb{K})$.

1.2.4 Excurso: Escalonamento de matrizes

Definição 1.2.16 (Operações elementares)**.** Pode-se aplicar para as linhas de uma matriz três tipos de operações, as chamadas **operações elementares**:

$(\mathrm{oe1})_{\updownarrow}$ trocar duas linhas

$(\mathrm{oe2})_{\cdot}$ multiplicar uma linha com um escalar α

$(\mathrm{oe3})_{+}$ adicionar uma linha para uma outra

Processo de escalonamento

Chama-se uma matriz **escalonada** se em cada linha o primeiro elemento não-nulo está à esquerda do primeiro elemento não-nulo da próxima linha. Exemplos

$$\text{escalonadas:} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{não é:} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Numa matriz *escalonada* os primeiros elementos não-nulos das linhas são chamados de **pivôs** da matriz escalonada.

Definição 1.2.17. Uma matriz pode ser transformada numa matriz escalonada aplicando operações elementares. O processo é repetir os três passos seguintes:

1. Localiza a primeira coluna não-nula e nela o primeiro elemento não-nulo, dizemos a. Troca a linha de a e a primeira linha.
2. Embaixo de a anulamos todo elemento não-nulo, dizemos b: Multiplique a linha de b com $-a/b$, depois adiciona a linha de a. Continue ate todos elementos embaixo de a são nulos.

3. Esqueça a linha e a coluna de a e trata a matriz reduzida começando de novo com passo 1.

O processo de escalonar uma matriz $\mathbf{a}$ termina com uma matriz escalonada a qual denotamos de $\mathbf{a}_{\text{esc}}$.

Exemplo 1.2.18. Ilustramos o escalonamento. Seja Li a i-ésima linha.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L1 \leftrightarrow L2]{1.} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2. \atop -\frac{2}{4} L3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[adic. L1]{2. na L3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[e\ col. de\ 2]{3. esq. linha} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e agora começamos de novo com passo 1 tratando a matriz reduzida

$$\xrightarrow[L2 \leftrightarrow L2]{1.} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2. \atop -\frac{1}{1} L3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[adic. L2]{2. na L3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicação: Sistemas lineares

Seja $\mathbf{a}$ uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$ uma lista ordenada com m membros. Agora adiciona para as n colunas de $\mathbf{a}$ a lista b como a $(n+1)$-ésima coluna para obter a chamada **matriz aumentada**, notação

$$[\mathbf{a} : b] := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Definição 1.2.19. Suponha a matriz $\mathbf{a}$ e a lista b são dadas. Então queremos saber se existe uma solução $x = (x_1, \dots, x_n)$ da equação $\mathbf{a}x = b$, ou seja do **sistema linear (SL) de m equações a n incógnitas**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.2.5}$$

É útil chamar a matriz aumentada $[\mathbf{a} : b]$ o **sistema linear** definido por (1.2.5). A lista $b = (b_1, \dots, b_m)$ é chamada de **inomogeneidade** do sistema linear. O caso $b = \mathcal{O} = (0, \dots, 0)$ chama-se de **sistema linear homogêneo (SLH)**.

O sistema linear pode ser escrito equivalentemente na forma

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{1.2.6}$$

O lado esquerdo é um exemplo de uma chamada “combinação linear” das colunas $\mathbf{a}_{\bullet 1}, \ldots, \mathbf{a}_{\bullet n}$ da matriz $\mathbf{a}$, veja (1.2.3), representando o vetor b – um conceito fundamental o qual vamos tratar no próximo parágrafo.

Comentário 1.2.20. Note-se que o lado esquerdo de (1.2.6) corre sobre toda a imagem da matriz $\mathbf{a}$ se variamos x sobre todas as listas. Então um SL $[\mathbf{a} : b]$ tem uma solução se e somente se a lista b é elemento da imagem da matriz $\mathbf{a}$.

Lembramos do curso MA141 “Geometria Analítica” o seguinte

Teorema 1.2.21. *Uma lista x é solução do sistema linear $[\mathbf{a} : b]$ se e somente se x é solução do sistema linear associado à matriz escalonada $[\mathbf{a} : b]_{\mathrm{esc}}$.*

Exemplo 1.2.22 (Resolução de um sistema linear usando escalonamento)**.** Para encontrar as soluções $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ do sistema linear

$$\begin{cases} \quad\;\; y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ \;\; 4x - 2z = 0 \end{cases}$$

primeiro, formamos a matriz aumentada $[\mathbf{a} : b]$ onde $b = (0, 0, 0) =: \mathcal{O}$, segundo, escalonamos ela, e terceiro, **resolvemos “de baixo para cima”**. Segundo Teorema 1.2.21 uma solução de $[\mathbf{a} : b]_{\mathrm{esc}}$ também resolve $[\mathbf{a} : b]$, e vice versa. Exemplo 1.2.18 mostra as matrizes $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}_{\mathrm{esc}}$. Note-se que no caso especial quando um sistema linear é *homogêneo*, ou seja $b = \mathcal{O}$, vale a fórmula seguinte

$$[\mathbf{a} : \mathcal{O}]_{\mathrm{esc}} = [\mathbf{a}_{\mathrm{esc}} : \mathcal{O}]$$

No nosso caso o lado direito desta fórmula representa o SLH

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ \quad\;\; y + 2z = 0 \\ \qquad\quad\; 0 = 0 \end{cases}$$

Resolução “de baixo para cima”:

Linha 3. Começamos embaixo com a ultima linha $0x + 0y + 0z = 0$ a qual não representa nenhuma restrição para x, y, z.
Linha 2. Progredimos para cima, ou seja para a linha dois $y + 2z = 0$. Escolha uma variável para ser a variável dependente da(s) outra(s) variáveis, as quais variam livremente no corpo. No nosso caso só tem uma outra e o corpo é $\mathbb{R}$. Escolhemos por exemplo como variável dependente $y = y(z) = -2z$ como função da variável z a qual varia livremente sobre os números reais, ou seja $z \in \mathbb{R}$.
Linha 1. Progredimos para cima, ou seja para a primeira linha

$$0 = 2x + y(z) + z = 2x - 2z + z = 2x - z$$

lembrando que $z \in \mathbb{R}$ é livre. Então $x = x(z) = \frac{1}{2}z$ para qualquer $z \in \mathbb{R}$.

Conclusão. Toda solução do SL é da forma

$$\begin{bmatrix} x(z) \\ y(z) \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}z \\ -2z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde $z \in \mathbb{R}$ é um número real arbitrário. Então o SL não tem só uma solução – tem uma para cada um numero real z. Isso conclui o Exemplo 1.2.22.

Comentário 1.2.23 (Corpos gerais $\mathbb{K}$)**.** As construções nesta Seção 1.2.4 para matrizes e listas cujas entradas são elementos do corpo $\mathbb{R}$ funcionam do mesmo jeito para matrizes com entradas num corpo geral $\mathbb{K}$.

1.3 Independência linear

1.3.1 Combinação linear

Depois da aula 3 foram adicionadas ou modificadas as partes em marrom:

Definição 1.3.1. Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $X \subset E$ um subconjunto. Uma **combinação linear estrita (CLe) em X** é uma soma *finita*

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_\ell v_\ell}_{=:w \in E} \tag{1.3.1}$$

de vetores $v_1, \ldots, v_\ell \in X \setminus \{\mathcal{O}\}$ *dois-a-dois diferentes* e escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, vetores e escalares todos não-nulos.[7]

A palavra mais importante em cima é "finita". Ainda que os vetores $v_1, \ldots, v_\ell$ em (1.3.1) são elementos do conjunto X, a soma deles não necessariamente encontra-se mais em X. Encontra-se sim, quando X é um chamado "subespaço" (Lema 2.1.2).

Definição 1.3.2. Como encontra-se frequentemente somas finitas gerais

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_\ell v_\ell, \qquad \alpha_j \in \mathbb{K}, \quad v_j \in E$$

vamos chamar tal de **combinação linear (CL)** como é costume na literatura. Dizemos que

"A CLe dos vetores $v_1, \ldots, v_\ell$ representa o vetor w."

ou

"O vetor w é CLe dos vetores $v_1, \ldots, v_\ell$."

[7] Permitindo $\mathcal{O}$ e 0, ou não, não faz nenhuma diferença para os valores de (1.3.1). Então permitir é desnecessário, mas na matemática a desnecessidade é o **inimigo da clareza**. Temos adicionado o adjetivo 'estrito' porque a terminologia 'combinação linear' já é ocupada.

Exercício 1.3.3. Seja $X \subset E$ nao vazio, mostre que são conjuntos iguais

$$\begin{aligned} &\{\text{todas as combinações lineares em } X\} \cup \{\mathcal{O}\} \\ &= \{\text{todas as combinações lineares generalizadas em } X\} \end{aligned}$$

Definição 1.3.4. Por definição a frase

"combinação linear dos vetores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \dots$"

significa

"combinação linear no conjunto $\{u, v, \dots\}$"

A diferença é que assim *não precisamos usar todos os vetores*. (O que elimina qualquer necessidade de colocar o escalar 0 em frente dos não necessários.)

Exercício 1.3.5. a) Caso possível escreva o vetor $b = (1, -3, 10)$ como combinação linear dos vetores $u = (2, -3, 5)$, $v = (1, 1, 0)$, e $w = (1, 0, 0)$.
b) Sejam $u = (1, 1)$, $v = (1, 2)$ e $w = (2, 1)$. Encontre números a, b, c e α, β, γ todos não-nulos, tais que

$$au + bv + cw = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

com $a \neq \alpha$, $b \neq \beta$ e $c \neq \gamma$.

[Dica: a) Determinar os coeficientes α, β, γ na CL de u, v, w a qual representa b lida a um SL. Escalonamento.[8]
b) Defina $x = a - \alpha$, $y = b - \beta$, e $z = c - \gamma$ para obter um SLH. Resolve.][9]

1.3.2 Independência linear

Definição 1.3.6 (Independência linear)**.** Um subconjunto X de um espaço vetorial E é dito de **conjunto linearmente independente (LI)** se não existe nenhuma combinação linear estrita (CLe) em X representando o vetor nulo. Caso existisse, o X é chamado de **conjunto linearmente dependente (LD)**.

Nas outras palavras, chama-se $X \subset E$ de **conjunto LI** se

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_\ell v_\ell = \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_\ell = 0 \tag{1.3.2}$$

para toda escolha (finita) de vetores $v_1, \ldots, v_\ell \in X$ *dois-a-dois diferentes*.[10]

Comentário 1.3.7.

(i) O conjunto vazio $\emptyset$ é LI: Com efeito, como não contem elementos, não admite nenhuma CL. Chama-se tal argumentação de **verdade vazia**.

[8] encontre "o certo ponto da vista" (Comentário 1.2.13) e o SL vai chegar já escalonada..
[9] Respostas para seu controle: a) $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, -6)$. b) $(x, y, z) = z(-3, 1, 1)$. Escolha um $z \neq 0$, por exemplo $z = 1$. Então $(a, b, c) = (\alpha - 3, 1 + \beta, 1 + \gamma)$. Toda escolha de reais $\alpha \neq 0, 3$ e $\beta, \gamma \neq 0, -1$ da uma solução. A escolha $\alpha = 5$ e $\beta = \gamma = 1$ resulta em $a = b = c = 2$.
[10] Para que precisa-se a condição *dois-a-dois diferentes*?

(ii) Um conjunto $X = \{v\}$, contendo só um vetor, é LI se e somente se $v \neq \mathcal{O}$.

(iii) Se (1.3.2) vale para uma escolha $v_1, \dots, v_\ell$, então vale para qualquer sub-escolha destes vetores. [Use os coeficientes $\alpha_i = 0$ nos restantes.]

Para provar a afirmação (ii), lembra (1.1.3).

Lema 1.3.8. *Seja X um subconjunto de um espaço vetorial E.*

a) $\mathcal{O} \in X \Rightarrow X$ *LD.* *(O vetor nulo rende conjuntos LD)*

b) *Todo subconjunto A de um conjunto LI X é LI.*

Demonstração. a) O termo $1\mathcal{O}$ é uma CLe em X representando o vetor nulo (segundo Lema 1.1.17). b) Os elementos de A são elementos de X – para as quais (1.3.2) vale pela hipótese. □

Exemplo 1.3.9. Para saber se o subconjunto $X := \{(1,0),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é LI temos que checar (1.3.2) para todas escolhas finitas de elementos v_i de X dois-a-dois diferentes. Como X é um conjunto finito, e tendo em vista Comentário 1.3.7 (iii), começamos com a escolha máxima, ou seja todos os (dois) elementos. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Conforme (1.3.2) suponhamos a primeira igualdade

$$(0,0) = \alpha(1,0) + \beta(2,1) = (\alpha + 2\beta, \beta)$$

e recebemos a segunda igualdade pelas regras de multiplicação escalar e adição de vetores de $\mathbb{R}^2$. Comparando os segundos membros vemos que $0 = \beta$ o qual usamos na comparação dos primeiros membros: recebemos $0 = \alpha + 2 \cdot 0 = \alpha$. Assim temos provado que ambos os coeficientes α e β são nulos. Então X é LI.

Exercício 1.3.10. Quais dos seguintes conjuntos X_i de vetores de $\mathbb{R}^2$ são ou não são conjuntos linearmente independentes (LI)? Explique porque são ou não são.

1. Elementos de X_1: os vetores $(1,1)$ e $(-1,-1)$.
2. $X_2 := \{(2, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 2)\}$.
3. Escolha dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$. Então defina $X_3 := \{u, v, (1,1)\}$.

Exercício 1.3.11. Prove as afirmações seguintes.

1. A base canônica $\mathcal{E}^n$ em (1.2.1) é um conjunto LI no $\mathbb{R}^n$ para $n \in \mathbb{N}$.
2. A base canônica $\mathcal{E}^\infty$ em (1.2.2) é um conjunto LI no $\mathbb{R}^\infty_0$ e no $\mathbb{R}^\infty$.
3. Suponha $u, v \in \mathbb{K}^2$ não são múltiplos um do outro. Prove que o conjunto $\{u, v\}$ é LI.

   [Dica: Seja $\alpha u + \beta v = \mathcal{O}$. Considere $\beta \neq 0$ e, lembrando (1.1.3), $\beta = 0$.]
4. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ vetores de $\mathbb{R}^n$. Prove que um deles é múltiplo do outro se, e somente se, para todo $i, j = 1, \dots, n$ temos $x_i y_j = x_j y_i$.

5. O subconjunto $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subset \mathrm{M}(2 \times 2)$ composto das matrizes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   é um conjunto LI.

6. O conjunto X composto dos três polinômios

$$\begin{aligned} p = p(x) &= x^3 - 5x^2 + 1 \\ q = q(x) &= 2x^4 + 5x - 6 \\ r = r(x) &= x^2 - 5x + 2 \end{aligned}$$

   é um conjunto LI no espaço vetorial $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios.

7. Se o conjunto de vetores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é LI, prove que o mesmo se dá com o conjunto $\{v_1, v_2 - v_1, \ldots, v_m - v_1\}$. Vale a recíproca?

Capítulo 2

Subespaços

Subespaços de um espaço vetorial E são subconjuntos F as quais são invariante pelas duas operações chegando com E. Assim faz sentido restringir as duas operações a F. Munidos das restrições F torna-se um espaço vetorial mesmo.

2.1 Definição e exemplos

Definição 2.1.1. Um subconjunto $F \subset E$ de um espaço vetorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ é chamado de **subespaço** se é **fechado sob as duas operações**, ou seja

(i) $u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$ (F é fechado sob adição)

(ii) $\alpha \in \mathbb{K}, u \in F \Rightarrow \alpha u \in F$ (F é fechado sob multiplicação escalar)

Lema 2.1.2. *Seja F um subespaço de um espaço vetorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$. Então*

a) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, $v_1, \ldots, v_k \in F \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \in F$ *(fechado sob CL)*

b) *F é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ onde as duas operações são aquelas de E restrito ao subconjunto $F \subset E$.* *(subespaços são espaços vetoriais)*

Demonstração. a) Indução. b) As restrições tomam valores em F segundo parte a) e as axiomas valem como os elementos de F são elementos de E para as quais os axiomas valem pela hipótese que E é um espaço vetorial. □

Exercício 2.1.3 (Vetor nulo)**.** O vetor nulo de um subespaço F é o vetor nulo $\mathcal{O}$ do espaço vetorial ambiente. [Dica: Mostre $\mathcal{O} \in F$. O vetor nulo de F é único.]

Checar se um subconjunto $F \subset E$ é um espaço vetorial é bastante trabalhoso dado os muitos axiomas. Isso mostra o valor alto da parte b) do lema dizendo que é suficiente checar "fechado sob as duas operações" – tarefa rapidinha.

Exercício 2.1.4. Mostre que o espaço vetorial $\mathbb{R}$ só tem dois subespaços $\{0\}$ e $\mathbb{R}$.

Exercício 2.1.5. Mostre que são subespaços de um espaço vetorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$:

a) $F := \{\mathcal{O}\}$ (o subespaço mínimo / trivial)

a) $F := E$ (o subespaço máximo)

b) $\mathbb{K}v := \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ (a reta passando v e a origem $\mathcal{O}$)
onde v é um vetor não-nulo de E. Observe que $\mathbb{K}\mathcal{O} = \{\mathcal{O}\}$ é um ponto só.

Exemplo 2.1.6 (O subespaço $\mathbb{R}_0^\infty$ de $\mathbb{R}^\infty$)**.** O subconjunto $\mathbb{R}_0^\infty \subset \mathbb{R}^\infty$, composto de todas sequências reais tal que só um número finito de membros são nao-nulos, é um espaço vetorial: Se a lista u tem k membros não-nulos e v tem ℓ, então (i) $u+v$ tem no máximo $k+\ell$ e (ii) αu tem no máximo k.

Exercício 2.1.7 (Espaços vetoriais de funções)**.** O conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R}) := \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ das funções reais é um espaço vetorial sob adição e multiplicação com constantes $\alpha \in \mathbb{R}$, veja Exercício 1.2.12. Para $n \in \mathbb{N}_0$ seja

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) := \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto dos **polinômios reais do grau menor ou igual $\boldsymbol{n}$** e $\mathcal{P}(\mathbb{R}) := \cup_{n=0}^\infty \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os **polinômios reais**. Seja

$$C^0(\mathbb{R}) := C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$$

o conjunto das **funções contínuas**. Para $k \in \mathbb{N}$ seja $C^k(\mathbb{R}) := C^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$ o conjunto das **funções $\boldsymbol{k}$ vezes continuamente diferenciáveis**. Chama-se

$$C^\infty(\mathbb{R}) := C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\mathbb{R})$$

o conjunto das **funções suaves**. Sejam $n \in \mathbb{N}_0$ e $k \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^k(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

são subespaços do espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ do Exercício 1.2.12. Segundo parte b) do Lema 2.1.2 todos estes conjuntos são espaços vetoriais sob adição de funções e multiplicação com constantes.

Exemplo 2.1.8 (Hiperplanos no $\mathbb{R}^n$)**.** Dada uma lista $\alpha \in \mathbb{R}^n$, o subconjunto

$$\mathrm{H}_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. O vetor nulo lida ao subespaço máximo $\mathrm{H}_\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$. No caso não-nulo $\alpha \neq \mathcal{O}$ chama-se H_α de **hiperplano** no $\mathbb{R}^n$ passando a origem $\mathcal{O}$.

Lema 2.1.9 (Conjunto de subespaços é fechado sob interseções)**.** *Cada interseção $F := \cap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ de subespaços F_λ de um espaço vetorial E é um subespaço.*

Demonstração. Dado $u, v \in F := \cap_\lambda F_\lambda$, ou seja $u, v \in F_\lambda$ $\forall \lambda$. Como subespaço cada um F_λ é fechado sob adição, ou seja $u + v \in F_\lambda$ para todos os $\lambda \in \Lambda$. Em símbolos $u + v \in \cap_\lambda F_\lambda =: F$. Analogamente F é fechado sob mult. escalar. □

Exemplo 2.1.10. Dada uma matriz $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n)$, então o conjunto

$$F_{\mathbf{a}} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}x = \mathcal{O}\}$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Para ver isso lembramos de (1.2.5) que $\mathbf{a}x = \mathcal{O}$ é o SLH

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

para n incógnitas $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, notação $x := (x_1, \ldots, x_n)$. Note-se que as soluções x da primeira linha formam o hiperplano $\mathrm{H}_1 := \mathrm{H}_{\mathbf{a}_{1\bullet}}$ associado à primeira linha $\mathbf{a}_{1\bullet}$ da matriz $\mathbf{a}$. Isso é o certo ponto da vista, com efeito assim

$$F_{\mathbf{a}} = \mathrm{H}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{H}_m$$

é uma interseção de subespaços e por isso é um subespaço segundo Lema 2.1.9.

Exercício 2.1.11.

1. Quais dos seguintes subconjuntos X_j são subespaços de $\mathbb{R}^n$? Em cada caso faça um desenho e explique porque é subespaço ou não é.
   (a) $X_1 := \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$;
   (b) $X_2 := \{(\alpha + 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$;
   (c) $X_3 := \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta$ reais não-negativos$\} \subset \mathbb{R}^2$.

2. (LI transfere-se a espaços vetoriais *ambientes*). Seja F um subespaço de um espaço vetorial E. Mostre que se um subconjunto de F é LI em respeito ao espaço vetorial F então o também é LI em respeito ao espaço vetorial ambiente E.

2.2 Conjuntos gerandos

Definição 2.2.1 (Subespaço gerado por um subconjunto)**.** Seja E um espaço vetorial e X um subconjunto. O **subespaço de *E* gerado por *X*** é o conjunto[1]

$$\langle X \rangle : = \{\text{todas as combinações lineares estritas em } X\} \cup \{\mathcal{O}\}$$

veja Exercício 1.3.3. Note: O conjunto vazio gera o subespaço trivial $\{\mathcal{O}\} = \langle \emptyset \rangle$. Se $\langle X \rangle = E$ dizemos que **o conjunto *X* gera *E***. Neste caso cada um elemento de E é uma CL de elementos de X.

Exercício 2.2.2. Mostre que $\langle X \rangle$ é um subespaço de E e que $\mathbb{K}v = \langle \{v\} \rangle =: \langle v \rangle$.

Lema 2.2.3. *Seja X um subconjunto de um espaço vetorial* $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$*. Então*

[1] Lembre-se da nossa convenção (1.1.1) para conjuntos, por exemplo $\{2, 2\} = \{2\}$.

(i) $X \subset \langle X \rangle$ (contido no subespaço gerado)

(ii) $Y \subset X \Rightarrow \langle Y \rangle \subset \langle X \rangle$ (naturalidade sob inclusão)

(iii) $F \subset E$ *subespaço* $\Rightarrow \langle F \rangle = F$ (não muda subespaços)

(iv) *Um subespaço* $F \subset E$ *contendo* X *contem* $\langle X \rangle$. (respeita subespaços)

Demonstração. (i) Seja $v \in X$, então $v \overset{\text{(comp.)}}{=} 1v \in \langle X \rangle$. (ii) Como $Y \subset X$, CLe's em Y são CLe's em X. (iii) Igualdade é consequência das duas inclusões $F \subset \langle F \rangle \subset F$, onde a primeira é (i) e para a segunda usamos que os elementos de $\langle F \rangle$ são CL's em F, mas um subespaço é fechado sob CL's segundo Lema 2.1.2 a). (iv) Com efeito $F \overset{\text{(iii)}}{=} \langle F \rangle \overset{\text{(ii)}}{\supset} \langle X \rangle$. □

Lema 2.2.4. *Todo subconjunto LI* $\{u, v\} \subset \mathbb{R}^2$ *de dois elementos já gera* $\mathbb{R}^2$.

Demonstração. Lema A.2.1. □

Lema 2.2.5 (Os subespaços de $\mathbb{R}^2$)**.** $\{\mathcal{O}\}$, $\mathbb{R}^2$, *e as retas passando a origem.*

Demonstração. '$\supset$' Exercício 2.1.5. '$\subset$' Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^2$. Caso $F = \{\mathcal{O}\}$, pronto. Caso contrario existe $u \in F$ não-nulo. Se os demais $f \in F$ são múltiplos de u temos $F = \mathbb{R}u$, pronto. Caso contrario existe um $v \in F$, não múltiplo de u. Então $\{u, v\}$ é LI segundo Exercício 1.3.11 parte 2. Mas neste caso segundo Lema 2.2.4 e Lema 2.2.3 (iv) obtemos $\mathbb{R}^2 = \langle \{u, v\} \rangle \subset F \subset \mathbb{R}^2$. □

Exemplo 2.2.6 (Os espaços $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^\infty_0$, $\mathbb{R}^\infty$)**.**

a) A base canônica $\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$, veja (1.2.1), gera $\mathbb{R}^n$. Com efeito

$$\mathbb{R}^n \ni v = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A base canônica $\mathcal{E}^0 := \emptyset$ gera o subespaço vetorial trivial $\{0\} =: \mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}$.

b) Dado $i \in \mathbb{N}$, a sequência com todos membros nulos exceto o i-ésimo qual é 1 denotamos também de e_i. A **base canônica** $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$ gera $\mathbb{R}^\infty_0$.

c) A base canônica $\mathcal{E}^\infty$ não gera $\mathbb{R}^\infty$: Uma CLe deve ser uma soma *finita*, tente escrever a sequência cujos membros são todos 1 como uma CL.

Exemplo 2.2.7 (Polinômios)**.** O conjunto de **monômios** $\{x^0, x, x^2, \dots, x^n\}$ onde $x^0 := 1$ gera $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Todos os monômios $\{1, x, x^2, \dots\}$ geram $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exemplo 2.2.8 (Sistemas lineares)**.** Dado um sistema linear $[\mathbf{a} : b]$ onde $\mathbf{a}$ é uma matriz $m \times n$. Sabemos de (1.2.6) que existe uma solução x se e somente se a lista b é CL das colunas da matriz $\mathbf{a}$. Consequentemente se as colunas de $\mathbf{a}$ formam um conjunto de geradores de $\mathbb{R}^m$, então para cada uma inomogeneidade $b \in \mathbb{R}^m$ o SL admite uma solução.

2.3 Soma direta

Definição 2.3.1 (Soma de subconjuntos)**.** A **soma de subconjuntos X e Y** de um espaço vetorial E é o conjunto de todas as somas

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\} \subset E$$

Em vez de $\{u\} + Y$ escreve-se $u + Y$ e chama-se **a translação de Y por u**.

Lema 2.3.2. *A soma de dois subespaços é gerado da união deles, em símbolos*

$$F, G \subset E \text{ subespaços} \quad \Rightarrow \quad F + G = \langle F \cup G\rangle$$

Particularmente, a soma de dois subespaços é um subespaço mesmo.

Demonstração. Para provar igualdade de dois conjuntos prova-se as duas inclusões. '$\subset$' Os elementos de $F + G$ são CL's da forma especial $f + g$ enquanto $\langle F \cup G\rangle$ contem todas as CL's em $F \cup G$.

'$\supset$' Pegue um elemento h de $\langle F \cup G\rangle$ e use comutatividade para re-escrever a soma finita com os somandos em F no frente e depois aqueles em G. Assim recebemos um elemento, igual h, em $F + G$. □

Definição 2.3.3 (Soma direta de subespaços)**.** Sejam $F_1, F_2 \subset E$ subespaços de um espaço vetorial E. No caso da interseção trivial $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$ escreve-se $F_1 \oplus F_2$ em vez de $F_1 + F_2$ e chama-se **soma direta dos subespaços F_1 e F_2.**

O símbolo $F \oplus G$ é simplesmente uma abreviação para duas informações, com efeito

$$F \oplus G = H \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} F \cap G = \{\mathcal{O}\} \\ F + G = H \end{cases}$$

Use-se a soma direta para decompor um vetor unicamente em componentes.

Teorema 2.3.4. *Sejam $F_1, F_2 \subset F$ três subespaços de um espaço vetorial E:*

$$F = F_1 \oplus F_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \in F,\ \exists!\ f_1 \in F_1,\ f_2 \in F_2 \ \textit{ tal que } \ f = f_1 + f_2$$

Demonstração. Teorema A.2.2. □

Exercício 2.3.5. No espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ das funções $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sejam

$$F_1 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ que se anulam em todos os pontos do intervalo } [0,1]\}$$
$$F_2 = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ que se anulam em todos os pontos do intervalo } [2,3]\}$$

Mostre que F_1 e F_2 são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, que $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = F_1 + F_2$, mas não se tem $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_2$.

Exercício 2.3.6. Verdadeiro ou falso? Para todos subconjuntos $X, Y \subset E$ vale

(i) $\langle X \cup Y\rangle = \langle X\rangle + \langle Y\rangle$

(ii) $\langle X \cap Y\rangle = \langle X\rangle \cap \langle Y\rangle$

Exercício 2.3.7. Uma matriz quadrada $\mathbf{a} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ chama-se

$$\textbf{simétrica se } a_{ij} = a_{ji}\ \forall i,j \qquad \textbf{anti-simétrica se } a_{ij} = -a_{ji}\ \forall i,j$$

Então as matrizes simétricas sao aquelas iguais às suas transpostas $\mathbf{a}^t = \mathbf{a}$ e as anti-simétricas aquelas com $\mathbf{a}^t = -\mathbf{a}$.

Prove que a) o conjunto $\mathcal{S} = \mathcal{S}(n)$ das matrizes simétricas $n \times n$ e o conjunto $\mathcal{A} = \mathcal{A}(n)$ das anti-simétricas são subespaços de $\mathrm{M}(n \times n; \mathbb{K})$ e b) que

$$\mathrm{M}(n \times n; \mathbb{K}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

[Dica: b) Considere as duas matrizes $\mathbf{a}^{\pm} := \frac{1}{2}(\mathbf{a} \pm \mathbf{a}^t)$.]

Capítulo 3

Bases

Durante o Capítulo 3 denotamos de E um espaço vetorial

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K})$$

sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Bases de um espaço vetorial E sao subconjuntos LI as quais geram E no sentido que todo vetor de E pode ser escrito como combinação linear (CL) dos elementos da base. Os coeficientes escalares na CL são únicos (propriedade LI) e chamados de coordenadas de um vetor em respeito à base. Quando E admite uma base finita de n elementos chama-se n a dimensão de E. Se escolhemos uma outra base, recebemos uma outra dimensão? Veremos na Seção 3.1.2 que não: Se E admite uma base finita todas as bases tem o mesmo número de elementos.

Então bases são LI, contem suficientemente muitos elementos para que todo vetor pode ser escrito como CL deles, e na dimensão finita bases ainda são conjuntos máximos no sentido que só adicionando mais um outro vetor já recebe-se um conjunto LD.

Definição 3.0.8 (Base)**.** Para um subconjunto $\mathcal{B}$ de E definimos

$$\mathcal{B} \textbf{ base de } E \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{B} \text{ gera } E \\ \mathcal{B} \text{ é LI} \end{cases}$$

Uma **base ordenada** é uma base $\mathcal{B} = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ cujos elementos são enumerados, equivalentemente escreve-se na forma de uma lista ordenada $(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Conjuntos enumerados correspondem a sequências, listas caso finito.

Exercício 3.0.9. Se $E = F_1 \oplus F_2$, mostre que uma união $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ de bases de F_1 e F_2 é uma base de E. [Dica: União LI – ideia de (A.2.1).]

Exemplo 3.0.10. Sejam $u = (1, 1)$ e $v = (2, 0)$. Os conjuntos $\{e_1, u\}$ e $\{u, v\}$ são bases de $\mathbb{R}^2$. Ambos conjuntos são LI segundo Teorema 3.1.1 (os elementos não são múltiplos um do outro), e por isso geram $\mathbb{R}^2$ (Lema A.2.1). Um exemplo para LD é o conjunto $\{e_1, v\}$, no qual um elemento é múltiplo do outro.

Exemplo 3.0.11 (Bases canônicas)**.**

a) **Listas.** Base canônica $\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ onde $n \in \mathbb{N}_0$.

   Caso $n \geq 1$. Exercício 1.3.11 confirma LI, Exercício 2.2.6 diz que gera $\mathbb{R}^n$. Caso $n = 0$. Note que $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ é o espaço vetorial trivial. O conjunto vazio $\mathcal{E}^0 = \emptyset$ é LI (Comentário 1.3.7) e gera o espaço trivial (Definição 2.2.1).

   $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$, veja Exemplo 2.2.6, não é base do $\mathbb{R}^\infty$, é sim do $\mathbb{R}^\infty_0$.

b) **Matrizes.** Seja $\mathbf{e^{ij}} \in \mathrm{M}(m \times n)$ a matriz com todas entradas nulas exceto a ij-ésima entrada a qual é $(\mathbf{e^{ij}})_{ij} = 1$. A base canônica de $\mathrm{M}(m \times n)$ é

$$\mathcal{E}^{m\times n} := \{\mathbf{e^{ij}} \mid i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\} \subset \mathrm{M}(m \times n)$$

   Note-se que a base canônica tem $|\mathcal{E}^{m\times n}| = mn$ elementos.

c) **Polinômios.** Base canônica são monômios $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

   Gerando: Por definição de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. LI: Uma CL de monômios é um polinômio $p \not\equiv 0$ (não constantemente nulo). Se p representa o vetor nulo (o polinômio constantemente nulo) todos coeficientes devem se anular porque polinômios de grau $\ell \geq 1$ tem um numero finito de raizes. Caso p é de grau zero, ele é da forma $p(x) = \alpha_0 x^0$ e para se anular α_0 deve-se anular.

   Analogamente $\{1, x, \dots, x^n\}$ é uma base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}$.

d) **Hiperplanos.** Dado uma lista $\alpha \in \mathbb{R}^n$ com $\alpha_n \neq 0$, o hiperplano

$$\mathrm{H}_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}$$

   tem como base o conjunto $\mathcal{B}_\alpha := \{\xi_1, \dots \xi_{n-1}\}$ no qual a lista

$$\xi_i := \left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -\tfrac{\alpha_i}{\alpha_n}\right) \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n-1$$

   tem todos membros nulos exceto o i-ésimo e o último. É óbvio que $\mathcal{B}_\alpha$ é LI, que gera $\mathbb{R}^n$ podemos ver assim: Para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\begin{aligned}
& x \in \mathrm{H}_\alpha \\
\Leftrightarrow\quad & 0 = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \\
\Leftrightarrow\quad & x_n = -\tfrac{\alpha_1}{\alpha_n} x_1 - \dots - \tfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1} \\
\Leftrightarrow\quad & x = \left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\tfrac{\alpha_1}{\alpha_n} x_1 - \dots - \tfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1}\right) \in \mathbb{R}^n \\
\Leftrightarrow\quad & x = x_1 \xi_1 + \dots + x_{n-1} \xi_{n-1}
\end{aligned}$$

3.1 Aplicações

3.1.1 Coordenadas de um vetor

Teorema 3.1.1. *Seja $X \subset E$ um subconjunto tal que $|X| \geq 2$. Então*

a) *X é LI $\Leftrightarrow$ nenhum elemento de X é CL de outros elementos de X*

b) *X é LD $\Leftrightarrow$ existe um elemento de X que é CL de outros elementos de X*

Demonstração. a) '$\Rightarrow$' Seja X LI, suponha por absurdo que um elemento $u \in X$ fosse CL $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$ de outros elementos v_j (tem outros como $|X| \geq 2$). Adicionando $-u$ em ambos lados obtemos $\mathcal{O} = (-1)u + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$. Como $-1 \neq 0$, e depois descartar os termos com coeficientes nulos, trata-se de uma CLe em X representando o vetor nulo. Assim X é LD. Contradição.
'$\Leftarrow$' Suponhamos por absurdo X fosse LD. Então existe uma CLe em X

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \mathcal{O}$$

representando o vetor nulo. Caso $k = 1$. Então $\alpha_1 v_1 = \mathcal{O}$ e assim $v_1 = \alpha_1^{-1}\mathcal{O} = \mathcal{O}$. Contradição. Caso $k \geq 2$. Então $v_1 = -\alpha_1^{-1}\alpha_2 v_2 - \cdots - \alpha_1^{-1}\alpha_k v_k$ é CL de outros elementos de X. Contradição. b) é equivalente à parte a). □

Corolário 3.1.2 (Unicidade dos coeficientes de CL's em conjuntos LI)**.** *Seja $\{v_1, \dots, v_k\}$ um subconjunto LI de E, então*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_k = \beta_k$$

Em palavras, se duas CL's num conjunto LI representam o mesmo vetor, então os coeficientes escalares coincidem.

Demonstração. $\alpha_1 - \beta_1 = 0$: Suponha por absurdo $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$. Então o vetor

$$v_1 = (\alpha_1 - \beta_1)^{-1}\left((\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)v_k\right)$$

é CL de outros elementos. Contradição. Análogo para os outros $\alpha_j - \beta_j$.
Outro argumento (usando LI): Pela hipótese $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)v_k = \mathcal{O}$. LI diz que todos coeficientes são nulos. □

Lema 3.1.3.

a) Um subconjunto Y de um conjunto LI X é LI. *(Subconjuntos herdam LI)*

b) Um conjunto X contendo um Y LD é LD. *(Superconjuntos herdam LD)*

c) Um subconjunto LI X num subespaço $F \subset E$, também é LI em E.
(LI transfere-se para superespaços)

Demonstração. a) Como X é LI, toda CL em X representando $\mathcal{O}$ tem todos coeficientes nulos. Como $Y \subset X$, toda tal CL em Y é uma em X e assim tem todos coeficientes nulos. b) Como $Y \subset X$, uma CLe em Y representando $\mathcal{O}$ é uma tal em X. c) Isso é simplesmente o fato que o vetor nulo de um subespaço é o vetor nulo do espaço vetorial ambiente, veja Exercício 2.1.3. □

Comentário 3.1.4 (Consequências das duas propriedades de ser base $\mathcal{B}$ de E)**.** $\langle B \rangle = E$: Assim todo $v \neq \mathcal{O}$ pode ser escrita como CL em $\mathcal{B}$, com efeito

$$v = \alpha_1 \xi_1 + \cdots + \alpha_k \xi_k \tag{3.1.1}$$

para escalares $\alpha_i \in \mathbb{K}$ e vetores $\xi_j \in \mathcal{B}$ da base.
$\mathcal{B}$ é LI: Assim os coeficientes α_j em cima são únicos (Corolário 3.1.2).

> *Todo vetor $v \in E$ admite coordenadas únicas $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ em respeito a uma base ordenada $\mathcal{B}$ de E.*

Definição 3.1.5 (Coordenadas)**.** Suponha $\mathcal{B} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ é uma base ordenada de um espaco vetorial E. As **coordenadas** de um vetor $v \in E$ em respeito à base $\mathcal{B}$ são os coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ em (3.1.1). A matriz $n \times 1$ das coordenadas

$$[v]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n \tag{3.1.2}$$

é chamado de **vetor coordenada** de v em respeito à base $\mathcal{B}$. Abreviamos $[v] := [v]_{\mathcal{E}^m}$ no caso de $E = \mathbb{K}^m$ munido da base canônica $\mathcal{E}^m$.

Lema 3.1.6. *Duas bases $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ e $\widetilde{\mathcal{B}}$ de E são iguais se e somente se cada um elemento de E tem o mesmo vetor coordenada em respeito a $\mathcal{B}$ e a $\widetilde{\mathcal{B}}$. Em símbolos*

$$[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\widetilde{\mathcal{B}}} \quad \forall v \in E \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{B} = \widetilde{\mathcal{B}}$$

Demonstração. "$\Rightarrow$" A hipótese para $v := \xi_1$ diz que $[\xi_1]_{\mathcal{B}} = [\xi_1]_{\widetilde{\mathcal{B}}}$. Note-se que $[\xi_1]_{\mathcal{B}} = (1, 0, \dots, 0)$. E assim $[\xi_1]_{\widetilde{\mathcal{B}}} = (1, 0, \dots, 0)$. Mas isso signífica que $\xi_1 = 1 \cdot \tilde{\xi}_1 + 0 \cdot \tilde{\xi}_2 + \dots + 0 \cdot \tilde{\xi}_n = \tilde{\xi}_1$. Repita para $v = \xi_2, \dots, \xi_n$. "$\Leftarrow$" óbvio. $\square$

Exercício 3.1.7. Seja $E = \mathbb{R}^2$ munido da base canônica $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ e da base $\mathcal{B} = (\xi_1, \xi_2)$ onde $\xi_1 = (1, 1)$ e $\xi_2 = (-1, 1)$. Determine $[e_1]_{\mathcal{B}}$, $[e_2]_{\mathcal{B}}$, $[e_1]$, $[e_2]$ e também $[\xi_1]_{\mathcal{B}}$, $[\xi_2]_{\mathcal{B}}$, $[\xi_1]$, $[\xi_2]$.

Exercício 3.1.8. Mostre que os polinômios 1, $x - 1$, e $x^2 - 3x + 1$ formam uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Exprima o polinômio $2x^2 - 5x + 6$ como CL nessa base.

3.1.2 Dimensão de um espaço vetorial

Teorema 3.1.9. *Se um conjunto finito gera E, então qualquer conjunto $Y \subset E$ com mais elementos é LD.*

Corolário 3.1.10. *Suponha um conjunto finito X gera E, então*

$$Y \subset E \text{ } LI \qquad \Rightarrow \qquad |Y| \le |X|.$$

Para provar Teorema 3.1.9 vamos usar o seguinte resultado sobre SLH's.

Teorema 3.1.11 (Existência de soluções não-triviais de um SLH)**.** *Dado uma matriz $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$. Se tem menos linhas como colunas ($m < n$), então o SLH $\mathbf{a}x = \mathcal{O}$, compare (1.2.5), admite soluções $x = (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$.*

Demonstração. Indução sobre o número m de linhas. Veja Teorema A.3.1. $\square$

Demonstração de Teorema 3.1.9. Suponha que o conjunto $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ gera o espaço vetorial E e seja $Y \subset E$ um outro subconjunto com mais elementos, ou seja $|Y| > m$. Para mostrar que Y é LD, basta mostrar segundo Lema 3.1.3 b) que um subconjunto $U = \{u_1, \dots, u_{m+1}\} \subset Y$ de $m+1$ elementos é LD. Como X gera E e cada um u_j pertence a E existem escalares a_{ij} tal que

$$u_j = a_{1j} v_1 + \cdots + a_{mj} v_m \tag{$*_j$}$$

para $j = 1, \dots, m+1$.

Para U é LD resta mostrar: existem escalares não-nulos $x_1, \dots, x_{m+1}$ tal que

$$x_1 u_1 + \cdots + x_{m+1} u_{m+1} = \mathcal{O} \tag{3.1.3}$$

Para este fim considere o SLH de m equações de $n = m+1$ incógnitas x_j

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1,m+1} x_{m+1} = 0 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{m,m+1} x_{m+1} = 0 \end{cases} \tag{SLH}$$

o qual tem uma solução não-trivial $x = (x_1, \dots, x_{m+1}) \neq (0, \dots, 0)$ segundo Teorema 3.1.11 como $m < n$. Obtemos (3.1.3) assim: usando $(*_1 - *_{m+1})$ temos

$$\begin{aligned} & x_1 u_1 + \cdots + x_{m+1} u_{m+1} \\ &= x_1 (a_{11} v_1 + \cdots + a_{m1} v_m) \\ &\quad + x_2 (a_{12} v_1 + \cdots + a_{m2} v_m) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + x_{m+1} (\alpha_{1,m+1} v_1 + \cdots + \alpha_{m,m+1} v_m) \\ &= v_1 \underbrace{\sum_{j=1}^{m+1} a_{1j} x_j}_{=0 \ (\text{SLH})_1} + \cdots + v_m \underbrace{\sum_{j=1}^{m+1} a_{mj} x_j}_{=0 \ (\text{SLH})_m} \\ &= \mathcal{O} \end{aligned}$$

□

Proposição 3.1.12. *Se uma base $\mathcal{B}$ de E tem m elementos, então todas tem.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ bases de E.
1) $\langle \mathcal{B} \rangle = E$ e $Y := \tilde{\mathcal{B}}$ LI implicam (Corolário 3.1.10) $\ell := |\tilde{\mathcal{B}}| \le |\mathcal{B}| = m < \infty$.
2) Analogamente como $\langle \tilde{\mathcal{B}} \rangle = E$ e $Y := \mathcal{B}$ é LI, temos que $m = |\mathcal{B}| \le |\tilde{\mathcal{B}}| = \ell$. □

Definição 3.1.13 (Dimensão)**.** Se um espaço vetorial E admite uma base finita $\mathcal{B}$, o numero dos elementos é dito a **dimensão de *E***, em símbolos

$$\dim E := |\mathcal{B}|$$

Caso E não admite nenhuma base finita dizemos que E é de **dimensão infinita** e escrevemos $\dim E = \infty$.

Comentário 3.1.14 (Dimensão do espaço vetorial trivial)**.** O conjunto vazio é uma base do espaço vetorial trivial $E = \{\mathcal{O}\}$, Exemplo 1.3.7, assim $\dim\{\mathcal{O}\} = 0$.

Lema 3.1.15 (Aumentando conjuntos LI)**.** *Seja $X = \{v_1, \dots, v_k\}$ um subconjunto LI e seja $u \in E$ um vetor fora do subespaço gerado, ou seja $\langle X \rangle$. Então o conjunto extendido $\{v_1, \dots, v_k, u\}$ também é LI.*

Demonstração. Se $X = \emptyset$, então $u \notin \langle \emptyset \rangle = \{\mathcal{O}\}$, assim $u \neq \mathcal{O}$ e $\{u\}$ é LI segundo Corolário 1.3.7. Se $X \neq \emptyset$, suponha por absurdo que $\{v_1, \dots, v_k, u\}$ fosse LD. Assim existe uma CLe $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \beta u = \mathcal{O}$. Caso $\beta = 0$, entao $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq (0, \dots, 0)$ e $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = \mathcal{O}$. Assim $\{v_1, \dots, v_k\}$ é LD. Contradição. Caso $\beta \neq 0$, entao $u = -\beta^{-1} (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) \in \langle X \rangle$. Contradição. ☐

Exercício 3.1.16. Sejam $X_1, X_2, \dots$ subconjuntos LI de um espaço vetorial E.

1. Caso encaixado $X_1 \subset X_2 \subset \dots$, prove que $X = \bigcup X_n$ é LI.
2. Se cada X_n tem n elementos, prove que existe um conjunto LI $\tilde{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$ com $x_j \in X_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.
3. Supondo $E = \mathbb{R}^\infty$ e as hipóteses em 1. e 2., é verdade que $X = \bigcup X_n$ seja uma base de E?

Corolários do Teorema 3.1.9

Nos corolários seguintes $n \in N_0$, particularmente é um número, assim finito.

Corolário 3.1.17. *$Y \subset E$, $|Y| > n := \dim E \;\Rightarrow\; Y$ LD*

Demonstração. Como $\dim E = n$ existe uma base $\mathcal{B}$ de E com n elementos. ☐

Corolário 3.1.18. *Se um conjunto Y é LI em E, então $|Y| \leq \dim E$.*

Demonstração. Caso $\dim E = \infty$: verdadeiro trivialmente. Caso $\dim E < \infty$: escolha para X em Corolário 3.1.10 uma base de E para obter $|Y| \leq \dim E$. ☐

Corolário 3.1.19. *Suponha $X \subset E$ tem $n := \dim E$ elementos, então*

$$X \textit{ gera } E \qquad \Leftrightarrow \qquad X \textit{ é LI}$$

Demonstração. $\boldsymbol{n = 0}$**.** Assim $X = \emptyset$, ambos lados valem automaticamente.
$\boldsymbol{n = 1}$**.** Assim $X = \{v\}$ onde $v \in E$, ambos lados são equivalentes a $v \neq \mathcal{O}$.
$\boldsymbol{n = 2}$**. '⇒'** Suponha que $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ gera E. Por absurdo suponha que X é LD. Segundo Teorema 3.1.1 b) um elemento de X, dizemos v_n, é CL de outros elementos de X. Então $E = \langle X \rangle = \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle = \langle \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \rangle$. Qualquer base $\mathcal{B}$ de E tem n elementos pela hipótese $n = \dim E$ – mais elementos como o conjunto $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ gerando E. Entao $\mathcal{B}$ é LD segundo Teorema 3.1.9. Contradição. **'⇐'** Suponha que $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ é LI. Por absurdo suponha que X não gera E. Então existe $u \in E$ não elemento de $\langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$. Assim o conjunto aumentado $\{v_1, \dots, v_n, u\}$ é LI segundo Lema 3.1.15. Mas um subconjunto com mais elementos $(n + 1)$ como a dimensao (n) é LD segundo Corolário 3.1.17. Contradição. ☐

Corolário 3.1.20. *Um subconjunto LI com $n = \dim E$ elementos é uma base.*

Demonstração. Tal subconjunto LI gera E segundo Corolário 3.1.19 '$\Leftarrow$'. □

Lema 3.1.21. *Se um conjunto finito X gera E, então $|X| \geq \dim E$.*

Demonstração. Suponha que $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ gera E.
CASO $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ é LI: Então X é base e assim $|X| = \dim E$.
CASO $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ é LD: Assim $X \neq \emptyset$.
Caso $m = 1$: Então $v_1 = \mathcal{O}$ e $E = \langle v_1 \rangle = \{\mathcal{O}\}$. Assim $|X| = 1 > 0 = \dim E$.
Caso $m \geq 2$: Como $\{v_1, \dots, v_m\}$ é LD, pelo menos um elemento, dizemos v_m, deve ser CL de outros. Iterando até chegamos num conjunto LI obtemos que

$$E = \langle \{v_1, \dots, v_m\} \rangle = \langle \{v_1, \dots, v_{m-1}\} \rangle = \cdots = \langle \{v_1, \dots, v_\ell\} \rangle$$

onde $\{v_1, \dots, v_\ell\}$ é LI e $\ell \geq 1$. Então $\{v_1, \dots, v_\ell\} =: \mathcal{B}$ é base de E e assim $|X| > \ell = |\mathcal{B}| =: \dim E$. □

Exemplo 3.1.22 (Dimensão)**.** Veja Exemplo 3.0.11.

(a) $\dim \mathbb{R}^n = |\mathcal{E}^n| = n$ e $\dim \mathbb{R}^\infty_0 = |\mathcal{E}^\infty| = \infty$. (Análogo para corpos $\mathbb{K}$.)
$\dim \mathbb{R}^\infty = \infty$: Suponha por absurdo que é finita a dimensão $n := \dim \mathbb{R}^\infty$. Segundo Corolário 3.1.17 para $Y = \mathcal{E}^\infty$ e $E = \mathbb{R}^\infty$, como $|Y| = |\mathcal{E}^\infty| = \infty > n = \dim \mathbb{R}^\infty$, segue que $\mathcal{E}^\infty$ é LD $\underline{\text{em } \mathbb{R}^\infty}$. Mas $\mathcal{E}^\infty$ é LI $\underline{\text{em } \mathbb{R}^\infty}$ segundo Exercício 1.3.11. (Outro argumento: Como $\mathcal{E}^\infty$ é LI em $\mathbb{R}^\infty_0$, deve ser LI em $\mathbb{R}^\infty$ segundo parte c) do Lema 3.1.3.) Contradição.

(b) $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1$ e $\dim \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \infty$.

(c) $\dim \mathrm{M}(m \times n) = mn$.

(d) Hiperplanos $H_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, onde $\alpha \in \mathbb{R}^n$ não-nulo, tem dimensão $n-1$. Aquele '**hiper**' refere-se ao fato do que na dimensão falta 1 para a dimensão do espaço vetorial ambiente.

Exercício 3.1.23 (Produto cartesiano)**.** Seja $n \in \mathbb{N}_0$ e seja F um espaço vetorial de dimensão m. Mostre que o produto cartesiano $F^{\times n}$, veja (1.1.2), é um espaço vetorial sob as operações de adição e multiplicação escalar, ambas componente-por-componente, e que $\dim F^{\times n} = mn$.
[Dica: Dimensão – escolha uma base de F e use para definir uma base de $F^{\times n}$.]

3.2 Existência e extensão

Teorema 3.2.1. *Seja E da dimensão finita $n \in \mathbb{N}_0$.*

(a) *Todo conjunto gerando E contem uma base de E.* *(Existência de bases)*

(b) *Todo subconjunto LI é contido numa base de E.* *(Extensão de bases)*

(c) *A dimensão de qualquer subespaço de E é $\leq n$.* *(Dimensão)*

(d) *Um subespaço F de E da mesma dimensão n é igual a E.*

Demonstração. LI refere-se a E se não especificado diferente. **(a)** Suponha X gera E. Seja $B \subset X$ qualquer subconjunto LI (existe como $B = \emptyset$ mostra), então $|B| \le \dim E =: n$ segundo Corolário 3.1.18. Para $k \in \mathbb{N}_0$ seja

$$\mathcal{C}_k := \{B \subset X \mid B \text{ é LI e } |B| = k\}$$

a família de todos os subconjuntos $B \subset X$ os quais são LI e composto de k elementos. Seja $B_* \subset X$ um subconjunto LI com o número máximo de elementos. Então $B_* \in \mathcal{C}_\ell$ para um $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$. Seja $B_* = \{\xi_1, \dots, \xi_\ell\}$. Considere as quatro inclusões (dois deles sendo igualdades)

$$E = \langle X \rangle \subset \langle \langle B_* \rangle \rangle = \langle B_* \rangle \subset E$$

Consequentemente o conjunto LI B_* gera E, ou seja B_* é uma base. Resta justificar as quatro inclusões. Inclusão 1. Pela hipótese X gera E.
Inclusão 2. Parte (ii) de Lema 2.2.3 aplica como $X \subset \langle B_* \rangle$: Suponha por absurdo que existe um vetor $v \in X$ o qual não é CL em B_*, ou seja $v \notin \langle B_* \rangle$. Segundo Lema 3.1.15 o subconjunto aumentado $\{\xi_1, \dots, \xi_\ell, v\}$ de X ainda é LI, mas contem $\ell + 1$ elementos, então mais como B_*. Contradição.
Inclusão 3. Como $\langle B_* \rangle$ é um subespaço parte (iii) de Lema 2.2.3 aplica.
Inclusão 4. Como $B_* \subset X \subset E$ parte (ii) de Lema 2.2.3 aplica.

(b) Suponha $X \subset E$ é um subconjunto LI. Como $k := |X| \in \{0, \dots, n\}$, veja Corolário 3.1.18, trata-se de um conjunto finito, ou seja $X = \{v_1, \dots, v_k\}$. Subconjuntos $B \subset E$ LI e contendo X (existem como $B := X$ mostra) são compostos de ℓ elementos para um $\ell \in \{k, \dots, n\}$. Seja B_* um tal subconjunto com o número máximo ℓ_* de elementos. Então B_* é LI e contem $X \subset B_*$. Para B_* é uma base de E, resta mostrar que gera E, ou seja $\langle B_* \rangle = E$:
'$\subset$' trivial como $B_* \subset E$. '$\supset$' Suponha por absurdo que existe um vetor $u \in E$ o qual não pertence a $\langle B_* \rangle$, então o conjunto aumentado $B_* \cup \{u\}$ é LI segundo Lema 3.1.15, contem X porque B_* contem X – mas tem mais elementos como B_*. Contradição.

(c) Suponha F é um subespaço de E. Seja $B \subset F$ qualquer subconjunto LI em respeito a F (existe como $B = \emptyset$ mostra). Note que B é LI em respeito a E segundo Lema 3.1.3 c). Assim $|B| \le n := \dim E$ segundo Corolário 3.1.18. Agora escolha um subconjunto $B_* \subset F$ LI em respeito a F com o número máximo de elementos. Como temos visto $k := |B_*| \le \dim E =: n$. Resta mostrar que B_* é uma base de F (neste caso $\dim F = |B_*|$). Pela escolha B_* é LI em F, então basta mostrar $\langle B_* \rangle = F$:
'$\subset$' trivial como $B_* \subset F$. '$\supset$' Suponha por absurdo que existe um vetor $u \in F$ o qual não pertence a $\langle B_* \rangle$, então o conjunto aumentado $B_* \cup \{u\}$ é LI em F segundo Lema 3.1.15 – mas tem mais elementos como B_*. Contradição.

(d) Seja $F \subset E$ um subespaço de dimensão $n := \dim E$. Pela definição de dimensão existe uma base $\mathcal{B}$ de F com n elementos. Como $\mathcal{B}$ é LI em respeito a F, é LI em respeito a E segundo Lema 3.1.3 c). Como além disso $|\mathcal{B}| = n := \dim E$ o Corolário 3.1.19 diz que $\mathcal{B}$ gera E. Então $E = \langle \mathcal{B} \rangle = F$, onde a segunda igualdade segue porque $\mathcal{B}$ é base de F, então gera F. $\square$

Proposição 3.2.2. *Seja F um espaço vetorial e F_1, F_2 subespaços de dimensão finita k, ℓ. Então existe uma base finita $\mathcal{B}$ do subespaço F_1+F_2 de F que contem uma base $\mathcal{B}_1$ de F_1, uma base $\mathcal{B}_2$ de F_2, e uma base $\mathcal{B}_{12}$ de $F_1 \cap F_2$. Vale que*

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2) \tag{3.2.1}$$

Demonstração. Vamos denotar de (b),(c) as partes correspondentes do Teorema 3.2.1. O subespaço $F_1 \cap F_2 \subset F_1$ tem dimensão finita m (segundo (c) para $E = F_1$) e assim admite uma base finita $\mathcal{B}_{12} = \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ (segundo a definição de dimensão). Segundo (b) para $E = F_1$ o conjunto $\mathcal{B}_{12}$ – LI em $F_1 \cap F_2$ e segundo Lema 3.1.3 LI no superespaço F_1 – é contido numa base $\mathcal{B}_1$ de F_1. Analogamente $\mathcal{B}_{12}$ é contido numa base $\mathcal{B}_2$ de F_2. Uma base de $F_1 + F_2$ contendo as bases desejadas é

$$\mathcal{B} := (\mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B}_{12}) \dot\cup \overbrace{\mathcal{B}_{12} \dot\cup (\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12})}^{\mathcal{B}_2} = \mathcal{B}_1 \dot\cup (\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12}) = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$$

Contando elementos obtemos

$$\dim(F_1 + F_2) := |\mathcal{B}| = (k - m) + m + (\ell - m) = k + \ell - m.$$

Resta checar as duas propriedades de uma base. $\mathcal{B}$ gera F_1+F_2: Os elementos de $F_1 + F_2$ são da forma $f_1 + f_2$ onde $f_1 \in F_1$ (assim é CL em $\mathcal{B}_1$) e $f_2 \in F_2$ (assim é CL em $\mathcal{B}_2$). Consequentemente $f_1 + f_2$ é CL em $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$.
$\mathcal{B}$ é LI em F: Seja $\mathcal{B}_1 = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ e $\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12} = \{\eta_1, \dots, \eta_{\ell-m}\}$. Suponha por absurdo que $\mathcal{B}$ é LD, ou seja existem escalares α_i, β_i não todos nulos tal que

$$\underbrace{\alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_k\xi_k}_{=-v_1} + \underbrace{\beta_1\eta_1 + \cdots + \beta_{\ell-m}\eta_{\ell-m}}_{=:v_1} = \mathcal{O}$$

Não todos β_i's são nulos (caso contrário $\mathcal{B}_1$ é LD, contradição). Assim $v_1 \in F_2 \setminus (F_1 \cap F_2)$. De outro lado $-v_1$, então v_1, é elemento do subespaço F_1. Assim $v_1 \in (F_1 \cap F_2)$ e $v_1 \notin (F_1 \cap F_2)$. Contradição. □

Corolário 3.2.3. *Sejam $F, G \subset E$ subespaços de dimensões finitas, então:*

$$F \oplus G = E \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{\mathcal{O}\} \end{cases}$$

Demonstração. '⇒' Fórmula (3.2.1) usando que a interseção tem dimensão zero. '⇐' Suponha que $F \cap G = \{\mathcal{O}\}$ e que as dimensões de F e G adicionam à dimensão de E. Segundo Lema 2.3.2 a soma $F + G$ é um subespaço de E. Então $F + G = E$ segundo Teorema 3.2.1 (d). □

Exercício 3.2.4 (Subespaços do espaço $\mathrm{M}(n \times n)$ das matrizes quadradas)**.** [1]

[1] As dimensões para seu controle: 2. $\dim \mathcal{T} = n(n+1)/2$
3. (a) $2\frac{(n-1)n}{2} + (n-1) = n^2 - 1$ (b) $n(n-2) + n = n(n-1)$ (c) $(n-1)^2 + n = n^2 - (n-1)$

1. Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{S} \subset \mathrm{M}(n \times n)$ os subespaços das matrizes anti-/simétricas.

   (a) Para cada par $(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}$ seja $\mathbf{e}_+^{\mathbf{ij}}$ a matriz $n \times n$ cujos elementos nas posições ij e ji são iguais a 1 e os demais são zero. Prove que estas matrizes constituem uma base $\{\mathbf{e}_+^{\mathbf{ij}}\}$ para $\mathcal{S}$.

   (b) De modo análogo, obtenha uma base $\{\mathbf{e}_-^{\mathbf{ij}}\}$ para $\mathcal{A}$.

   (c) Conclua que

   $$\dim \mathcal{S} = \frac{n(n+1)}{2} \qquad\qquad \dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}$$

   Calcule $\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{A}$ e lembre-se que $\dim \mathrm{M}(n \times n) = n^2$. Conclua que

   $$\mathrm{M}(n \times n) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$$

   Antes, no Exercício 2.3.7, tenhamos obtido uma prova alternativa desse.

2. As matrizes $\mathbf{t} = (t_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n)$ tais que $t_{ij} = 0$ quando $i < j$ são chamadas **triangulares inferiores**. Prove que elas constituem um subespaço $\mathcal{T} \subset \mathrm{M}(n \times n)$. Obtenha uma base para $\mathcal{T}$ e determine a sua dimensão.

3. Obtenha uma base e consequentemente determine a dimensão de cada um dos seguintes subespaços de $\mathrm{M}(n \times n)$ as quais são composto de

   (a) matrizes $\mathbf{a} = (a_{ij})$ de **traço** (a soma dos elementos da diagonal)

   $$\mathrm{tr} \,: \mathrm{M}(n \times n) \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{a} \mapsto \mathrm{tr}\,\mathbf{a} := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

   nulo, ou seja $\mathrm{tr}\,\mathbf{a} = 0$.

   (b) matrizes cuja primeira e última linha são iguais

   (c) matrizes cuja primeira linha e primeira coluna são iguais

Parte II

Teoria das transformações lineares

Capítulo 4

Transformações lineares

No Capítulo 4 denotamos de E, F espaços vetoriais

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K}), \qquad F = (F, +, \cdot, \mathbb{K})$$

ambos sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Na primeira leitura pense em $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. As letras m, n denotam números naturais ou zero.

4.1 Exemplos e construção

Definição 4.1.1. Uma **transformação linear (TL)**, também chamado de **homomorfismo de espaços vetoriais** ou **operador linear**, é uma aplicação

$$A : E \to F, \quad v \mapsto A(v) =: Av$$

a qual preserva as operações em E e F, ou seja

$$\text{(Linearidade)} \qquad \begin{cases} A(\alpha v) = \alpha A v \\ A(v + w) = Av + Aw \end{cases}$$

para todos os escalares $\alpha \in \mathbb{K}$ e todos os vetores $v, w \in E$. Note-se que nos lados esquerdos aparecem as operações em E e nos lados direitos aquelas em F.

Como indicado acima vamos escrever no caso de aplicações lineares geralmente Av em vez de $A(v)$. Assim Av já sinaliza que A é linear. Note-se que

$$\text{(Linearidade)} \quad \Leftrightarrow \quad A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E$$

Lema 4.1.2. *Seja $A : E \to F$ uma TL. Então*

(i) $A\mathcal{O} = \mathcal{O}$ *(leva o vetor nulo de E no vetor nulo de F)*

(ii) $A(-v) = -(Av)$ *(leva inversos em inversos)*

(iii) $A(u - v) = Au - Av$

(iv) $A(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 A v_1 + \cdots + \alpha_k A v_k$ *(leva CLs em CLs)*

para todos os vetores $u, v, v_i \in E$ *e escalares* $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

Demonstração.
(i) $A\mathcal{O} = A(\mathcal{O}+\mathcal{O}) \overset{\text{linear}}{=} A\mathcal{O} + A\mathcal{O}$, então $A\mathcal{O} = \mathcal{O}$ segundo Lema 1.1.4 3b)
(ii) $A(-v) + Av \overset{\text{linear}}{=} A(-v+v) = A\mathcal{O} \overset{\text{(i)}}{=} \mathcal{O}$.
(iii) $A(u-v) \overset{\text{linear}}{=} Au + A(-v) \overset{\text{(ii)}}{=} Au - Av$.
(iv) Indução sobre k baseado na linearidade. □

Exercício 4.1.3. Considere os elementos de $\mathbb{R}^2$ dados por

$$u_1 = (2,-1), \qquad u_2 = (1,1), \qquad u_3 = (-1,-4),$$

e

$$v_1 = (1,3), \qquad v_2 = (2,3), \qquad v_3 = (5,6).$$

Decida se existe ou não uma transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$Au_1 = v_1, \qquad Au_2 = v_2, \qquad Au_3 = v_3$$

Solução. Se A é linear então escrevendo u_3 como CL de u_1 e u_2, ou seja $u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$, o elemento $v_3 = Au_3$ deve ser CL de $v_1 = Au_1$ e $v_2 = Au_2$ com os mesmos coeficientes. Com efeito

$$v_3 = Au_3 = A(\alpha u_1 + \beta u_2) \overset{\text{lin.}}{=} \alpha A u_1 + \beta A u_2 = \alpha v_1 + \beta v_2$$

Então vamos checar se é verdadeiro isso: Determinamos α e β primeiro

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2 = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha + \beta \\ -\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

Comparando os primeiros membros obtemos $\beta = -1 - 2\alpha$. Use isso na comparação dos segundos membros para obter $\alpha = \beta + 4 = -1 - 2\alpha + 4 = 3 - 2\alpha$. Assim $\alpha = 1$ e $\beta = -3$. Basta calcular

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = v_3$$

Então não existe uma tal transformação linear A.

Exercício 4.1.4. Mesma pergunta como no Exercício 4.1.3 mas a) com $v_3 = (-5,-6)$ e b) com $v_3 = (5,-6)$.

Exemplo 4.1.5 (Derivação e convolução)**.**

(Derivação) Seja $k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$, entao é linear o operador derivada

$$D\colon C^k(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^k(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad f \mapsto f' := \frac{d}{dx} f$$

(Convolução) Dada uma função contínua $k\colon [a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$, Seja $k\in\mathbb{N}$ ou $k=\infty$, entao é linear o operador definido por

$$K\colon C^0([a,b],\mathbb{R})\to C^0([a,b],\mathbb{R}),\quad f\mapsto \int_a^b k(\cdot,y)f(y)\,dy$$

No caso particular $k(x,y)=g(x-y)$ onde $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ é uma dada função contínua o operador K_g definido por

$$\left(K_g f\right)(x) := \int_a^b g(x-y)f(y)\,dy$$

é chamado de **convolução** das funções f e g, notação $f*g:=K_g f$.

4.1.1 O espaço vetorial das transformações lineares

Definição 4.1.6 (O espaço vetorial $\mathcal{L}(E,F)$)**.** O conjunto

$$\mathcal{L}(E,F) := \{A \mid A : E\to F \text{ transformação linear}\}$$

de todas as transformações lineares entre E e F seja munido das operações

$$\begin{aligned} + : \mathcal{L}(E,F)\times\mathcal{L}(E,F) &\to \mathcal{L}(E,F) & \qquad \cdot : \mathbb{K}\times\mathcal{L}(E,F) &\to \mathcal{L}(E,F)\\ (A,B) &\mapsto A+B & (\alpha,A) &\mapsto \alpha A \end{aligned}$$

definidas assim $(A+B)v := Av+Bv$ e $(\alpha A)v := \alpha(Av)$.

Note que $A+B, \alpha A : E\to F$ realmente são lineares. Por exemplo, vale

$$(\alpha A)(v+w) \overset{\text{def.}}{=} \alpha(A(v+w)) \overset{\text{lin.}}{=} \alpha(Av+Aw) \overset{\text{distr.}}{=} \alpha(Av)+\alpha(Aw)$$

e o lado direito é $(\alpha A)v+(\alpha A)w$ pela definição de αA.

Lema 4.1.7. *O conjunto $\mathcal{L}(E,F)$ das transformações lineares de E para F munido das operações '$+$' e '$\cdot$' forma um espaço vetorial*

$$\mathcal{L}(E,F) = (\mathcal{L}(E,F),+,\cdot,\mathbb{K})$$

sobre o corpo $\mathbb{K}$. O vetor nulo de $\mathcal{L}(E,F)$ é a TL nula $\mathcal{O} : E\to F$, $v\mapsto\mathcal{O}$.[1]

Demonstração. Deixamos ao leitor verificar os axiomas na Definição 1.1.16. □

Definição 4.1.8 (Operadores lineares em E)**.** No caso $F=E$ os elementos de $\mathcal{L}(E):=\mathcal{L}(E,E)$ são chamados de **operadores lineares em *E*** e o operador

$$I = I_E : E\to E,\quad v\mapsto v \tag{4.1.1}$$

é chamado de **operador identidade** em E.

[1] o primeiro $\mathcal{O}$ é $\mathcal{O}_{\mathcal{L}(E,F)}$ e o outro $\mathcal{O}_F$; para legibilidade não escrevemos demais subscritos

4.1.2 O espaço dual

Definição 4.1.9 (O espaço dual E^*)**.** No caso $F = \mathbb{K}$ o espaço $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ é chamado de **espaço dual** de E. Chama-se os elementos $\phi \in E^*$ de **funcionais $\mathbb{K}$-lineares** em E ou, no caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, **funcionais lineares**, às vezes **reais**.

Exercício 4.1.10. A expressão geral de um funcional linear $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é

$$\phi(x, y, z) = ax + by + cz$$

onde a, b, c são números reais determinando ϕ. Dados os elementos

$$u = (1, 2, 3), \qquad v = (-1, 2, 3), \qquad w = (1, -2, 3),$$

de $\mathbb{R}^3$ determine a, b, c de tal modo que se tenha $\phi u = 1$, $\phi v = 0$ e $\phi w = 0$.[2]

Exercício 4.1.11. Seja $\mathcal{B} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ uma base do espaço vetorial real[3] E. Para $i = 1, 2, \ldots, n$ seja $\phi_i \in E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ determinado pelos valores na base $\mathcal{B}$

$$\phi_i \xi_1 = 0, \quad \ldots \quad, \phi_i \xi_{i-1} = 0, \quad \phi_i \xi_i = 1, \quad \phi_i \xi_{i+1} = 0, \quad \ldots \quad, \phi_i \xi_n = 0$$

veja (4.1.3). Prove que $\mathcal{B}^* := \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ é uma base de E^* (chamada de **base dual** de $\mathcal{B}$). Mostre que se tem $\phi_i v = v_i$ para todo $v = v_1 \xi_1 + \cdots + v_n \xi_n \in E$.

Exemplo 4.1.12 (Funcionais lineares $\varphi, \psi \in E^*$)**.** Seja $E = C^0([a, b])$ o espaço vetorial real das funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neste intervalo.

(Integração) A função $\varphi : E \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(f) := \int_a^b f(x)\, dx$$

é linear e assim $\varphi \in E^*$

(Avaliação) Dado um ponto $x_0 \in [a, b]$, a função $\psi : E \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(f) := f(x_0)$$

é linear e assim $\psi \in E^*$.

Isomorfismos

Isomorfismo e inversa serão tratados com mais detalhes na Seção 5.3.

Definição 4.1.13 (Isomorfismo)**.** Um **isomorfismo** entre espaços vetoriais E e F é uma transformação linear (homomorfismo) $T : E \to F$ tal que a aplicação

$$T : E \to F \text{ é } \textbf{bijetiva} \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \textbf{injetiva} & :\Leftrightarrow \quad Tu = Tv \Rightarrow u = v \\ \text{e} & \\ \textbf{sobrejetiva} & :\Leftrightarrow \quad \forall v \in F \; \exists u \in E : \; Tu = v \end{cases}$$

Se existe um isomorfismo entre E e F dizemos "E e F são **isomorfos**" e escrevemos $E \simeq F$, ou ainda $E \overset{T}{\simeq} F$ para destacar quem é o isomorfismo.

[2] A resposta para seu controle: $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = 0$.
[3] 'real' indica que o corpo são os números reais $\mathbb{R}$

Definição 4.1.14 (Inversa)**.** Uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$ é chamado **invertível** caso existe um $B \in \mathcal{L}(F, E)$ tal que $AB = I_F$ e $BA = I_E$. Neste caso B é único e chamado **a inversa** de A, símbolo $A^{-1} := B$

Comentário 4.1.15. Dado um isomorfismo $T : E \to F$, definimos a aplicação

$$S : F \to E, \quad f \mapsto v$$

onde $v \in E$ é o único vetor tal que $Tv = f$, veja (5.3.1). Pode checar que S é linear e bijetiva, ou seja um isomorfismo, e que S é a inversa de T.
A composição BA de dois isomorfismos é um isomorfismo e sua inversa é a composição das inversas – mas na ordem oposta

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} \tag{4.1.2}$$

4.1.3 Construção de transformações lineares

Uma base **ordenada** é uma base $\mathcal{B} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ cujos elementos são enumerados, alternativamente escreve-se na forma de uma lista ordenada $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Proposição 4.1.16. *A fim de definir um homomorfismo $A \in \mathcal{L}(E, F)$ basta escolher as imagens de uma base (ordenada) $\mathcal{B} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ de E:*
Existência. *Escolha uma lista $f := (f_1, \ldots, f_n)$ de $n := \dim E$ elementos f_j do contra-domínio F, repetições não excluídas, e defina*

$$A_f \xi_j := f_j, \qquad j = 1, \ldots, n \tag{$*_f$}$$

Então extende A_f ao E inteiro usando (Linearidade): Dado $u \in E$, exprime u em respeito à base $\mathcal{B}$ na forma $u = \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j$ onde os escalares α_j são únicas – são as chamadas coordenadas do vetor u, veja (3.1.1). Defina

$$A_f u := \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j \overset{(*_f)}{=} \sum_{j=1}^n \alpha_j A_f \xi_j \tag{4.1.3}$$

Unicidade. *Se $B \in \mathcal{L}(E, F)$ satisfaz $(*_f)$, levando os ξ_j nos f_j, então $B = A_f$.*

Demonstração. Deixamos ao leitor a tarefa simples de checar que A_f definido acima é linear, ou seja $A_f \in \mathcal{L}(E, F)$, e é unicamente determinado por $(*_f)$. □

Note-se que A_f não só depende da escolha dos elementos f_j de F, mas também da escolha da base $\mathcal{B}$ de E. Por isso às vezes escrevemos

$$A_f^{\mathcal{B}} = A_f$$

Exercício 4.1.17. Mostre: os membros da lista $f = (f_1, \ldots, f_n) \in F^{\times n}$ formam

a) um conjunto LI de n elementos $\Leftrightarrow$ A_f é injetivo

b) um conjunto gerando F $\Leftrightarrow$ A_f é sobrejetivo

c) uma base de F $\Leftrightarrow$ A_f é um isomorfismo (e $\dim E = \dim F$)

Se lembra da diferença entre lista e conjunto? O conjunto $X := \{f_1, \dots, f_n\}$ dos f_j's não necessariamente contem n elementos: por exemplo, se escolhe para cada um membro f_j da lista f o mesmo vetor f o conjunto X contem 1 elemento.

Teorema 4.1.18. *Seja* $\dim F$ *finita e* $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ *uma base de* E*, então*

$$\begin{aligned} \Psi = \Psi_{\mathcal{B}} : F^{\times n} &\to \mathcal{L}(E, F) \\ f &\mapsto A_f \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

é um isomorfismo. Lembre-se de $(*_f)$ *que* A_f *é determinado por* $A_f \xi_j := f_j$*.*

Demonstração. Segundo Proposição 4.1.16 é suficiente avaliar TLs numa base.
Linear. Segue de $A_{\alpha f + \beta g} \xi_j := (\alpha f + \beta g)_j = \alpha f_j + \beta g_j =: \alpha A_f \xi_j + \beta A_g \xi_j$.
Injetivo. Suponha $A_f = A_g$. Então $f_j =: A_f \xi_j = A_g \xi_j := g_j$ para todos os j.
Sobrejetivo. Dado $B \in \mathcal{L}(E, F)$, defina $f_j := B\xi_j$, $\forall j$. Assim $A_f = B$. □

Lembre-se do Exercício 3.1.23 que $\dim F^{\times n} = n \dim F$. Vamos ver no futuro, veja Corolário 5.3.9, que isomorfismos preservam dimensões – o que implica

Corolário 4.1.19. $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim F^{\times n} = \dim E \cdot \dim F$

Exercício 4.1.20. Mostre que $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \dim \mathrm{M}(m \times n)$. Dado um corpo $\mathbb{K}$, vale analogamente $\dim \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = \dim \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$.

Comentário 4.1.21 (Extensão de TLs)**.** Suponha que em vez de uma base de E só temos um subconjunto $\mathcal{X} \subset E$ LI e com k elementos $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$, particularmente $k = |\mathcal{X}| \le \dim E =: n$. Note-se que $\mathcal{X}$ é uma base do subespaço $\langle \mathcal{X} \rangle$. Seja $f = (f_1, \dots, f_k) \in F^{\times k}$ uma lista com $k := \dim \langle \mathcal{X} \rangle = |\mathcal{X}|$ membros. Conforme Proposição 4.1.16 isso determina unicamente uma TL injetiva

$$A_f^{\mathcal{X}} : E \supset \langle X \rangle \to F, \quad A_f^{\mathcal{X}} \xi_j := f_j \qquad (j = 1, \dots, k)$$

Então existe uma transformação linear

$$A_{\tilde{f}}^{\tilde{\mathcal{X}}} : E \to F$$

extendendo $A_f^{\mathcal{X}}$, ou seja a restrição $A_{\tilde{f}}^{\tilde{\mathcal{X}}} |_{\langle \mathcal{X} \rangle}$ é $A_f^{\mathcal{X}}$. Para construir a extensão I) estende-se o conjunto LI $\mathcal{X}$ a uma base de E usando o Teorema 3.2.1 (b) e II) apensa-se à lista f mais $n - k$ membros.

4.2 Matrizes

Matrizes são transformações lineares

Para ver isso escolhemos uma matriz $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$ e consideramos a aplicação

$$\mathbf{a} \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad x \mapsto \mathbf{a}x$$

a qual leva uma lista $x \in \mathbb{K}^m$ para a lista definida pelo produto matriz

$$\mathbf{a}x = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Lembrando a notação $\mathbf{a}_{\bullet j}$ para colunas introduzido em (1.2.3), continuamos

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_{\bullet 1}} x_1 + \dots + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_{\bullet n}} x_n =: (\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{4.2.1}$$

No último passo definimos uma nova notação a qual vai ser bem útil. O símbolo que usamos quer lembrar o produto matriz, para não precisamos memorizar mais uma fórmula. Na nova notação é facil ver que $\mathbf{a}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathbf{a}x + \beta \mathbf{a}y$ mostrando que $\mathbf{a}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ é linear. Assim temos verificado que cada uma matriz é uma transformação linear. E vice versa?

Escreve as colunas de uma matriz $\mathbf{a}$ como lista, ou seja $f_{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n})$. Agora considere o operador linear $A^{\mathcal{E}^n}_{f_{\mathbf{a}}}$ definido em (4.1.3) e defina a aplicação

$$\mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K}) \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), \quad \mathbf{a} \mapsto A^{\mathcal{E}^n}_{f_{\mathbf{a}}} \tag{4.2.2}$$

onde $\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canonica de $\mathbb{K}^n$. Note que $A^{\mathcal{E}^n}_{f_{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}$, com efeito

$$A^{\mathcal{E}^n}_{f_{\mathbf{a}}} e_i \overset{(*_{f_{\mathbf{a}}})}{=} \mathbf{a}_{\bullet i} = \mathbf{a}e_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

e então lembre-se de UNICIDADE em Proposição 4.1.16.
Como a aplicação $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}$ é obviamente linear e injetivo, só falta sobrejetivo para ser um isomorfismo. Dado $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, coloque as listas $Ae_1, \dots, Ae_n \in \mathbb{K}^m$ como colunas de uma matriz, notação $[A]$.[4] O leitor pode verificar que esta matriz $[A]$ é levado ao operador A, em símbolos $A^{\mathcal{E}^n}_{f_{[A]}} = A$. Isso prova sobrejetividade.[5] Deixa nos formalizar esta idéia próximo.

[4] Verifique que os membros da lista Ae_i sao as entradas do vetor coordenada $[Ae_i]_{\mathcal{E}^m}$.
[5] Alternativamente, vamos ver no futuro que, como as dimensões são iguais e finito, injetividade de uma TL é equivalente a sobrejetividade.

Aula 14

A matriz [ ] de uma transformação linear $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

Como temos visto acima que uma transformação linear $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ corresponde naturalmente, utilizando as bases canônicas

$$\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}, \qquad \mathcal{E}^m = \{E_1, \dots, E_m\}$$

a uma matriz $[A] \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$. Com efeito, seja $[Ae_i]_{\mathcal{E}^m} \in \mathrm{M}(m \times 1; \mathbb{K})$ o vetor coordenada do elemento $Ae_i \in \mathbb{K}^m$, veja (3.1.2). Usando estes vetores coordenadas como colunas de uma matriz obtém-se

$$[A] = [A]_{\mathcal{E}^n, \mathcal{E}^m} := [[Ae_1]_{\mathcal{E}^m} \dots [Ae_n]_{\mathcal{E}^m}] \quad \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$$

chamado de **matriz da transformação linear A: $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ em respeito às bases canônicas**.

O caso geral de associar uma matriz $[A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ a uma transformação linear $A \colon E \to F$ entre espaços vetoriais munidos de bases ordenadas $\mathcal{U} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ e $\mathcal{V} = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ será investigado em grande detalhe na Seção 7 depois tratar isomorfismos e inversas na Seção 5.3.1. Sim, as colunas de esta matriz serão os vetores coordenadas $[A\xi_i]_{\mathcal{V}}$.

Proposição 4.2.1. *A aplicação entre espaços vetoriais definido por*

$$\begin{aligned} [\cdot] = [\cdot]_{\mathcal{E}^n, \mathcal{E}^m} : \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) &\to \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K}) \\ A &\mapsto [[Ae_1]_{\mathcal{E}^m} \dots [Ae_n]_{\mathcal{E}^m}] \end{aligned}$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

Demonstração. Checar linearidade é rotina. *Injetivo.* Se as matrizes $[A] = [B]$ são iguais, os vetores coordenadas $[Ae_i]_{\mathcal{E}^m} = [Be_i]_{\mathcal{E}^m}$ são iguais, e assim as imagens $Ae_i = Be_i$ dos elementos da base são iguais. Assim $A = B$ segundo unicidade em Proposição 4.1.16. *Sobrejetivo.* Dado uma matriz $\mathbf{a}$, então a matriz do operador $A_{f_{\mathbf{a}}}^{\mathcal{E}^n}$, veja (4.2.2), é $\mathbf{a}$. $\square$

Exercício 4.2.2. Mostre que as entradas a_{ij} da matriz $\mathbf{a} := [A]$ satisfazem

$$Ae_i = E_1 a_{1i} + \dots + E_m a_{mi} =: \mathcal{E}^m \mathbf{a}_{\bullet i}$$

para cada um elemento e_i da base $\mathcal{E}^n$ e onde $\mathcal{E}^m = \{E_1, \dots, E_m\}$.

Exemplo 4.2.3. Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ determinado por

$$A(1,1) = (1,2,3) \quad \text{e} \quad A(-1,1) = (1,1,1)$$

Pede-se a matriz $\mathbf{a}$ de A relativamente às bases canônicas.

Uma solução. Denotamos de $\mathcal{E}^2 = \{e_1, e_2\}$ e $\mathcal{E}^3 = \{E_1, E_2, E_3\}$ as bases canônicas. Precisamos escrever Ae_1 e Ae_2 como CL's dos vetores E_1, E_2, E_3 e colocar os coeficientes como colunas da matriz desejada. Sabemos que

$$\begin{aligned} A(1,1) &= (1,2,3) = (1,0,0) + (0,2,0) + (0,0,3) = E_1 + 2E_2 + 3E_3 \\ A(1,1) &= A((1,0) + (0,1)) = A(e_1 + e_2) = Ae_1 + Ae_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}A(-1,1) &= (1,1,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1) = E_1 + E_2 + E_3\\ A(-1,1) &= A((-1,0) + (0,1)) = A(-e_1 + e_2) = -Ae_1 + Ae_2\end{aligned}$$

Assim temos 2 equações lineares inomogeneas para as 2 incógnitas $x := Ae_1$ e $y := Ae_2$, com efeito

$$\begin{cases} x + y = E_1 + 2E_2 + 3E_3 \\ -x + y = E_1 + E_2 + E_3 \end{cases}$$

Aplicamos escalonamento, adicionando a primeira equação para a segunda obtemos $2y = 2E_1 + 3E_2 + 4E_3$ e assim a CL

$$y = E_1 + \frac{3}{2}E_2 + 2E_3$$

cujas coeficientes formam a segunda ($y = Ae_2$) coluna da matriz $\mathbf{a} := [A]$. Use na primeira equação para receber os coeficientes da primeira coluna, ou seja

$$x = -y + (E_1 + 2E_2 + 4E_3) = 0E_1 + \frac{1}{2}E_2 + 1E_3$$

Então a matriz é a seguinte

$$\mathbf{a} = [A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Com certeza, vai ter outros caminhos como resolver. Acima vemos um.

Exercício 4.2.4. Tem-se uma transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$A(1,2) = (1,1,1,-1) \quad \text{e} \quad A(3,4) = (1,1,1,1)$$

Pede-se a matriz $\mathbf{a}$ de A relativamente às bases canônicas.

Exercício 4.2.5 (Vetores linha e coluna)**.** a) Mostre que a matriz de um funcional linear $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^* := \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é uma linha (matriz $1 \times n$) da forma

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi e_1 & \dots & \varphi e_n \end{bmatrix}$$

b) Mostre que a matriz de uma reta no $\mathbb{R}^n$ passando a origem, ou seja $R \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, é uma coluna (matriz $n \times 1$) da forma

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

Lema 4.2.6 (Na dimensão 1 operadores correspondem a escalares)**.** *Seja* $\dim E = 1$ *e* $A \in \mathcal{L}(E)$*, então existe um único escalar* $\alpha \in \mathbb{K}$ *tal que o operador corresponde a multiplicação com* α*, em símbolos* $A = \alpha I_E$*.*

Demonstração. Pegue um elemento não-nulo $\xi \in E$. Então $\mathcal{B} := \{\xi\}$ é uma base de E: Com efeito é LI como $\xi \neq \mathcal{O}$, segundo Comentário 1.3.7 (ii), mas LI é equivalente a gera segundo Corolário 3.1.19. Como $\mathcal{B}$ é base com um elemento só, todo elemento de E é uma CL em $\{\xi\}$, assim um múltiplo escalar de ξ com coeficiente único. Então $E \ni A\xi = \alpha\xi$ para um único $\alpha \in \mathbb{K}$.
Analogamente todo $w \in E$ é da forma $w = \lambda\xi$ para um único $\lambda \in \mathbb{K}$. Segue que

$$Aw = A(\lambda\xi) = \lambda A\xi = \lambda(\alpha\xi) = (\lambda\alpha)\xi = (\alpha\lambda)\xi = \alpha(\lambda\xi) = \alpha w = \alpha I_E w$$

onde usamos vários axiomas do espaço vetorial. Isso prova que $A = \alpha I_E$. □

4.3 Dimensão dois – o plano

No plano Π queremos estudar três tipos elementares de transformações lineares, nomeadamente

- rotação R_θ por um ângulo θ em torno de um centro O no plano
- projeção ortogonal P_L sobre uma reta L no plano
- reflexão S_L em torno de uma reta L no plano

Mas o plano Π é composto de pontos... Como pode-se dar Π a estrutura de um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$? Como pode-se adicionar pontos ou multiplicar por números? Não da.

Mas pode-se adicionar flechas v no plano se consideramos iguais todas as flechas do mesmo comprimento e direção, veja Exemplo 0.0.1. Mais detalhado duas flechas são consideradas iguais se formam os lados opostos de um paralelogramo no qual os outros dois lados conectam, respectivamente, os dois pontos iniciais e os dois pontos terminais. Multiplicação de uma flecha v com um número real α muda o comprimento pelo fator α, trocando a direção caso $\alpha < 0$ é negativo. Adicionamos duas flechas pondo no ponto termino da primeira flecha o ponto inicial da segunda, veja Figura 1 na introdução do manuscrito.

Definição 4.3.1 (O espaço vetorial Π_O das flechas no plano de ponto início O)**.** Para eliminar a complicação que, dado uma flecha v, todo ponto $p \in \Pi$ nos da uma flecha equivalente (escolhendo p como ponto início), vamos fixar um ponto do plano, notação $O \in \Pi$. Neste caso todo ponto $p \in \Pi$ representa uma flecha só: por definição a flecha correndo de O a p. Vice versa, cada uma flecha em Π é equivalente a uma iniciando no ponto O. Seja

$$\Pi_O := (\Pi, O)$$

o conjunto das flechas no plano Π com ponto início O. Identificamos tal flecha com seu ponto termino $p \in \Pi$. Escrevendo $p \in \Pi$ significa que p é um ponto do

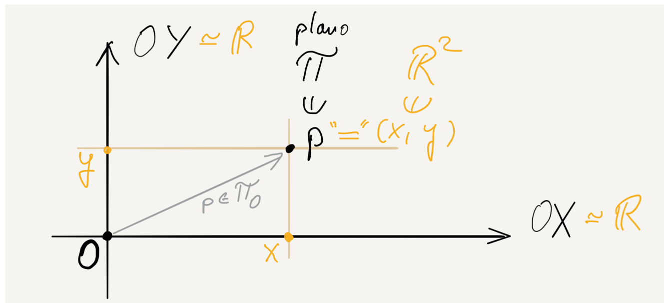

Figura 4.1: Sistema ortogonal de coordenadas OXY no plano Π

plano, escrevendo $p \in \Pi_O$ significa que p é a flecha correndo de O a p. Para Π_O pode-se verificar os axiomas de um espaço vetorial real sob multiplicação escalar αp definida como mudando o comprimento da flecha com ponto termino p pelo fator $\alpha \in \mathbb{R}$ e adição $p + q$ definida pelo paralelogramo gerado, veja Figura 4.3.

Comentário 4.3.2. Note-se que são em bijeção o conjunto Π_O das flechas no plano Π iniciando no ponto O e o conjunto F no Exemplo 0.0.1 cujos elementos são flechas v no plano junto com todas flechas equivalentes a v. Adição e multiplicação escalar coincidem. Assim os espaços vetoriais F e Π_O são isomorfos.

Comentário 4.3.3 (Sistema de coordenadas ortogonal OXY)**.** Escolhendo no plano Π dois eixos OX e OY ortogonal um ao outro, notação OXY, recebemos uma bijeção linear

$$\Pi_O \to \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto (x, y)$$

como definida em (0.0.1) e ilustrada na Figura 4.1.

4.3.1 Rotações

Seja Π_O o plano Π junto com um ponto $O \in \Pi$ fixado. Suponha que podemos medir distancia no plano, assim ângulos entre semi-retas do mesmo ponto inicial. Para os elementos $p \in \Pi_O$ (pontos do plano interpretado simultaneamente como flecha de O ao ponto), denotamos de

- C_p o círculo com centro O e passando p, veja Figura 4.2
- ℓ_p a semi-reta iniciando em O e passando p (se $p = O$ seja $\ell_O := \{O\}$)
- $\ell_p(\theta)$ a semi-reta obtida pela rotação de ℓ_p em torno O pelo ângulo θ no sentido contra-horário

Definição 4.3.4 (Rotação)**.** A aplicação definida por

$$R_\theta : \Pi_O \to \Pi_O, \quad p \mapsto \ell_p(\theta) \cap C_p$$

é chamado de **rotação** no plano Π em torno de O por o ângulo θ.

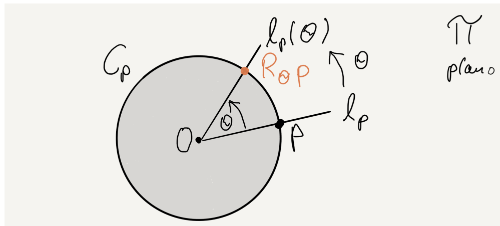

Figura 4.2: Rotação R_θ no plano Π em torno do ponto O por um ângulo θ

Comentário 4.3.5 (Preservação de comprimento e ângulos)**.** Como o resultado da rotação é localizado no mesmo círculo a distância de O fica constante. O ângulo φ entre duas flechas $p, q \in \Pi_O$ fica constante se aplicamos a rotação R_θ pelo *mesmo* ângulo θ em ambas flechas. aplicar a rotação R_θ pelo mesmo ângulo θ em ambas flechas, veja Figura 4.3.

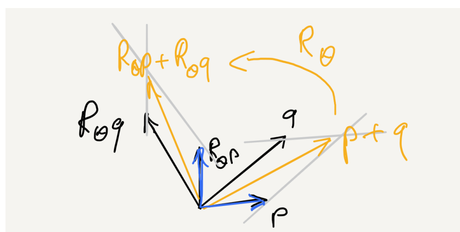

Figura 4.3: Preservação de ângulos

Lema 4.3.6. *Dado um ângulo θ, a rotação $R_\theta : \Pi_O \to \Pi_O$ é linear.*

Demonstração. Lembre que os elementos $p \in \Pi_O$ são pontos do plano visto como flechas de O a p. O comprimento da flecha é a distancia dos ponto p e O. Dado p, denotamos ambos, **comprimento da flecha** e **distancia de $\boldsymbol{O}$**, com o símbolo $|\boldsymbol{p}|$.

Preservação de comprimento $\Rightarrow$ multiplicativo. Dado um ponto p e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $p = O$ ou $\alpha = 0$ temos $R_\theta(\alpha p) = R_\theta(O) = O = \alpha R_\theta(p)$. Seja então $p \neq O$ e $\alpha \neq 0$. Segundo preservação de comprimento obtemos

$$\frac{|R_\theta(\alpha p)|}{|R_\theta(p)|} = \frac{|\alpha p|}{|p|} = \pm\alpha \quad \text{então} \quad |R_\theta(\alpha p)| = \pm\alpha |R_\theta(p)|$$

onde o sinal em $+/-\alpha$ depende se α é positivo/negativo.

Resta eliminar os absolutos. No caso $\alpha > 0$ os pontos αp e p estão na mesma semi-reta, mas rotação preserva esta propriedade, assim $R_\theta(\alpha p) = \alpha R_\theta(p)$. No caso $\alpha < 0$ os pontos αp e p estão em semi-retas opostas. Rotação também preserva esta propriedade, assim $R_\theta(\alpha p)$ e $R_\theta(p)$ são múltiplos negativos um do outro. Como $|R_\theta(\alpha p)| = -\alpha |R_\theta(p)|$ segue que $R_\theta(\alpha p) = \alpha R_\theta(p)$.

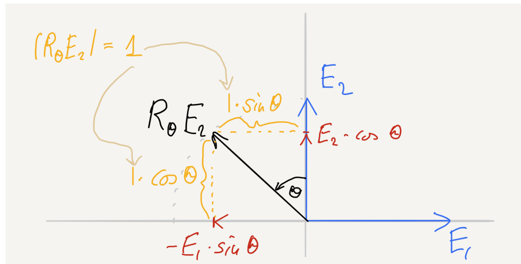

Figura 4.4: Rotação do vetor unitário – coeficientes formam coluna 2 da matriz

Preservação de ângulos $\Rightarrow$ aditivo. Dado pontos p, q, considere o paralelogramo definindo a soma $p+q$. Aplicando a rotação sabemos que $R_\theta p$ e $R_\theta q$ formam o mesmo ângulo como p e q. Então o paralelogramo gerado por $R_\theta p$ e $R_\theta q$ resulta daquele gerado por p e q através de aplicar R_θ. Mas assim a diagonal $R_\theta p + R_\theta q$ resulta de aplicar R_θ aà diagonal $p+q$ do paralelogramo original, em símbolos $R_\theta p + R_\theta q = R_\theta(p+q)$. $\square$

A matriz da rotação num sistema ortogonal de coordenadas

Conforme a definição de eixo, veja Comentário 0.0.3, o vetor unitário no eixo OX é a flecha correndo de O ao ponto X, notação E_1. Analogamente denotamos de E_2 o vetor unitário no eixo OY

Por definição a matriz $\mathbf{r}_\theta$ da rotação R_θ em respeito à base $\mathcal{E} := \{E_1, E_2\}$ contem como colunas os coeficientes (veja Figura 4.4) de

$$R_\theta E_1 = E_1 \cos\theta + E_2 \sin\theta, \qquad R_\theta E_2 = -E_1 \sin\theta + E_2 \cos\theta$$

Lema 4.3.7. *A **matriz da rotação** pelo ângulo θ é a matriz real*

$$\mathbf{r}_\theta := [R_\theta]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{4.3.1}$$

Lembramos que o sistema ortogonal de coordenadas disponibiliza uma correspondência $\Pi_O \simeq \mathbb{R}^2$ na qual a base $\{E_1, E_2\}$ corresponde à base canônica $\mathcal{E}^2 = \{e_1, e_2\}$. Obviamente é mais confortável trabalhar com as listas de $\mathbb{R}^2$ como com as flechas de Π_O. Assim vamos trabalhar no futuro com $\mathbb{R}^2$.

4.3.2 Projeção ortogonal sobre uma reta

Trabalhamos no plano identificado com $\mathbb{R}^2$ mediante um sistema ortogonal de coordenadas.

Definição 4.3.8 (Projeção ortogonal)**.** Seja $a \in \mathbb{R}$ uma constante e seja $L_a := \mathbb{R}(1, a)$ a reta no $\mathbb{R}^2$ passando a origem $\mathcal{O} = (0, 0)$ e o ponto $(1, a)$ como ilustrado

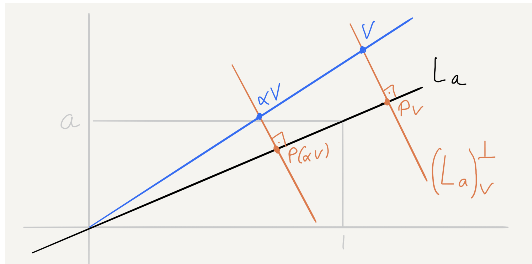

Figura 4.5: Projeção ortogonal P sobre a reta L_a

na Figura 4.5. Para um elemento $v \in \mathbb{R}^2$ seja $(L_a)_v^\perp$ a reta ortogonal a L_a e passando o ponto v. Então a aplicação que leva v à interseção das duas retas

$$P = P_{L_a} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto L_a \cap (L_a)_v^\perp \tag{4.3.2}$$

é chamado de **projeção ortogonal** sobre a reta L_a.

Lema 4.3.9. *A projeção ortogonal $P = P_{L_a} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é linear.*

Demonstração. MULTIPLICATIVO. Similarmente como na prova de Lema 4.3.4 discrimina-se três casos $\alpha < 0$, ($\alpha = 0$ ou $v = \mathcal{O}$), e $\alpha > 0$. Vamos tratar o caso $\alpha > 0$ e deixar os outros ao leitor. Para $\alpha > 0$ e $v \neq \mathcal{O}$ obtemos

$$\frac{|v|}{|Pv|} = \frac{|\alpha v|}{|P\alpha v|} = \frac{\alpha |v|}{|P\alpha v|}$$

onde temos usado o Teorema do Raio na primeira igualdade. Como $|v| \neq 0$ segue, cortando $|v|$, que $|P\alpha v| = \alpha |Pv|$. Como $P\alpha v$ e Pv são elementos da mesma ($\alpha > 0$) semi-reta de L_a, obtém-se $P\alpha v = \alpha Pv$.

ADITIVO. A identidade $P(v + w) = Pv + Pw$ resulta da Figura 4.6. □

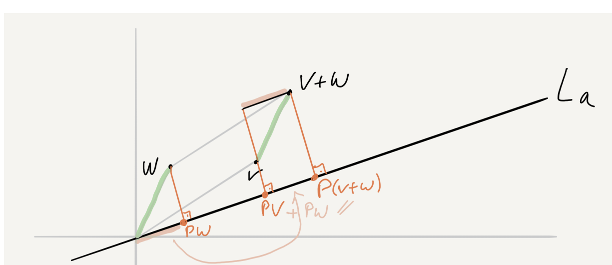

Figura 4.6: A identidade $P(v + w) = Pv + Pw$

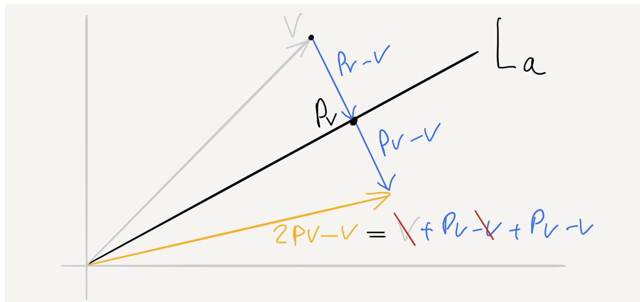

Figura 4.7: Reflexão $S = 2P - I$ em torno da reta L_a

A matriz da projeção ortogonal

Trabalhamos no plano identificado com $\mathbb{R}^2$ mediante um sistema ortogonal de coordenadas.

Lema 4.3.10. *A* ***matriz da projeção ortogonal*** *sobre a reta L_a é dada por*

$$\mathbf{p}_a := [P_{L_a}] = \frac{1}{1+a^2}\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix} \tag{4.3.3}$$

Demonstração. Lema A.4.1 $\square$

4.3.3 Reflexão em torno de uma reta

Trabalhamos no plano identificado com $\mathbb{R}^2$ mediante um sistema ortogonal de coordenadas.

Definição 4.3.11 (Reflexão)**.** Dado $a \in \mathbb{R}$, a aplicação definida assim

$$\begin{aligned} S = S_{L_a} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto v + 2(P_{L_a} v - v) = (2P_{L_a} - I)v \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

é chamado de **reflexão** em torno da reta L_a. Note que $S = 2P - I$ é linear.

Use Proposição 4.2.1 e a matriz de P para obter a **matriz da reflexão** em torno da reta L_a, com efeito

$$\mathbf{s}_a := [S_{L_a}] = 2\mathbf{p}_a - \mathbb{1} = \frac{1}{1+a^2}\begin{bmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & -(1-a^2) \end{bmatrix} \tag{4.3.5}$$

Exercício 4.3.12 (Rotação, projeção, reflexão)**.**

1. Sejam $R, P, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ respectivamente a rotação de $30°$ em torno da origem, a projeção ortogonal sobre a reta $y = \frac{1}{3}x$ (notação $L_{\frac{1}{3}}$) e a reflexão em torno da mesma reta.

   Dado o vetor $v = (2, 5)$, determine suas imagens Rv, Pv, Sv.

2. Considere os operadores lineares $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$R = R_{30^\circ}, \qquad S = S_{L_2}, \qquad P = P_{L_2}.$$

   (a) Mostre que se tem $PS = SP = P$.
   (b) Verifique a igualdade $RSR = S$.
   (c) Mostre que R não comuta com S nem com P.
   (d) Determine todos os vetores v tais que $RPv = 0$ e $RPv \neq 0$.

3. Encontre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que o operador

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (ax + by, cx + dy) \end{aligned}$$

   tenha como núcleo a reta $y = 3x$.

4.4 Produto de transformações lineares

Capítulo 5

Núcleo e imagem

No Capítulo 5 denotamos de E, F espaços vetoriais

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K}), \qquad F = (F, +, \cdot, \mathbb{K})$$

ambos sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, e denotamos de $A\colon E \to F$ uma transformação linear. Na primeira leitura pense em $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. As letras m, n denotam números naturais ou zero.

O primeiro objetivo no Capítulo 5 é associar a uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$ dois subespaços

$$\mathrm{N}(A) \subset E \xrightarrow{A} F \supset \mathrm{Im}(A)$$

e relacionar seu tamanho mínimo/máximo a injetividade/sobrejetividade de A. Outros resultados fundamentais são os seguintes: Uma transformação linear A é injetiva se e somente se leva conjuntos LI em conjuntos LI. Sobrejetividade é equivalente à existencia de uma inversa à direita e injetividade à existencia de uma inversa à esquerda.

Definição 5.0.1. Dado uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$ chamamos

$\mathrm{N}(A) := \{v \in E \mid Av = \mathcal{O}\}$ o **núcleo** de A e

$\mathrm{Im}(A) := \{Av \mid v \in E\}$ a **imagem** de A

Dado um subconjunto $X \subset E$, seja $AX := \{Ax \mid x \in X\}$ a imagem de X sob A.

Lema 5.0.2. *Os subconjuntos* $\mathrm{N}(A) \subset E$ *e* $\mathrm{Im}(A) \subset F$ *são subespaços.*

Demonstração. "$\mathrm{Im}(A)$ fechado sob $+$": Dado dois elementos da imagem, ou seja Av e Aw onde $v, w \in E$, então de linearidade $Av + Aw = A(v+w) \in \mathrm{Im}(A)$. "$\mathrm{Im}(A)$ fechado sob $\cdot$": Se $\alpha \in \mathbb{K}$ e $Av \in \mathrm{Im}(A)$, então $\alpha Av = A(\alpha v) \in \mathrm{Im}(A)$. Deixamos ao leitor provar que $\mathrm{N}(A)$ é fechado sob $\cdot$ e $+$. $\square$

Lema 5.0.3 (Os dois subespaços naturais – mínimo e máximo)**.** *Para uma transformação linear* $A \in \mathcal{L}(E, F)$ *injetividade e sobrejetividade correspondem a*

(i) $\mathrm{N}(A) = \{\mathcal{O}\} \quad \Leftrightarrow \quad A$ *é injetivo*

(ii) $\mathrm{Im}(A) = F \quad \Leftrightarrow \quad A$ *é sobrejetivo*

Demonstração. (i) **"⇐"** '$\subset$' Seja $v \in \mathrm{N}(A)$, então $Av = \mathcal{O} = A\mathcal{O}$ onde temos usado linearidade no segundo passo. Então segundo injetividade como as imagens são iguais, os elementos $v = \mathcal{O}$ devem ser iguais. '$\supset$' Como subespaço $\mathrm{N}(A)$ contem o vetor nulo. **"⇒"** Suponha que são iguais as imagens $Av = Aw$ de dois elementos $v, w \in E$. Então $\mathcal{O} = Av - Aw = A(v - w)$, e assim $v - w \in \mathrm{N}(A) = \{\mathcal{O}\}$. Então $v = w$.
(ii) **"⇐"** '$\subset$' trivial. '$\supset$' Dado $f \in F$, como A é sobrejetivo existe um $v \in E$ tal que $f = Av$. Assim $f \in \mathrm{Im}(A)$. **"⇒"** Seja $f \in F = \mathrm{Im}(A)$, ou seja $f = Av$ para um $v \in E$, mostrando que A é sobrejetivo. □

Lema 5.0.4. *Seja* $A \in \mathcal{L}(E, F)$ *e* $X \subset E$*, então*

$$\langle X \rangle = E \quad \Rightarrow \quad \langle AX \rangle = \mathrm{Im}(A)$$

Demonstração. '$\subset$' Sem usar $\langle X \rangle = E$, um elemento $f \in \langle AX \rangle$ é da forma de uma soma finita $f = \sum \alpha_i A x_i = A \sum \alpha_i x_i \in \mathrm{Im}(A)$ onde $x_i \in X$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$.
'$\supset$' Um elemento $f \in \mathrm{Im}(A) = AE = A\langle X \rangle$ é da forma de uma soma finita $f = A \sum \alpha_i x_i = \sum \alpha_i A x_i \in \langle AX \rangle$ onde $x_i \in X$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$. □

Como $\mathrm{Im}(A) \subset F$ é um subespaço já sabemos de Teorema 3.2.1 que sua dimensão não é maior daquela de F. É uma surpresa que isso vale para $\dim E$ também. Este fato será utilizado no famoso Teorema 5.4.1 de nucelo e imagem.

Corolário 5.0.5. $\forall A \in \mathcal{L}(E, F)$ *vale* $\dim \mathrm{Im}(A) \le \dim E$*.*

Demonstração. Se $\dim E = \infty$ não tem nada a provar. No caso $n = \dim E \in \mathbb{N}_0$ seja $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ uma base de E. Como $\langle \mathcal{B} \rangle = E$ temos $\langle A\mathcal{B} \rangle = \mathrm{Im}(A)$ segundo Lema 5.0.4. Nas outras palavras, o conjunto finito $A\mathcal{B} = \{A\xi_i \mid i = 1, \dots, n\}$ de $m \le n$ elementos (possivelmente uns $A\xi_i$'s são iguais) gera o espaço vetorial $\mathrm{Im}(A)$. Então $\dim \mathrm{Im}(A) \le m \le n = \dim E$ segundo Lema 3.1.21. □

Exercício 5.0.6. Defina operadores lineares $A, B : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ como

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \dots) \\ B(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (x_2 - 2x_1, x_3 - 2x_2, \dots). \end{aligned}$$

Determine o núcleo e a imagem de A e de B.

Exemplo 5.0.7 (SL)**.** Dada uma matriz $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$ e uma lista $b \in \mathbb{K}^m$. São equivalente os seguintes:

O sistema linear (SL) de m equações a n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

admite uma solução $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

$\overset{(1.2.6)}{\iff}$ O vetor b é CL das colunas $\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}$ da matriz $\mathbf{a}$; veja (1.2.3)

$\overset{2}{\iff}$ $b \in \operatorname{Im}(\mathbf{a})$ considerando a matriz como transformação linear $\mathbf{a}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

$\overset{3}{\iff}$ $\langle\{\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}, b\}\rangle = \langle\{\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}\}\rangle$

Equivalência 2: Isso é o fato que a imagem de uma matriz é o espaço-coluna, ou seja o conjunto de todas as CLs das colunas da matriz.

Equivalência 3: "$\Rightarrow$" Se b é CL das colunas a igualdade é trivial. Caso geral: Como as colunas $\{\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}\}$ geram $\operatorname{Im}(\mathbf{a})$, $b \in \operatorname{Im}(\mathbf{a})$, e $\operatorname{Im}(\mathbf{a})$ é um subespaço obtemos a primeira identidade

$$\langle\{\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}, b\}\rangle = \operatorname{Im}(\mathbf{a}) = \langle \mathbf{a}\mathcal{E}^n\rangle = \langle\{\underbrace{\mathbf{a}e_1}_{\mathbf{a}_{\bullet 1}}, \dots, \underbrace{\mathbf{a}e_n}_{\mathbf{a}_{\bullet n}}\}\rangle$$

Identidade dois segue do Lema 5.0.4 com a base canônica $\mathcal{E}^n$ de $\mathbb{K}^n$.
"$\Leftarrow$" A identidade fala que b é CL das colunas $\mathbf{a}_{\bullet i} = \mathbf{a}e_i \in \operatorname{Im}(\mathbf{a})$, então $b \in \operatorname{Im}(\mathbf{a})$ porque $\operatorname{Im}(\mathbf{a})$ é um subespaço e assim fechado sob adição.

Exercício 5.0.8. Seja $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$(x, y, z, t) \mapsto (x + y + z + 2t, x - y + 2z, 4x + 2y + 5z + 6t)\,.$$

Encontre $b \in \mathbb{R}^3$ que não pertença à imagem de A. Com b, exiba um sistema linear de 3 equações e 4 incógnitas sem solução.

5.1 Sobrejetividade – inversa à direita

Definição 5.1.1. Dado $A \in \mathcal{L}(E, F)$, uma transformação linear $B \in \mathcal{L}(F, E)$ é chamado de *uma* **inversa à direita de A** se a composição satisfaz $AB = I_F$.

Exemplo 5.1.2 (Geralmente inversas à direita não são únicas)**.** Seja $a \in \mathbb{R}$ e

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x, y), \qquad B_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, ax).$$

Então $AB_a = I_{\mathbb{R}^2}$ para cada um $a \in \mathbb{R}$, mas $B_a \neq B_b$ caso $a \neq b$.

Teorema 5.1.3. *Suponha $A \in \mathcal{L}(E, F)$ onde $m := \dim F < \infty$. Então*

$$A \text{ admite uma inversa à direita} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ sobrejetivo}$$

Demonstração. "$\Rightarrow$" Dado uma inversa à direita B de A, então $\forall f \in F$ vale $ABf = I_F f = f$. Assim para todo $f \in F$ existe um $v \in E$, com efeito $v := Bf$, tal que $Av = f$. Mas isso significa que A é sobrejetivo.
"$\Leftarrow$" Usamos sobrejetividade de A para construir explicitamente uma inversa à direita de A. Escolha uma base ordenada $\mathcal{Y} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ de F e, usando sobrejetividade, uma lista $v = (v_1, \dots, v_m)$ de m elementos de E tal que $Av_j = \eta_j$ para $j = 1, \dots, m$. Lembramos de (4.1.4) que a lista v nos da uma transformação

linear $B_v : F \to E$ unicamente determinado pelos valores $B_v\eta_j := v_j$ nos membros da base $\mathcal{Y}$. Resta checar $AB_v = I_F$: Escrevendo $f \in F$ como CL única na base $\mathcal{Y}$, ou seja $f = \sum_j \beta_j\eta_j$, e usando linearidade de B_v e de A obtemos

$$AB_v f = AB_v \sum_j \beta_j\eta_j = A\sum_j \beta_j \underbrace{B_v\eta_j}_{v_j} = \sum_j \beta_j Av_j = \sum_j \beta_j\eta_j = f$$

Note-se a soma é finita porque temos exprimido f como uma CL. □

Exercício 5.1.4. (a) Mostre que $\{0\}$ e o próprio $\mathbb{R}$ são os únicos subespaços de $\mathbb{R}$.

(b) Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Mostre que $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ é sobrejetivo ou igual a zero.

(c) Mostre que a derivação $D : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, $p(x) \mapsto \frac{d}{dx}p(x)$, é sobrejetiva.

(d) Mostre que a derivação $D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $f(x) \mapsto \frac{d}{dx}f(x)$, é sobrejetiva.

(e) Encontre uma inversa à direita $J : \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ para a derivação D em iii).

5.2 Injetividade – inversa à esquerda

Teorema 5.2.1. *Dada uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$, então*

$$A \text{ injetivo} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ leva conjuntos LI em conjuntos LI}$$

Demonstração. "⇒" Seja A injetivo e $X \subset E$ um subconjunto LI. Pegue elementos $Ax_1, \ldots, Ax_\ell \in AX$ na imagem e suponha que uma CL deles representa o vetor nulo, ou seja $\mathcal{O} = \alpha_1 Ax_1 + \cdots + \alpha_\ell Ax_\ell = A(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_\ell x_\ell)$ onde os α_i's são escalares. Como A é injetivo, equivalentemente $\mathrm{N}(A) = \{\mathcal{O}\}$ segundo Lema 5.0.3, segue que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_\ell x_\ell = \mathcal{O}$. Como X é LI segue que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_\ell = 0$ e isso prova que o subconjunto $AX \subset F$ é LI.
"⇐" Seja $v \in E$. Se $v \neq \mathcal{O}$, então o subconjunto $\{v\} \subset E$ é LI segundo Comentário 1.3.7 (ii). Assim $\{Av\} \subset F$ é LI como A leva LI em LI segundo hipótese. Assim o vetor Av não pode ser nulo. Temos provado $v \neq \mathcal{O} \Rightarrow Av \neq \mathcal{O}$. O contra-positivo então diz que $Av = \mathcal{O} \Rightarrow v = \mathcal{O}$. Assim $\mathrm{N}(A) = \{\mathcal{O}\}$. □

Corolário 5.2.2. *Se $A \in \mathcal{L}(E, F)$ é injetivo, então* $\dim E \leq \dim F$.

Demonstração. Se $\dim F = \infty$ não tem nada a provar. Seja $m := \dim F \in \mathbb{N}_0$. Seja $B = \{v_1, \ldots, v_k\}$ um subconjunto LI de E, então como A leva LI em LI segundo Teorema 5.2.1, o conjunto $AB = \{Av_1, \ldots, Av_k\}$ é LI em F e por isso (Corolário 3.1.18) não pode conter mais elementos como $\dim F$, em símbolos $k := |B| = |AB| \leq m$. (Como A é injetivo vale $|B| = |AB|$.) Analogamente à prova da parte (a) de Teorema 3.2.1 um subconjunto $B_* \subset E$ LI com o numero máximo n ($\leq m$) de elementos gera E e assim é uma base de E. Assim $\dim E := |B_*| = n \leq m := \dim F$. $\square$

Exemplo 5.2.3 (Aplicação)**.** Não existe nenhuma transformação linear $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ a qual é injetiva.

Definição 5.2.4. Dado $A \in \mathcal{L}(E, F)$, uma transformação linear $B \in \mathcal{L}(F, E)$ é chamado de *uma* **inversa à esquerda de $\boldsymbol{A}$** se a composição satisfaz $BA = I_E$.

Exemplo 5.2.5 (Geralmente inversas à esquerda não são únicas)**.** Seja $a \in \mathbb{R}$ e

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, 0), \qquad B_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + az, y).$$

Então $B_a A = I_{\mathbb{R}^2}$ para cada um $a \in \mathbb{R}$, mas $B_a \neq B_b$ caso $a \neq b$.

Teorema 5.2.6. *Suponha $A \in \mathcal{L}(E, F)$ onde* $\dim E, \dim F < \infty$. *Então*

$$\text{A admite uma inversa à esquerda } B \qquad \Leftrightarrow \qquad A \text{ injetivo}$$

Demonstração. "$\Rightarrow$" Se $Au = Av$, então $BAu = BAv$. Mas $BA = I$, daí $u = v$. "$\Leftarrow$" Como a dimensão $n := \dim E$ é finita, escolha uma base $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ de E. Baseado na injetividade de A, segundo Teorema 5.2.1, o conjunto das imagens $\{A\xi_1, \dots, A\xi_n\}$ é LI em F e pode ser estendido, segundo Teorema 3.2.1 (b) usando $\dim F < \infty$, para obter a base $\mathcal{B} := \{A\xi_1, \dots, A\xi_n, \eta_1, \dots, \eta_k\}$ de F. A lista $w := (\xi_1, \dots, \xi_n, \mathcal{O}, \dots, \mathcal{O}) \in E^{\times(n+k)}$ determina $B_w \in \mathcal{L}(F, E)$ segundo (4.1.4), ou seja $B_w(A\xi_i) := \xi_i$ e $B_w \eta_j := \mathcal{O}$. Escreve $v \in E$ como CL única $v = \sum_i \alpha_i \xi_i$. Então usando linearidade de A e de B_w obtemos

$$B_w A v = B_w A \sum_i \alpha_i \xi_i = \sum_i \alpha_i \underbrace{B_w A \xi_i}_{\xi_i} = v = I_E v$$

para cada um $v \in E$. $\square$

Exercício 5.2.7. Determine uma base para a imagem de cada uma das transformações lineares abaixo e indique quais são sobrejetivas.

(a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - y, x - y)$;

(b) $B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, (x, y, z, t) \mapsto (x + y, z + t, x + z, y + t)$;

(c) $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto \left(x + \frac{1}{2}y, y + \frac{1}{2}z, z + \frac{1}{2}x\right)$;

(d) $D : M(2 \times 2) \to M(2 \times 2), X \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X$;

(e) $E : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{R}), p = p(x) \mapsto xp$.

5.3 Bijetividade – inversa

Definição 5.3.1 (Inversa)**.** Chama-se uma transformação linear $A : E \to F$ de **invertível** se A admite uma inversa à esquerda $B \in \mathcal{L}(F, E)$ e uma inversa à direita $C \in \mathcal{L}(F, E)$. Neste caso $B = C$,[1] denotado A^{-1}, é dito **a inversa** de A.

Exercício 5.3.2. Sejam $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e $B \in \mathcal{L}(F, G)$ invertíveis, mostre que

a) a inversa de A (se existasse) é unica

b) $(A^{-1})^{-1} = A$

c) $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

d) $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$ para escalares não-nulos $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

5.3.1 Isomorfismos

Definição 5.3.3 (Isomorfismo)**.** Um **isomorfismo** (entre E e F) é uma transformação linear $A : E \to F$ a qual é bijetiva (injetivo e sobrejetivo). Neste caso se diz que E e F são espaços vetoriais **isomorfos**, símbolo $E \simeq F$.

Para aplicações gerais bijetividade é equivalente a existência da aplicação inversa (a qual claramente herda bijetividade). É interessante observar que se a aplicação bijetiva é linear a aplicação inversa não só existe mas herda linearidade.

Proposição 5.3.4. *Seja $A \in \mathcal{L}(E, F)$, então*

$$A \text{ isomorfismo} \qquad \Leftrightarrow \qquad A \text{ é invertível}$$

Demonstração. "$\Rightarrow$" Definimos o candidato B para ser a inversa de A assim

$$B : F \to E, \quad f \mapsto Bf := v \tag{5.3.1}$$

onde v é o único elemento de E com $Av = f$ (existência: A sobrejetivo, unicidade: A injetivo). A aplicação definida B é linear: Sejam $f, g \in F$, denotamos $v := Bf$ e $w := Bg$. Então $Av = f$ e $Aw = g$ e como A é linear obtemos $A(v + w) = Av + Aw = f + g$, então $B(f + g) = v + w = Bf + Bg$. Deixamos ao leitor verificar que $B(\alpha f) = \alpha Bf$. Também tem a propriedade de ser inversa à direita e esquerda, com efeito para $v \in E$ denota $f := Av$, então

$$ABf = Av = f, \qquad BAv = Bf = v$$

"$\Leftarrow$" Suponha que A admite a inversa $A^{-1} : F \to E$. Então A^{-1} é inversa à direita e à esquerda de A. Assim A é sobrejetivo e injetivo segundo os Teoremas 5.1.3 e 5.2.6. Mas bijetivo e linear significa isomorfismo. □

Corolário 5.3.5. *Dado isomorfismos $E \xrightarrow{A} F \xrightarrow{B} G$, então composição BA e múltiplos αA são isomorfismos para todos os escalares não-nulos $\alpha \neq 0$.*

[1] Com efeito $B = BI_F = B(AC) = (BA)C = I_E C = C$.

Demonstração. Proposição 5.3.4 e Exercício 5.3.2. □

Exercício 5.3.6 (Isomorfismo é relação de equivalência)**.** Mostre que isomorfismo '$\simeq$' é uma **relação de equivalência** no conjunto de todos os espaços vetoriais: ou seja, mostre que são satisfeitos os três axiomas seguintes

$$E \simeq E \text{ para cada um espaço vetorial} \qquad \text{(reflexividade)}$$
$$E \simeq F \quad \Rightarrow \quad F \simeq E \qquad \text{(simetria)}$$
$$E \simeq F \text{ e } F \simeq G \quad \Rightarrow \quad E \simeq G \qquad \text{(transitividade)}$$

Teorema 5.3.7. *Dada uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$, então*

$$A \text{ bijetiva (isomorfismo)} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ leva uma base de } E \text{ numa base de } F$$

Demonstração. "$\Rightarrow$" Seja A um isomorfismo e $\mathcal{B}$ uma base de E. Resta mostrar que o conjunto $A\mathcal{B}$ é LI e gera F. LI segue de Teorema 5.2.1 (uma TL injetiva A leve LI em LI) e como $\mathcal{B}$ gera E o Lema 5.0.4 diz que $\langle A\mathcal{B}\rangle = \mathrm{Im}(A) = F$ onde a segunda identidade é a sobrejetividade de A.
"$\Leftarrow$" Dado um base $\mathcal{B}$ de E, então $A\mathcal{B}$ é uma base de F segundo a hipótese.
A INJETIVO ($\mathrm{N}(A) = \{\mathcal{O}\}$): Suponha $v \in E$ e $Av = \mathcal{O}$. Escrevemos v como CL $v = \sum_{i=1}^{k(v)} \alpha_i \xi_i$ de elementos ξ_i da base $\mathcal{B}$. Então

$$\mathcal{O} = Av = A \sum_i \alpha_i \xi_i = \sum_i \alpha_i \underbrace{A\xi_i}_{\in A\mathcal{B}}$$

Como $A\mathcal{B}$ é um conjunto LI todos os coeficientes $\alpha_i = 0$ se anulam. Assim $v = \mathcal{O}$ o que mostra que $\mathrm{N}(A) = \{\mathcal{O}\}$.
A SOBREJETIVO: Segundo hipótese $A\mathcal{B}$ é uma base de F. Dado $f \in F$, escrevemos f como CL $f = \sum_{j=1}^{\ell(f)} \beta_j A\xi_j$ de elementos $A\xi_j$ da base $A\mathcal{B}$. O elemento de E definido por $v := \sum_j \beta_j \xi_j$ satisfaz $Av = A\sum_j \beta_j \xi_j = \sum_j \beta_j A\xi_j = f$. □

Corolário 5.3.8. *Um espaço vetorial E sobre um corpo $\mathbb{K}$ e de dimensão $n \in \mathbb{N}_0$ é isomorfo a $\mathbb{K}^n$.*

Demonstração. Escolha uma base $\mathcal{B} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ de E e defina a aplicação $A : \mathbb{K}^n \to E$ na forma $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$. Note-se que A é linear e que $Ae_j = A(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = 1 \cdot \xi_j = \xi_j$. Assim A leva a base canônica $A\mathcal{E}^n = \mathcal{B}$ na base $\mathcal{B}$, então A é um isomorfismo segundo Teorema 5.3.7. □

Corolário 5.3.9. *Sejam E e F espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e de dimensões finitas, então*

$$E \simeq F \qquad \Leftrightarrow \qquad \dim E = \dim F$$

Demonstração. "$\Rightarrow$" Seja $A\colon E \to F$ um isomorfismo e $\mathcal{B}$ uma base de E. Então $A\mathcal{B}$ é base de F segundo Teorema 5.3.7. e $|\mathcal{B}| = |A\mathcal{B}|$ como A é bijetivo. Daí $\dim E := |\mathcal{B}| = |A\mathcal{B}| =: \dim F$.
"$\Leftarrow$" Corolário 5.3.8 da dois isomorfismos $E \simeq \mathbb{K}^{\dim E} = \mathbb{K}^{\dim F} \simeq F$. □

Exemplo 5.3.10. O espaço vetorial $\mathcal{S}(n)$ das matrizes $n \times n$ simétricas e o espaço vetorial $\mathcal{P}_{\frac{n(n+1)}{2}-1}$ dos polinômios de grau menor ou igual $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ são isomorfos. Com efeito as dimensões são iguais – segundo Exercício 3.2.4 (c) e Exemplo 3.1.22 (b) – e assim Corolário 5.3.9 aplica.

Exercício 5.3.11. Dado $A \in \mathcal{L}(E)$ onde $\dim E < \infty$, defina

$$\begin{aligned} T_A : \mathcal{L}(E) &\to \mathcal{L}(E) \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

Prove que T_A é linear e que T_A é invertível se, e somente se A é invertível. Mesmo problema com $S_A(X) := XA$.

Exercício 5.3.12. Estabeleça um isomorfismo entre o espaço vetorial das matrizes reais simétricas $n \times n$ e o espaço das matrizes reais *triangulares inferiores* ($a_{ij} = 0$ se $i < j$).
Idem entre as matrizes anti-simétricas e as triangulares inferiores com diagonal nula.

Exercício 5.3.13. Sejam E, F espaços vetoriais tais que $\dim E \le \dim F < \infty$. Prove que existem $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e $B \in \mathcal{L}(F, E)$ tais que A é injetiva e B é sobrejetiva.

Exercício 5.3.14. Sejam E, F espaços vetoriais (de dimensão finita ou infinita). Sejam $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e $B \in \mathcal{L}(F, E)$ tais que AB é invertível.

(a) Prove que A é sobrejetiva e B é injetiva.

(b) Se AB e BA são invertíveis, prove que A é invertível.

Aula 15

5.4 Teorema de núcleo e imagem

Teorema 5.4.1 (Teorema de núcleo e imagem)**.** *Para uma transformação linear $A\colon E \to F$ com domínio E de dimensão finita n vale*

$$\dim E = \dim \mathrm{N}(A) + \dim \mathrm{Im}(A)$$

Demonstração. Segundo Lema 5.0.2 os conjuntos $\mathrm{N}(A)$ e $\mathrm{Im}(A)$ são subespaços de E e F, respectivamente. Segundo Teorema 3.2.1 (c) e Corolário 5.0.5 temos

$$k := \dim \mathrm{N}(A) \le \dim E =: n < \infty$$
$$\ell := \dim \mathrm{Im}(A) \le \dim E =: n < \infty$$

Escolha uma base ordenada $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ de $\mathrm{N}(A)$ e uma $(A\nu_1, \dots, A\nu_\ell)$ de $\mathrm{Im}(A)$. Resta mostrar que

$$\mathcal{B} := (\xi_1, \dots, \xi_k, \nu_1, \dots, \nu_\ell)$$

é uma base de E, porque neste caso $\dim E = k + \ell = \dim \mathrm{N}(A) + \dim \mathrm{Im}(A)$.

***$\mathcal{B}$* é LI.** Suponha que uma CL em $\mathcal{B}$ representa o vetor nulo, ou seja

$$\alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_k\xi_k + \beta_1\nu_1 + \dots + \beta_\ell\nu_\ell = \mathcal{O}$$

Resta mostrar que todos os coeficientes se anulam. Aplique A usando linearidade e que $\xi_i \in \mathrm{N}(A)$ para obter

$$\alpha_1 \underbrace{A\xi_1}_{\mathcal{O}} + \dots + \alpha_k \underbrace{A\xi_k}_{\mathcal{O}} + \beta_1 A\nu_1 + \dots + \beta_\ell A\nu_\ell = \mathcal{O}$$

Então $\beta_1 = \dots = \beta_\ell = 0$ porque toda CL no conjunto LI $\{A\nu_1, \dots, A\nu_\ell\}$ e representando o vetor nulo tem todos coeficientes nulos. Neste caso a primeira identidade simplifica-se para $\alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_k\xi_k = \mathcal{O}$. Mas os ξ_i's formam uma base, então um conjunto LI, assim os coeficientes se anulam $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.

***$\mathcal{B}$* gera *E*.** Dado $v \in E$, temos que exprimir v como CL em $\mathcal{B}$. Como temos uma base de $\mathrm{Im}(A)$, escrevemos $Av \in \mathrm{Im}(A)$ como CL $Av = \beta_1 A\nu_1 + \dots + \beta_\ell A\nu_\ell$ com coeficientes únicos β_j. Mas isso nos da um elemento w do núcleo

$$A \underbrace{(v - \beta_1\nu_1 - \dots - \beta_\ell\nu_\ell)}_{=:w} = \mathcal{O}$$

Exprimindo w como CL na base do núcleo, com coeficientes únicos α_j, obtemos

$$\alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_k\xi_k = w = v - \beta_1\nu_1 - \dots - \beta_\ell\nu_\ell$$

Assim temos exprimido

$$v = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_k\xi_k + \beta_1\nu_1 + \dots + \beta_\ell\nu_\ell$$

como CL em $\mathcal{B}$. $\square$

Corolário 5.4.2. *Para uma transformação linear $A\colon E \to F$ entre espaços vetoriais da mesma dimensão finita $n = \dim E = \dim F$ são equivalente*

$$A \text{ injetivo} \qquad \Leftrightarrow \qquad A \text{ sobrejetivo} \qquad (\Leftrightarrow \qquad A \text{ isomorfismo})$$

Demonstração. Da hipótese da mesma dimensão e do Teorema 5.4.1 sabemos

$$\dim F = \dim E = \dim \mathrm{N}(A) + \dim \mathrm{Im}(A)$$

Injetividade (equivalente a $\mathrm{N}(A) = \{\mathcal{O}\}$ segundo Lema 5.0.3) implica $\dim F = \dim \mathrm{Im}(A)$, então $F = \mathrm{Im}(A)$ (sobrejetividade) segundo Teorema 3.2.1 (d). Vice versa, sobrejetividade ($F = \mathrm{Im}(A)$) implica $\mathrm{N}(A) = \{\mathcal{O}\}$ (injetividade). □

Exercício 5.4.3 (Errado na dimensão infinita)**.** Considere os operadores lineares $A, B\colon \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ dado por empurrar todos os membros por um lugar

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (0, x_1, x_2, x_3, \dots) \\ B(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (x_2, x_3, \dots) \end{aligned}$$

Mostre que A é linear e injetivo, mas não é sobrejetivo, enquanto B é linear e sobrejetivo, mas não é injetivo,

Corolário 5.4.4. *Na mesma dimensão finita $n = \dim E = \dim F$ ser inversa à esquerda é equivalente a ser inversa à direita, em símbolos para $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e $B \in \mathcal{L}(F, E)$ são equivalentes*

$$BA = I_E \qquad \Leftrightarrow \qquad AB = I_F$$

No todo caso A é invertível com inversa $A^{-1} = B = C$.

Demonstração. Temos as três equivalências

$$\begin{aligned} &\exists B \in \mathcal{L}(F, E)\colon BA = I_E \\ &\Leftrightarrow A \text{ injetivo} \\ &\Leftrightarrow A \text{ sobrejetivo} \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{L}(F, E)\colon AC = I_F \end{aligned}$$

segundo respectivamente os três resultados Teorema 5.2.6, Corolário 5.4.2, e Teorema 5.1.3. Mas neste caso $C = B$ e este operador é a inversa de A como mostrado na Definição 5.3.1. □

Exemplo 5.4.5. Dado uma lista não-nula $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathcal{O}\}$, o subconjunto

$$\mathrm{H}_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_\alpha(x) := \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\} = \mathrm{N}(\varphi_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$$

é chamado de hiperplano e foi introduzido no Exemplo 2.1.8. Já sabemos que

$$\dim \mathrm{H}_\alpha = n - 1$$

como no Exemplo 3.0.11 d) temos visto uma base composto de $n-1$ elementos.

Um camino alternativo para calcular a dimensão é do ponto da vista como núcleo do funcional linear $\varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. O Teorema 5.4.1 diz que

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^n}_{=n} = \dim \underbrace{\mathrm{N}(\varphi_\alpha)}_{\mathrm{H}_\alpha} + \underbrace{\dim \mathrm{Im}(\varphi_\alpha)}_{=1}$$

Resta ver que $\mathrm{Im}(\varphi_\alpha) = \mathbb{R}$. O subespaço $\mathrm{Im}(\varphi_\alpha)$ de $\mathbb{R}$ não é o trivial $\{0\}$ porque $\varphi_\alpha \alpha = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 > 0$ é não-nulo como $\alpha \neq (0, \ldots, 0)$. Entao $\mathrm{Im}(\varphi_\alpha)$ deve ser o outro subespaço de $\mathbb{R}$, o $\mathbb{R}$ mesmo, veja Exercício 2.1.4.

Aula 16

Capítulo 6

Soma direta e projeções

No Capítulo 6 denotamos de

$$F, G, H \subset E$$

subespaços de um espaço vetorial E sobre um corpo $\mathbb{K}$. Na parte das involuções precisamos às vezes que $1 + 1 \neq 0$ em $\mathbb{K}$, veja Corolário 1.1.19. (Vale para $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, não para $\mathbb{Z}_2$.) O objeto central do nosso interesse será o conjunto

$$\mathcal{SC} = \mathcal{SC}(E) := \{(F, G) \mid F \oplus G = E\}$$

composto de pares (F, G) de **subespaços complementares** de E no sentido que o par decompõe $E = F \oplus F$ como soma direta.

O nosso objetivo será relacionar o conjunto $\mathcal{SC}(E)$ bijetivamente com duas classes de operadores lineares em E – os subconjuntos de $\mathcal{L}(E)$ dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \mathcal{P}(E) &:= \{P \mid P^2 = P\} \qquad \text{“}\textit{projeções em } E\text{”} \\ \mathcal{I} = \mathcal{I}(E) &:= \{S \mid S^2 = I_E\} \qquad \text{“}\textit{involuções em } E\text{”} \end{aligned}$$

Ambas condições fazem sentido no contexto geral de uma aplicação $s : X \to X$ num conjunto X. Para nos são relevantes as **involuções** ($s^2 = \mathrm{id}$). Temos três involuções naturais (i) de trocar os membros

$$\mu : \mathcal{SC} \to \mathcal{SC}, \quad (F, G) \mapsto (G, F)$$

(ii) de mudar o sinal

$$\sigma : \mathcal{I} \to \mathcal{I}, \quad S \mapsto -S$$

e (iii) de tomar diferença com o operador identidade

$$\delta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}, \quad P \mapsto I - P$$

Com efeito $(I - P)^2 = I^2 - 2P + P^2 = I - P$, assim realmente é uma projeção. Capítulo 6 é ilustrado na Figura 6.1. É comum indicar injetividade de uma aplicação com tal flecha $f : X \rightarrowtail Y$, sobrejetividade com tal flecha $f : X \twoheadrightarrow Y$.

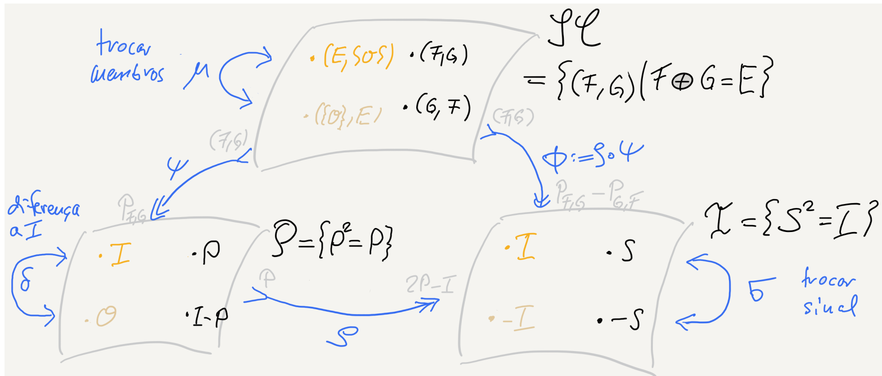

Figura 6.1: Conjuntos $\mathcal{SC}$ dos subespaços complementares, $\mathcal{P}$ das projeções, e $\mathcal{I}$ das involuções lineares – a diagrama das seis bijeções é comutativa

Preparações e lembranças

Definição 6.0.6 (Pontos fixos e anti-fixos)**.** Dado um conjunto X e uma aplicação $r : X \to X$. a) Um elemento $x \in X$ tal que $r(x) = x$ chama-se um **ponto fixo** de r. O conjunto dos pontos fixos de r satisfaz $\mathbf{Fix}(\boldsymbol{r}) \subset \mathrm{Im}(r)$.

b) Se X é um espaço vetorial denotamos de $\mathbf{aFix}(\boldsymbol{r})$ o conjunto de todos os **pontos anti-fixos** x de r, ou seja $r(x) = -x$.

É fácil – e instrutivo – checar que para aplicações idempotentes num conjunto X os pontos fixos já formam a imagem inteira, em símbolos

$$r^2 = r \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{Fix}(r) = \mathrm{Im}(r) \tag{6.0.1}$$

Para aplicações idempotentes é recomendável – geralmente ajuda bastante o entendimento – trabalhar com $\mathrm{Fix}(r)$ em vez de $\mathrm{Im}(r)$.

Exercício 6.0.7. Se $B \in \mathcal{L}(E)$, então $\mathrm{Fix}(B), \mathrm{aFix}(B) \subset E$ são subespaços.

Produto cartesiano e soma

Lembre-se do Exercício 3.1.23 que o produto cartesiano $G \times H$ de dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão

$$\dim(G \times H) = \dim G + \dim H$$

Dado dois subespaços G, H, será útil relembrar da Seção 2.3 a soma ordinária $G + H$ e a soma direta $G \oplus H$ deles. Se G, H são de dimensão finita vale a fórmula (3.2.1) a qual diz que

$$\dim(G + H) = \dim G + \dim H - \dim(G \cap H) \tag{6.0.2}$$

Exercício 6.0.8. Seja E um espaço vetorial com subespaços de intersecção trivial $G \cap H = \{\mathcal{O}\}$. Prove que $S : G \times H \to G \oplus H$, $(g, h) \mapsto g + h$, é um isomorfismo (linear, injetivo, sobrejetivo).

6.1 Projeções

Definição 6.1.1. Os operadores lineares idempotentes $P^2 = P \in \mathcal{L}(E)$ são chamados de **as projeções** de E. Um **par de subespaços complementares** de E é um par (F, G) de subespaços decompondo E no sentido que $F \oplus G = E$.

Lema 6.1.2 (Caracterização de projeção)**.** *Seja $P \in \mathcal{L}(E)$, então*

$$P \text{ projeção de } E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a) & \forall v \in \mathrm{Im}(P)\colon Pv = v \qquad \mathrm{Im}(P) = \mathrm{Fix}(P) \\ b) & E = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{N}(P) \qquad \text{“par complementar”} \end{cases}$$

Demonstração. “$\Rightarrow$” Suponha $P^2 = P$. a) Já sabemos de (6.0.1) que $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Fix}(P)$. b) Intersecção trivial: seja $v \in \mathrm{Fix}(P) \oplus \mathrm{N}(P)$, então $\mathcal{O} = Pv = v$.
“$\Leftarrow$” Se $v \in E$, então $Pv \in \mathrm{Im}(P) = \mathrm{Fix}(P)$, assim $P^2 v = P(Pv) = Pv$. □

Definição 6.1.3 (Projeção sobre F paralelamente G)**.** Seja (F, G) um par de subespaços complementares de E, escreva $v \in E = F \oplus G$ na forma $v = f + g$ com únicos elementos $f \in F$ e $g \in G$, veja Teorema 2.3.4. A aplicação dada por

$$P_{F,G} : E \to E, \quad v \mapsto f$$

é chamada de **projeção de E sobre F paralelamente G**.

Lema 6.1.4. *A aplicação $P := P_{F,G}$ definida encima é uma projeção de E. E imagem (os pontos fixos) e núcleo são dados por F e G, em símbolos*

$$F = \mathrm{Im}(P_{F,G}) = \mathrm{Fix}(P_{F,G}), \qquad G = \mathrm{N}(P_{F,G})$$

Além disso $P_{G,F} = I_E - P_{F,G}$.

Demonstração. Se $v = f + g$ e $\tilde v = \tilde f + \tilde g$, então $v + \tilde v = f + g + \tilde f + \tilde g = f + \tilde f + g + \tilde g$.
LINEAR: Assim $P(v + \tilde v) = P(f + \tilde f + g + \tilde g) = f + \tilde f = Pv + P\tilde v$. Como $\alpha v = \alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$ obtemos $P(\alpha v) = P(\alpha f + \alpha g) = \alpha f = \alpha P v$.
IDEMPOTENTE: Vale $P^2 v = P(P(f + g)) = Pf = f = Pv$.
$\mathrm{Im}(P) = F$: '$\subset$' óbvio '$\supset$' dado $f \in F$, então $Pf = f$.
$\mathrm{N}(P) = G$: '$\subset$' para $f + g = v \in \mathrm{N}(P)$ vale $\mathcal{O} = Pv = P(f + g) = f$. Assim segue que $v = g \in G$. '$\supset$' para $g \in G$ vale $Pg = P(\mathcal{O} + g) = \mathcal{O}$.
IDENTIDADE: $P_{G,F}(f + g) = g = (f + g) - f = I_E(f + g) - P_{F,G}(f + g)$ □

Teorema 6.1.5. *A seguinte aplicação é uma bijeção*

$$\mathcal{SC} = \{\textit{pares de subespaços complementares de } E\} \xrightarrow{\psi} \{\textit{projeções em } E\} = \mathcal{P}$$
$$(F, G) \mapsto P_{F,G}$$

com inversa $\chi\colon P \mapsto (\mathrm{Im}(P), \mathrm{N}(P))$. *Útil lembrar:* $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Fix}(P)$

Note-se que o subconjunto $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}(E)$ composto das projeções P de E não é um subespaço, por exemplo $(\alpha P)^2 = \alpha^2 P^2 = \alpha^2 P \neq \alpha P$ caso $\alpha^2 \neq \alpha \in \mathbb{K}$. Então não faz sentido falar sobre linearidade da bijeção ψ.

Demonstração. INJETIVO. Suponha $P_{F,G} = P_{\tilde{F},\tilde{G}}$, então aplique Lema 6.1.4 duas vezes para obter as identidades $F = \mathrm{Im}(P_{F,G}) = \mathrm{Im}(P_{\tilde{F},\tilde{G}}) = \tilde{F}$ e analogamente $G = \mathrm{N}(P_{F,G}) = \mathrm{N}(P_{\tilde{F},\tilde{G}}) = \tilde{G}$.
SOBREJETIVO. Dado uma projeção P em E, Lema 6.1.2 diz que o par definido por $(F,G) := (\mathrm{Im}(P), \mathrm{N}(P))$ é um par de subespaços complementares. Resta mostrar que $P = P_{\mathrm{Im}(P),\mathrm{N}(P)} \overset{\text{def.}}{=} \psi(F,G)$. Dado $w \in E$, Lema 6.1.2 diz que $w = f + g$ para únicos elementos $f \in \mathrm{Im}(P) = \mathrm{Fix}(P)$ e $g \in \mathrm{N}(P)$. Então vale

$$P_{\mathrm{Im}(P),\mathrm{N}(P)} w \overset{\text{def.}}{=} f \overset{\text{pt.fix.}}{=} Pf = Pf + \underbrace{\mathcal{O}}_{Pg} \overset{\text{lin.}}{=} P(f+g) = Pw$$

INVERSA. Dada uma projeção P em E, no item anterior temos visto que

$$P = P_{\mathrm{Im}(P),\mathrm{N}(P)} \overset{\text{def.}}{=} \psi\left(\mathrm{Im}(P), \mathrm{N}(P)\right) \overset{\text{def.}}{=} \psi\left(\chi(P)\right)$$

Vale $\chi\left(\psi(F,G)\right) \overset{\text{def.}}{=} (\mathrm{Im}(P_{F,G}), \mathrm{N}(P_{F,G})) = (F,G)$ segundo Lema 6.1.4 . $\square$

6.2 Involuções

Definição 6.2.1. Um operador linear $S \in \mathcal{L}(E)$ cujo quadrado $S^2 = I_E$ é a identidade chama-se de **involução** de E. Involuções são isomorfismos.

Com efeito, a condição $S^2 = I_E$ para ser uma involução implica injetivo e sobrejetivo. Como o núcleo sempre é mínima $\mathrm{N}(S) = \{\mathcal{O}\}$ e a imagem sempre é máxima $\mathrm{Im}(S) = E$ estes dois subespaços não são úteis, não – em contraste ao caso de projeções. Os lugares deles como par de subespaços complementares ocupam, no caso de involuções, os subespaços dos pontos fixos e anti-fixos

$$F := \mathrm{Fix}(S), \qquad A := \mathrm{aFix}(S)$$

A vinculação entre projeções P e involuções S, além de dar decomposições

$$\mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{N}(P) = E = F \oplus A$$

é a igualdade $S = P_{F,A} - P_{A,F}$ baseada na identidade

$$\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Fix}(P)$$

Nosso trajeto será assim: Suponhamos agora que $2 := 1 + 1 \neq 0$ em $\mathbb{K}$, veja Corolário 1.1.19. Primeiro mostramos que a fórmula estabelecida na dimensão 2 para a reflexão em torno de uma reta, veja (4.3.4), nos da uma bijeção

$$\rho : \mathcal{P} \to \mathcal{I}, \quad P \mapsto 2P - I_E$$

entre projeções e involuções com inversa $S \mapsto \frac{1}{2}(I_E + S)$. Caracterizamos involuções em termos de subespaços complementares com a composição de bijeções

$$\phi := \rho \circ \psi : \mathcal{SC} \to \mathcal{I}, \quad (F,G) \mapsto \rho(P_{F,G}) = P_{F,G} - P_{G,F} =: S_{F,G}$$

Todo é compatível no sentido que é comutativa a diagrama das 6 bijeções na Figura 6.1.

Lema 6.2.2 (Caracterização de involução)**.** *Seja $S \in \mathcal{L}(E)$, então*

$$S \textit{ involução de } E \quad \Leftrightarrow \quad E = \underbrace{\mathrm{Fix}(S)}_{=:F} \oplus \underbrace{\mathrm{aFix}(S)}_{=:A} \quad \textit{“par complementar } (F,A)\textit{”}$$

Além disso uma involução S é da forma $S = P_{F,A} - P_{A,F}$.

Demonstração. “$\Rightarrow$” Cada um elemento $x \in \mathrm{Fix}(S) \cap \mathrm{aFix}(S)$ é nulo porque $x = Sx = -x$. Os elementos $v \in E$ são da forma $v = Pv + Qv$ onde $Pv := \frac{1}{2}(v + Sv)$ e $Qv := \frac{1}{2}(v - Sv)$. Mas $S^2 = I_E$ implica $S(Pv) = Pv$ e $S(Qv) = -Qv$.
“$\Leftarrow$” Como $E = \mathrm{Fix}(S) \oplus \mathrm{aFix}(S)$ os elementos $v \in E$ são da forma $v = f + a$ para únicos elementos $f \in \mathrm{Fix}(S)$ e $a \in \mathrm{aFix}(S)$, veja Teorema 2.3.4. Como S é linear obtemos

$$S^2 v = S(S(f+a)) = S(Sf + Sa) = S(f - a) = Sf - Sa = f + a = v$$

para todos os $v \in E$. “$S = S_{F,A}$” Escrevendo $v \in E$ como $v = f + a$ obtemos

$$Sv = S(f+a) = Sf + Sa = f - a = P_{F,A}v - P_{A,F}v$$

segundo Definição 6.1.3. □

Involuções e projeções

Teorema 6.2.3. *Seja $1 + 1 \neq 0$ em $\mathbb{K}$. A seguinte aplicação é uma bijeção*

$$\begin{aligned} \rho\colon \mathcal{P} = \{\textit{projeções em } E\} &\to \{\textit{involuções em } E\} = \mathcal{I} \\ P &\mapsto 2P - I_E =: S_P \end{aligned}$$

com inversa $\rho^{-1} = \gamma\colon S \mapsto \frac{1}{2}(I_E + S)$. As projeções $\gamma(S)$ e $\gamma(-S)$, ou seja

$$P := \tfrac{1}{2}(I_E + S), \qquad Q := \tfrac{1}{2}(I_E - S)$$

satisfazem $P + Q = I_E$ e $P - Q = S$.

Demonstração. Seja $I = I_E$. Bem definido. $(2P - I)^2 = 4P^2 - 2P + I = 2P - I$.
Injetivo. Suponha $2P - I = 2\tilde{P} - I$, adicione $-I$ para obter $2P = 2\tilde{P}$. Então $P = \tilde{P}$ segundo Corolário 1.1.19.
Sobrejetivo. Dado uma involução S em E, defina $P := \gamma(S) = \frac{1}{2}(I + S)$ para obter $\rho(P) = 2P - I = (I + S) - I = S$.
Inversa. Dada uma involução S em E, no item anterior vimos que $S = \rho(\gamma(S))$. De outro lado $\gamma(\rho(P)) = \gamma(2P - I) = \frac{1}{2}(I + (2P - I)) = P$. □

Involuções e subespaços complementares

Definição 6.2.4 (Involução/reflexão em torno de F ao longo G)**.** Seja (F, G) um par de subespaços complementares de E, escreva $v \in E = F \oplus G$ na forma $v = f + g$ com únicos elementos $f \in F$ e $g \in G$, veja Teorema 2.3.4. A aplicação

$$S_{F,G} := P_{F,G} - P_{G,F}\colon E \to E$$

é chamada de **involução (ou reflexão) de E em torno de F ao longo G**.

Vamos justificar chamar $S_{F,G}$ de involução em torno de F ao longo G:

Lema 6.2.5. *A aplicação $S_{F,G}$ definida encima é uma involução de E. Os pontos fixos e anti-fixos contém F e G, em símbolos*

$$F \subset \mathrm{Fix}(S_{F,G}), \qquad G \subset \mathrm{aFix}(S_{F,G}) \tag{6.2.1}$$

Valem igualdades nos casos $\dim E < \infty$ *ou* $1+1 \neq 0$ *em* $\mathbb{K}$.

Ter igualdades em (6.2.1) é importante para consistência: como $S_{F,G}$ euma involução o Lema 6.2.2 aplica e fala que $S_{F,G} = S_{\mathrm{Fix}(S_{F,G}),\mathrm{aFix}(S_{F,G})}$. Então espera-se igualdade dos pares $(F,G) = (\mathrm{Fix}(S_{F,G}), \mathrm{aFix}(S_{F,G}))$.

Demonstração. Dado $v \in E$, então $\exists! f \in F$ e $\exists! g \in G$ tal que $v = f + g$.
Linearidade: É óbvio como $S_{F,G}$ é soma de dois operadores lineares.
$\boldsymbol{S^2 = \mathrm{I}_E}$**:** Usamos a definição de $S := S_{F,G}$ e Lema 6.1.4 para obter

$$\begin{aligned}
S^2 v &= S\left(\left(P_{F,G} - P_{G,F}\right)(f+g)\right)\\
&= S(f-g)\\
&= \left(P_{F,G} - P_{G,F}\right)(f-g)\\
&= f - (-g)\\
&= v
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{G = \mathrm{aFix}(S_{F,G})}$**:** Como $\mathrm{aFix}(S_{F,G}) = \mathrm{Fix}(S_{G,F})$ o próximo item aplica.
$\boldsymbol{F = \mathrm{Fix}(S_{F,G})}$**:** '$\subset$' Seja $f \in F$. Como $F = \mathrm{Im}(P_{F,G}) = \mathrm{Fix}(P_{F,G})$ e $F = \mathrm{N}(P_{G,F})$ obtemos $Sf = P_{F,G} f - P_{G,F} f = f$.
'$\supset$' **Caso $\boldsymbol{1+1 \neq 0}$ em $\mathbb{K}$:** Escreva $x \in \mathrm{Fix}(S) \subset E$ unicamente na forma $x = f + g$ onde $f \in F$ e $g \in G$. Então

$$f + g = x = Sx = P_{F,G}(f+g) - P_{G,F}(f+g) = f - g$$

Assim $g + g = \mathcal{O}$. Segundo Corolário 1.1.19 obtemos $g = \mathcal{O}$. Então $x = f \in F$.
'$\supset$' **Caso $\boldsymbol{\dim E < \infty}$:** Como $(F,G) \in \mathcal{SC}$ e segundo Lema 6.2.2 ($S^2 = I_E$)

$$F \oplus G = E = \mathrm{Fix}(S) \oplus \mathrm{aFix}(S)$$

Então aplicando a fórmula (6.0.2) a cada uma soma direta nos da as igualdades

$$\dim F + \dim G = \dim E = \dim \mathrm{Fix}(S) + \dim \mathrm{aFix}(S)$$

Como $0 \le \dim F \le \dim \mathrm{Fix}(S)$ e $0 \le \dim G \le \dim \mathrm{aFix}(S)$ segundo Teorema 3.2.1 (c), as dimensões devem ser iguais, ou seja

$$\dim F = \dim \mathrm{Fix}(S), \qquad \dim G = \dim \mathrm{aFix}(S)$$

Mas, segundo Teorema 3.2.1 (d), inclusão com a mesma dimensão implica igualdade, assim $F = \mathrm{Fix}(S)$ e $G = \mathrm{aFix}(S)$. □

Exercício 6.2.6. Faça um desenho de $E = \mathbb{R}^2$ com dois subespaços $F \neq G$ de dimensão 1. Ilustre para varias escolhas de $v \in E, F, G$ a imagem $S_{F,G} v$ usando os vetores (pensa em flechas) $P_{F,G} v$ e $-P_{G,F} v$.

6.3 Exercícios

1. No plano $\mathbb{R}^2$, considere as retas F_1 e F_2, definidas respectivamente pelas equações $y = ax$ e $y = bx$, onde $a \neq b$ são números reais.

   (a) Exprima $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ como soma de um vetor de F_1 e um de F_2.

   (b) Seja $P = P_{F_1,F_2} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ a projeção sobre F_1 paralelamente a F_2. Obtenha a matriz $[P]$ de P.[1]

   (c) Encontre a matriz $[S]$ da reflexão $S = S_{F_2,F_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em torno da reta F_2, paralelamente a F_1.[2]

2. Exprima $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como soma de um vetor do plano F_1, cuja equação é $x + y - z = 0$, com um vetor da reta F_2, gerada pelo vetor $(1, 2, 1)$. Conclua que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$. Determine a matriz $[P]$ da projeção $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tem imagem F_1 e núcleo F_2.

3. Dado $P \in \mathcal{L}(E)$, prove ou *desprove*:

   (a) $E = \mathrm{N}(P) \oplus \mathrm{Im}(P) \quad \Rightarrow \quad P$ é projeção de E.

   (b) $E = \mathrm{N}(P) + \mathrm{Im}(P) \quad \Rightarrow \quad P$ é projeção de E.

   (c) P é projeção $\quad \Leftrightarrow \quad I - P$ é projeção.

   (d) P é projeção $\quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{N}(P) = \mathrm{Im}(I - P) \quad \big(\Leftrightarrow \quad \mathrm{N}(I - P) = \mathrm{Im}(P)\big)$.

4. Sejam $F_1, F_2 \subset E$ subespaços com $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim E < \infty$. Prove
$$E = F_1 \oplus F_2 \iff F_1 \cap F_2 = \{0\}.$$

5. Sejam $P_1, \dots, P_n : E \to E$ operadores lineares tais que
$$P_1 + \dots + P_n = I \quad \text{e} \quad \forall i \neq j : \; P_i P_j = 0.$$
   Prove que estes operadores são projeções.

6. Sejam $P, Q \in \mathcal{L}(E)$ projeções, prove que são equivalentes:

   (a) $P + Q$ é uma projeção;

   (b) $PQ + QP = 0$;

   (c) $PQ = QP = 0$.

   [Para provar ii) $\Rightarrow$ iii), multiplique à esquerda, e depois à direita, por P.]

7. Seja $E = F_1 \oplus F_2$. O *gráfico* de uma transformação linear $B : F_1 \to F_2$ é o subconjunto $\mathrm{graph} B := \{v + Bv \mid v \in F_1\}$ de E. Prove que

[1] Lembre-se que $[P] := [P]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ denota a matriz de P em relação à base canônica $\mathcal{E}$.

[2] Suponha $E = F_1 \oplus F_2$. Então cada um $w \in E$ é da forma $w = u + v$ para únicos elementos $u \in F_1$ e $v \in F_2$. Na aula mostramos $P_{F_1,F_2} w = u$. (Fato: $S_{F_1,F_2} = P_{F_1,F_2} - P_{F_2,F_1}$.) Portanto $S_{F_1,F_2} w = u - v$.

(a) graph$B$ é um subespaço de E.

(b) a projeção $P = P_{F_1,F_2} : E \to E$, restrita a graph$B$, define um isomorfismo entre graph$B$ e F_1.

Aula X

Capítulo 7

Matrizes de transformações lineares

Consideramos uma transformação linear

$$A : E \to F$$

entre espaços vetorias sobre um corpo $\mathbb{K}$. Denotamos o operador identidade de

$$\mathrm{I}_E : E \to E, \quad v \mapsto v$$

e o em F de I_F, veja (4.1.1). Agora será muito útil escrever uma base ordenada na forma de uma lista ordenada. Sejam $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ e $\tilde{\mathcal{U}}$ bases ordenadas de E e $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ e $\tilde{\mathcal{V}}$ de F. Nas seguintes seções vamos estabelecer e provar os detalhes da seguinte diagrama comutativa[1]

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "\mathbf{a}:={[A]}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}"] \arrow[ddd, "\mathbf{p}:={[I_E]}_{\mathcal{U},\tilde{\mathcal{U}}}"', "\simeq"] \arrow[dr, "\mathcal{U}", "\simeq"'] & & & \mathbb{K}^m \arrow[ddd, "\simeq"', "\mathbf{q}:={[I_F]}_{\mathcal{V},\tilde{\mathcal{V}}}"] \arrow[dl, "\mathcal{V}"', "\simeq"] \\
& E \arrow[r, "A"] & F & \\
& & & \\
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "\tilde{\mathbf{a}}:={[A]}_{\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\mathcal{V}}}"'] \arrow[uur, "\tilde{\mathcal{U}}"', "\simeq"] & & & \mathbb{K}^m \arrow[uul, "\tilde{\mathcal{V}}", "\simeq"']
\end{tikzcd} \tag{7.0.1}$$

No diagrama $\mathbf{p}$ é a chamada **matriz de passagem** da base $\mathcal{U}$ de E para $\tilde{\mathcal{U}}$. Além disso $\mathbf{a}$ é a **matriz da transformação linear** $A : E \to F$ em respeito às bases $\mathcal{U}$ do domínio e $\mathcal{V}$ do contradomínio.

[1] **Comutatividade** significa que caso entre dois espaços vetoriais no diagrama tem dois caminhos de flechas, então não importa o qual usamos. Note que a flecha de um isomorfismo '$\simeq$' também existe na direção reversa (no diagrama só mostramos uma flecha para simplicidade).

Comentário 7.0.1 (Interpretação da parte triangular esquerda da diagrama)**.** Sejam $\mathcal{U}$,$\tilde{\mathcal{U}}$ e $\mathcal{W}$ bases do espaço vetorial E da dimensão n. Sejam

$$\begin{array}{rl} \mathbf{p}: & \text{a matriz de passagem de } \mathcal{U} \text{ para } \tilde{\mathcal{U}} \\ \mathbf{r}: & \text{a matriz de passagem de } \tilde{\mathcal{U}} \text{ para } \mathcal{W} \end{array}$$

Vamos entender nesta seção que nestas hipóteses

$$\begin{array}{rl} \mathbf{rp} & \text{é a matriz de passagem de } \mathcal{U} \text{ para } \mathcal{W} \\ \mathbf{p^{-1}} & \text{é a matriz de passagem de } \tilde{\mathcal{U}} \text{ para } \mathcal{U} \end{array}$$

7.1 Bases induzem isomorfismos

Definição 7.1.1 (Um símbolo com duas significados)**.** Usamos *o mesmo símbolo* para a base e para o isomorfismo determinado pela: Escrevemos

$$\mathcal{U} : \mathbb{K}^n \to E, \quad x \mapsto \mathcal{U}x$$

para a transformação linear determinada pela base $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, ou seja

$$\mathcal{U}x := (\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \underbrace{\xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n}_{=v} \in E \tag{7.1.1}$$

Obviamente a aplicação $\mathcal{U} : \mathbb{K}^n \to E$ é linear. Ela é injetiva como a base $\mathcal{U}$ é LI (Corolário 3.1.2) e sobrejetiva como $\mathcal{B}$ gera E.

Portanto $\mathcal{U} : \mathbb{K}^n \to E$ é um isomorfismo, símbolo $\simeq$.

No caso $E = \mathbb{K}^n$ a base canônica $\mathcal{E}^n$ produz o operador identidade $\mathcal{E}^n = I_{\mathbb{K}^n}$.

Seja $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ uma base ordenada de E. Dado $v \in E$, então $x := \mathcal{U}^{-1}v \in \mathbb{K}^n$ é o vetor coordenada $[v]_\mathcal{U}$ de v em respeito à base $\mathcal{U}$ introduzido em (3.1.2): Com efeito como $\mathcal{B}$ é base exprime-se v como CL dos elementos de $\mathcal{B}$ com coeficientes únicos x_i, ou seja $v = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n =: \mathcal{U}x$. Assim

$$\mathcal{U}^{-1}v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [v]_\mathcal{U} \in \mathbb{K}^n \tag{7.1.2}$$

O isomorfismo $\mathcal{U}^{-1} : E \to \mathbb{K}^n$ é chamado de **sistema de coordenadas** em E. No caso de $E = \mathbb{K}^n$ com base canônica $\mathcal{U} = \mathcal{E}$ abreviamos $[v] := [v]_\mathcal{E}$.

7.2 Matriz associada a uma TL e bases

Dado uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e bases $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ de E e $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ de F, então podemos representar os elementos $A\xi_j \in F$ como combinação linear na base $\mathcal{V}$ com coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{K}$ únicos. Com efeito

$$\boxed{A\xi_j = \eta_1 a_{1j} + \dots + \eta_m a_{mj}} \tag{7.2.1}$$

Note como pela nossa definição o índice do η_i coincide com o primeiro (mais perto) índice do escalar a_{ij} o qual deve ser escrito *atrás*.

Os escalares a_{ij} formam uma matriz $m \times n$ chamada de **matriz de *A*** em respeito às bases $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$, símbolo

$$[A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} := \mathbf{a} = [a_{ij}] \tag{7.2.2}$$

Note-se que a matriz $\mathbf{a}$ tem como colunas

$$\mathbf{a}_{\bullet j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = [A\xi_j]_{\mathcal{V}}$$

os vetores coordenadas dos imagens $A\xi_j$, ou seja

$$[A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} = \left[[A\xi_1]_{\mathcal{V}} \dots [A\xi_n]_{\mathcal{V}} \right] = [\mathbf{a}_{\bullet 1} \dots \mathbf{a}_{\bullet n}] = \mathbf{a}$$

No caso $E = F$ e $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ abreviamos $[A]_{\mathcal{U}} := [A]_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$. No caso $E = F = \mathbb{K}^n$ e $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{E}$ abreviamos $[A] := [A]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$.

Exercício 7.2.1. Mostre que a matriz do operador identidade

$$[I_E]_{\mathcal{U}} := [I_E]_{\mathcal{U},\mathcal{U}} = \mathbb{1}$$

sempre é a matriz identidade se usamos só uma base $\mathcal{U}$ de E.

Teorema 7.2.2. *Levando transformações lineares às suas matrizes*

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_{\mathcal{U},\mathcal{V}} : \mathcal{L}(E, F) &\xrightarrow{\simeq} \mathrm{M}(n \times m; \mathbb{K}) \\ A &\mapsto [A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Seja $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ base de E e $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ de F.
Linear. Escreve (7.2.2) para A, para B, e depois adiciona as duas equações e use $(A + B)\xi_j = A\xi_j + B\xi_j$.
Injetivo. Suponha $(a_{ij}) := [A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} = [B]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} =: (b_{ij})$. Então A e B coincidem

$$A\xi_j = \eta_1 a_{1j} + \dots + \eta_m a_{mj} = \eta_1 b_{1j} + \dots + \eta_m b_{mj} = B\xi_j$$

nos elementos de uma base e linearidade implica que coincidem em todo $v \in E$.
Sobrejetivo. Dado $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$, para cada um j defina

$$A\xi_j := \eta_1 a_{1j} + \dots + \eta_m a_{mj}$$

Isso determina A unicamente (Prop. 4.1.16). Então $\Psi(A) := [A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} = \mathbf{a}$. $\square$

Teorema 7.2.3. *Considere duas transformações lineares*

$$E \xrightarrow{A} F \xrightarrow{B} G$$

entre três espacos vetoriais com bases respectivas

$$\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n), \qquad \mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m), \quad \mathcal{W} = (\nu_1, \dots, \nu_p)$$

Então a matriz da composição

$$[BA]_{\mathcal{U},\mathcal{W}} = [B]_{\mathcal{V},\mathcal{W}} [A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \tag{7.2.3}$$

é o produto das matrizes.

Demonstração. Sejam **a** e **b** as matrizes de A e B, seja **c** aquela de BA. Assim

$$A\xi_j = \sum_{k=1}^{m} \eta_k a_{kj}, \qquad B\eta_k = \sum_{i=1}^{p} \nu_i b_{ik}, \qquad BA\xi_j = \sum_{i=1}^{p} \nu_i c_{ij}$$

para $j = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, m$. Use estas identidades para obter

$$\sum_{i=1}^{p} \nu_i c_{ij} = B(A\xi_j) = \sum_{k=1}^{m} (B\eta_k) a_{kj} = \sum_{i=1}^{p} \nu_i \sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj}$$

onde no último passo temos permutado a ordem das somas *finitas*. Mas como a base $\mathcal{W}$ é LI os coeficentes dos ν_i devem ser iguais (Corolário 3.1.2). □

Lembre-se do Exemplo 3.1.22 (c) que $\dim \mathrm{M}(n \times m; \mathbb{K}) = nm$. Vamos ver no futuro que isomorfismos preservam dimensões – o que implica

Corolário 7.2.4. $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim \mathrm{M}(n \times m; \mathbb{K}) = nm = \dim E \cdot \dim F$

7.3 Mudança de base – comutatividade da diagrama

Nesta seção estudamos na diagrama (7.0.1) o que acontece a) com um vetor coordenada $[v]_{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^{-1} v$ se trocamos a base $\mathcal{U}$ de E para uma outra base $\tilde{U}$ e b) com a matriz de uma transformação linear se tambémtrocamos a base de F.

Vetor coordenada

A matriz $\mathbf{p} := [I_E]_{\mathcal{U},\tilde{\mathcal{U}}}$ do operador identidade, por definição (7.2.1), satisfaz

$$\xi_j = \mathrm{I}_E\, \xi_j = \tilde{\xi}_1 p_{1j} + \dots + \tilde{\xi}_n p_{nj} \qquad j = 1, \dots, n. \tag{7.3.1}$$

Nas outras palavras ela exprime os elementos da *base velha* $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ de E como combinação linear dos elementos da *base nova* $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n)$ de E. Por isso $\mathbf{p}$ é chamado de **matriz de passagem de $\mathcal{U}$ para $\tilde{\mathcal{U}}$**. A matriz de passagem participa do diagrama (7.0.1) fazendo as partes triangulares comutativo (7.0.1).

Lema 7.3.1. *$\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{p} = \mathcal{U}$ na diagrama (7.0.1), equivalentemente $[I_E]_{\mathcal{U},\widetilde{\mathcal{U}}} = \tilde{\mathcal{U}}^{-1}\mathcal{U}$.*

Demonstração. Para $x \in \mathbb{K}^n$ vale

$$\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{p}x = \left(\tilde{\xi}_1, \ldots, \tilde{\xi}_n\right) \begin{bmatrix} \sum_k p_{1k}x_k \\ \vdots \\ \sum_k p_{nk}x_k \end{bmatrix} = \sum_\ell \tilde{\xi}_\ell \sum_k p_{\ell k}x_k = \sum_k \underbrace{\left(\sum_\ell \tilde{\xi}_\ell p_{\ell k}\right)}_{\overset{(7.3.1)}{=} \xi_k} x_k = \mathcal{U}x$$

□

Corolário 7.3.2. *Toda matriz de passagem é um isomorfismo e sua inversa é*

$$[I_E]^{-1}_{\mathcal{U},\widetilde{\mathcal{U}}} = [I_E]_{\widetilde{\mathcal{U}},\mathcal{U}} = \mathcal{U}^{-1}\widetilde{\mathcal{U}}$$

Demonstração. Aplicando $\tilde{\mathcal{U}}^{-1}$ em ambos os lados de $\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{p} = \mathcal{U}$ obtem-se $\tilde{\mathcal{U}}^{-1}\mathcal{U} = \mathbf{p} := [I_E]_{\mathcal{U},\widetilde{\mathcal{U}}}$. Assim $\mathbf{p}$ é um isomorfismo como $\mathcal{U}$ e $\widetilde{\mathcal{U}}$ são. Toma as inversas em ambos lados e use (4.1.2) para obter $[I_E]^{-1}_{\mathcal{U},\widetilde{\mathcal{U}}} = \mathbf{p}^{-1} = \mathcal{U}^{-1}\widetilde{\mathcal{U}} = [I_E]_{\widetilde{\mathcal{U}},\mathcal{U}}$. □

Matriz de uma transformação linear

Lema 7.3.3. *$A\mathcal{U} = \mathcal{V}\mathbf{a}$ na diagrama (7.0.1).*

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{K}^n$, então

$$\begin{aligned} A\mathcal{U}x &= A\left(\xi_1, \ldots, \xi_n\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\left(\xi_1 x_1 + \ldots \xi_n x_n\right) \\ &= \underbrace{(A\xi_1)}_{\eta_1 a_{11} + \cdots + \eta_m a_{m1}} x_1 + \cdots + \underbrace{(A\xi_n)}_{\eta_1 a_{1n} + \cdots + \eta_m a_{mn}} x_n \\ &= \sum_{j=1}^m (\eta_j a_{j1}) x_1 + \cdots + \sum_{j=1}^m (\eta_j a_{jm}) x_n \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} A\mathcal{U}x &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (\eta_j a_{jk}) x_k = \sum_{j=1}^m \eta_j \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k}_{\mathbf{a}_{j\bullet} x} \\ &= \eta_1 \mathbf{a}_{1\bullet} x + \cdots + \eta_m \mathbf{a}_{m\bullet} x = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\bullet} x \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\bullet} x \end{bmatrix} = \mathcal{V}\mathbf{a}x \end{aligned}$$

□

Segundo as Lemas 7.3.3 e 7.3.1 o diagrama (7.0.1) é comutativo, e assim recebemos a relação

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{q}\mathbf{a}\mathbf{p}^{-1}$$

entre as matrizes de A em respeito às bases novas e velhas. No caso $F = E$ munido das bases $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ e $\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{\mathcal{U}}$ recebemos

$$[A]_{\tilde{\mathcal{U}}} = \mathbf{p}\,[A]_{\mathcal{U}}\,\mathbf{p}^{-1}$$

Caso especial $E = F = \mathbb{K}^n$ com a base canônica $\mathcal{E}$ e uma base $\mathcal{U}$

Considere o caso de um operador linear $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ onde $\mathbb{K}^n$ é munido originalmente da base canônica $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ e depois de uma base nova $\mathcal{U}$. Neste caso o diagrama (7.0.1) torna-se no diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "\mathbf{a}:=[A]"] \arrow[dd, "\mathbf{p}:={[I_{\mathbb{K}^n}]}_{\mathcal{E},\mathcal{U}}"', "\simeq"] \arrow[dr, "\mathcal{E}=I_{\mathbb{K}^n}", "\simeq"'] & & & \mathbb{K}^n \arrow[dd, "\mathbf{p}", "\simeq"'] \arrow[dl, "\mathcal{E}=I_{\mathbb{K}^n}"', "\simeq"] \\
& \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^n & \\
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "\tilde{\mathbf{a}}:={[A]}_{\mathcal{U}}"'] \arrow[ur, "\simeq", "\mathcal{U}"'] & & & \mathbb{K}^n \arrow[ul, "\simeq"', "\mathcal{U}"]
\end{tikzcd} \tag{7.3.2}$$

o qual disponibiliza a relação $[A]_{\mathcal{U}} = \mathbf{p}\,[A]\,\mathbf{p}^{-1}$ entre as matrizes de A quando trocar a base canônica por qualquer outra base.

Exercício 7.3.4. Suponha que $E = \mathbb{K}^n$ munido da base canônica $\mathcal{E}$ como base velha, veja diagrama (7.3.2). Então os membros da base nova $\mathcal{U} = (\xi_1 \dots, \xi_n)$ formam as colunas da matriz inversa $\mathbf{p}^{-1}$. Veja Exercício 7.4.5.

Nas outras palavras, como a inversa de $\mathbf{p} := [I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{E},\mathcal{U}}$ é $[I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{U},\mathcal{E}}$, vale a seguinte fórmula

$$\boxed{[I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{U},\mathcal{E}} = [\mathcal{U}]}$$

onde $[\mathcal{U}]$ denota a matriz cujas colunas sao os elementos da base $\mathcal{U}$ de $\mathbb{K}^n$.

7.4 Exercícios e umas soluções

Matriz de uma transformação linear

Exercício 7.4.1. Considere a base ordenada $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$, onde

$$u = (1, 1, 1), \qquad v = (1, -1, 1), \qquad w = (1, 1 - 1)$$

Seja $\mathcal{B}^* = (\phi, \psi, \chi)$ a base (de $\mathbb{R}^{3^*}$) dual de $\mathcal{B}$. Calcule as matrizes $[\phi], [\psi], [\chi]$ das transformações lineares $\phi, \psi, \chi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Uma solução. Sejam $\mathcal{E}^3 = (e_1, e_2, e_3)$ e $\mathcal{E}^1 = (E_1)$ as bases canônicas onde o vetor unitário em $\mathbb{R}^1$ é a lista $E_1 = (1)$ de um membro com 1 no 1-ésimo lugar (e nulos nos outros lugares – as quais não têm). Seja $x_i := \phi e_i$, então usando a propriedade da base dual e linearidade obtemos

$$\begin{aligned}
1 &= \phi u = \phi(1,1,1) = \phi e_1 + \phi e_2 + \phi e_3 = x_1 + x_2 + x_3 \\
0 &= \phi v = \phi(1,-1,1) = \phi e_1 - \phi e_2 + \phi e_3 = x_1 - x_2 + x_3 \\
0 &= \phi w = \phi(1,1,-1) = \phi e_1 + \phi e_2 - \phi e_3 = x_1 + x_2 - x_3
\end{aligned}$$

Usamos escalonamento para resolver o SL de 3 equações nas 3 incógnitas $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$ as quais são listas de um membro só. O resultado é

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
1 &= x_1 = \phi e_1 = E_1 \phi_{11} = 1 \cdot \phi_{11} = \phi_{11} \\
0 &= x_2 = \phi e_2 = E_1 \phi_{12} = 1 \cdot \phi_{12} = \phi_{12} \\
0 &= x_3 = \phi e_3 = E_1 \phi_{13} = 1 \cdot \phi_{13} = \phi_{13}
\end{aligned}$$

e assim

$$[\phi]_{\mathcal{E}^3,\mathcal{E}^1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Analogamente obtemos

$$[\psi]_{\mathcal{E}^3,\mathcal{E}^1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\chi]_{\mathcal{E}^3,\mathcal{E}^1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Olha só, no caso $E = \mathbb{R}^n$ a matriz da base dual de qualquer base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ tem em respeito às bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^1$ a forma da base canônica.

Exercício 7.4.2. Considere as transformações lineares

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, x + y)$$

e $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definido assim

$$B(x, y, z) = (ax + (a-1)y + (1-a)z, -bx + (1-b)y + bz)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes. Determine o operador $BA \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.
[Dica: Use as matrizes $[A]$ e $[B]$ que correspondem a A e B respectivamente.]

Uma solução. Denotamos de $\mathcal{E}^2 = \{e_1, e_2\}$ e $\mathcal{E}^3 = \{E_1, E_2, E_3\}$ as bases canônicas. As duas colunas da matriz $[A] \in \mathrm{M}(3 \times 2)$ são formadas das coeficientes seguintes

$$\begin{aligned}
Ae_1 &= A(1,0) = (1,0,1) = 1E_1 + 0E_2 + 1E_3 \\
Ae_2 &= A(0,1) = (0,1,1) = 0E_1 + 1E_2 + 1E_3
\end{aligned}$$

As três colunas da matriz $[B] \in \mathrm{M}(2 \times 3)$ são formadas das coeficientes seguintes

$$\begin{aligned}
BE_1 &= B(1,0,0) = (a, -b) = ae_1 - be_2 \\
BE_2 &= B(0,1,0) = (a-1, 1-b) = (a-1)e_1 + (1-b)e_2 \\
BE_3 &= B(0,0,1) = (1-a, b) = (1-a)e_1 + be_2
\end{aligned}$$

Assim recebemos

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [B] = \begin{bmatrix} a & a-1 & 1-a \\ -b & 1-b & b \end{bmatrix}$$

Use (7.2.3) no primeiro passo e no segundo calcule produto matriz para obter

$$[BA] = [B]\,[A] = \begin{bmatrix} a+1-a1 & a-1+1-a \\ -b+b & 1-b+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1}_2$$

Use a relação (7.2.1) entre matriz e operador para concluir que $BA = I_{\mathbb{R}^2}$.

Exercício 7.4.3. Qual é a matriz $[A]$ do operador $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$A(2,3) = (2,3) \qquad \text{e} \qquad A(-3,2) = (0,0) \text{ ?}$$

Exercício 7.4.4. Considere as transformações lineares

$$A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R}), \quad (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n,$$

e

$$B : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad p = p(x) \mapsto (p(0), p(1), \ldots, p(n))\,.$$

Determina a matriz $[BA]$ da composição $BA : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$.

Uma solução. Seja $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_{n+1})$ a base canônica e seja

$$\mathcal{M} = (x^0, x, x^2, \ldots, x^n) =: (\eta_1, \ldots, \eta_{n+1}), \qquad x^0 := 1$$

a base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ composto de monômios. Segundo a definição de A recebemos

$$Ae_i = A(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = 0x^0 + \cdots + 0x^{i-1} + 1x^i + 0x^{i+1} + \cdots + 0x^n$$

para $i = 1, \ldots, n+1$. Segundo (7.2.1) obtemos $[A]_{\mathcal{E},\mathcal{M}} = \mathbb{1}_{n+1}$. Analogamente

$$B\eta_i = (\eta_i(0), \eta_i(1), \ldots, \eta_i(n)) = \left(0^{i-1}, 1^{i-1}, \ldots, n^{i-1}\right) = \sum_{j=1}^{n+1} e_j \underbrace{(j-1)^{i-1}}_{b_{ji}}$$

para cada $i = 1, \ldots, n+1$ o que nos da a i-ésima coluna da matriz

$$[B]_{\mathcal{M},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0^0 & 0^1 & \ldots & 0^n \\ 1^0 & 1^1 & \ldots & 1^n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ n^0 & n^1 & \ldots & n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & n & \ldots & n^n \end{bmatrix}$$

Assim $[B]_{\mathcal{M},\mathcal{E}} = [B]_{\mathcal{M},\mathcal{E}}\, \mathbb{1}_{n+1} = [B]_{\mathcal{M},\mathcal{E}}\, [A]_{\mathcal{E},\mathcal{M}} = [BA]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ segundo (7.2.3).

Mudança de base – vetor

Ignore no momento:

Exercício 7.4.5. Seja $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Dados vetores $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$ e escalares $p_{ij} \in \mathbb{R}$ tal que

$$e_j = \xi_1 p_{1j} + \xi_2 p_{2j} + \cdots + \xi_n p_{nj}, \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

mostre que

1. a lista ordenada $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.
2. a matriz $\mathbf{p} = [p_{ij}]$ é a inversa da matriz $\mathbf{q}$ cujos vetores-coluna são por definição $\xi_1, \dots, \xi_n$, em símbolos $\mathbf{qp} = \mathbb{1}_n$. Veja Exercício 7.3.4.

Em palavras, obtém-se a matriz $\mathbf{p} := [I_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{E},\mathcal{U}}$ de mudança da base canônica $\mathcal{E}$ para uma base nova $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ como a matriz inversa da matriz $\mathbf{q} := [\xi_1 \dots \xi_n]$ cujas colunas são os ξ_i's, em símbolos

$$\mathbf{p} := [I_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{E},(\xi_1,\dots,\xi_n)} = \mathbf{q}^{-1} = [\xi_1 \dots \xi_n]^{-1}$$

Mudança de base – matriz

7.5 Eliminação e aplicações (MA141)

7.5.1 Dimensão do subespaço gerado por m vetores

7.5.2 Cálculo do posto

7.5.3 Cálculo da matriz inversa

7.5.4 Resolução de sistemas lineares

Capítulo 8

Subespaços invariantes

Parte III

Estruturas adicionais e operadores especiais

Capítulo 9

Produto interno

9.1 Ortogonalidade

9.2 Ângulos e cumprimentos

9.3 Desigualdades

9.4 Processo de Gram-Schmidt

9.5 Complemento ortogonal

Capítulo 10

A adjunta

Capítulo 11

Operadores auto-adjuntos

Capítulo 12

Operadores ortogonais

12.1 Matrizes

12.2 Operadores

12.3 Decomposição polar

Apêndice A

Demonstrações restantes

A.1 Espaços vetoriais

Lema A.1.1 (Lema 1.1.4)**.** *Seja $(G, *)$ um grupo. Então vale o seguinte.*
1) *O elemento neutro é único.*
2) *Os elementos inversos são únicos.*
3) *Para todos os elementos $f, g, h \in G$ vale:*
   a) $f * g = f * h \;\Rightarrow\; g = h$ *(lei da corte)*
   b) $f * g = f \;\Rightarrow\; g = e$
   c) $f * g = e \;\Rightarrow\; g = \bar{f}$

Demonstração. 1) Se $e, \tilde{e} \in G$ satisfazem o axioma (elemento neutro), então usando o axioma para e e depois para $\tilde{e}$ obtemos que $e = e * \tilde{e} = \tilde{e}$.
2) Seja $g \in G$. Se $\bar{g}, \tilde{g} \in G$ satisfazem o axioma (inverso) para g, então obtemos

$$\bar{g} = e * \bar{g} = \underbrace{(\tilde{g} * g)}_{=e} * \bar{g} = \tilde{g} * \underbrace{(g * \bar{g})}_{=e} = \tilde{g} * e = \tilde{g}$$

usando (elem. neutro) no início e fim, $(\text{inverso})_{\tilde{g}}$, (associatividade), $(\text{inverso})_{\bar{g}}$.
3) a) $g = e * g = (\bar{f} * f) * g = \bar{f} * (f * g) \overset{\text{hip.}}{=} \bar{f} * (f * h) = (\bar{f} * f) * h = e * h = h$.
b) Use a) com $h = e$. c) Use a) com $h = \bar{f}$. □

Lema A.1.2 (Lema 1.1.9)**.** *Seja $\mathbb{K}$ um corpo e $0 \in K$ é o elemento neutro da adição. Então $0\beta = 0$ e $\beta 0 = 0$ para todos os elementos $\beta \in \mathbb{K}$.*

Demonstração. Seja $\beta \in \mathbb{K}$, denotamos o inverso aditivo de $-\beta$. Então

$$\beta \overset{(\text{el.n.})_\cdot}{=} 1\beta \overset{(\text{el.n.})_+}{=} (1+0)\beta \overset{(\text{distr.})}{=} 1\beta + 0\beta \overset{(\text{el.n.})_\cdot}{=} \beta + 0\beta$$

Usamos esta identidade para obter a segunda igualdade no seguinte

$$0 \overset{(\text{inv.})}{=} (-\beta) + \beta = -\beta + (\beta + 0\beta) \overset{(\text{ass.})_+}{=} (-\beta + \beta) + 0\beta \overset{(\text{inv.})}{=} 0 + 0\beta \overset{(\text{el.n.})}{=} 0\beta$$

□

Lema A.1.3 (Lema 1.1.17)**.** *Para o vetor nulo $\mathcal{O} \in E$ de um espaço vetorial e o elemento neutro aditivo $0 \in \mathbb{K}$ do corpo vale o seguinte.*

(i) $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ *para todos os escalares* $\alpha \in \mathbb{K}$.

(ii) $0v = \mathcal{O}$ *para todos os vetores* $v \in E$.

(iii) *Para todo o escalar* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e todo o vetor* $w \in E$ *são equivalentes:*

$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O}$$

Demonstração. (i) Caso $\alpha = 0$. Como $\alpha\mathcal{O} + 0\mathcal{O} = (\alpha + 0)\mathcal{O} = \alpha\mathcal{O}$, então $0\mathcal{O} = \mathcal{O}$ pela lei da corte (Lema A.1.1 3b) para $(G, *) = (E, +)$).
Caso $\alpha \neq 0$. Tal α tem um inverso aditivo, notação α^{-1}. Seja $v \in E$, então

$$v \overset{\text{(comp.)}}{=} 1v \overset{\text{(inv.)}_{\mathbb{K},\cdot}}{=} (\alpha\alpha^{-1})v \overset{\text{(comp.)}}{=} \alpha(\alpha^{-1}v)$$

Usando este resultado no início e no fim do seguinte obtemos que

$$v + \alpha\mathcal{O} = \alpha(\alpha^{-1}v) + \alpha\mathcal{O} \overset{\text{(distr.)}_E}{=} \alpha((\alpha^{-1}v) + \mathcal{O}) \overset{\text{(el.n.)}_{E,+}}{=} \alpha(\alpha^{-1}v) = v$$

Então $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ pela lei da corte (Lema A.1.1 3b) para $(G, *) = (E, +)$).

(ii) Como $v + 0v = 1v + 0v = (1 + 0)v = 1v = v$ a lei da corte diz que $0v = \mathcal{O}$.

(iii) '$\Rightarrow$' Suponha $\alpha w = \mathcal{O}$. Caso $\alpha = 0$, pronto. Caso $\alpha \neq 0$ concluímos que

$$w \overset{\text{(comp.)}}{=} 1w \overset{\text{(el.n.)}_{\mathbb{K},\cdot}}{=} (\alpha^{-1}\alpha)w \overset{\text{(comp.)}}{=} \alpha^{-1}(\alpha w) \overset{\text{hip.}}{=} \alpha^{-1}\mathcal{O} \overset{\text{(i)}}{=} \mathcal{O}$$

'$\Leftarrow$' Se $w = \mathcal{O}$, então $\alpha\mathcal{O} \overset{\text{(i)}}{=} \mathcal{O}$, pronto. Se $\alpha = 0$, então $0w \overset{\text{(ii)}}{=} \mathcal{O}$, pronto. □

Corolário A.1.4 (Corolário 1.1.18)**.** *Para todos os* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $w \in E$ *vale:*

a) $\alpha(-w) = -(\alpha w)$

b) $(-\alpha)w = -(\alpha w)$

Demonstração. a) Temos que mostrar que a soma de αw e o candidato para ser seu inverso aditivo iguale o vetor nulo. Com efeito

$$\alpha w + \alpha(-w) \overset{\text{(distr.)}_E}{=} \alpha(w + (-w)) \overset{\text{(el.n.)}_{E,+}}{=} \alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$$

onde o último passo é parte (i) de Lema A.1.3.
b) Temos o objetivo análogo de chegar ao vetor nulo, com efeito

$$\alpha w + (-\alpha)w \overset{\text{(distr.)}_E}{=} (\alpha + (-\alpha))w \overset{\text{(el.n.)}_{\mathbb{K},+}}{=} 0w = \mathcal{O}$$

onde o último passo é parte (ii) de Lema A.1.3. □

A.2 Subespaços

Lema A.2.1 (Lema 2.2.4)**.** *Todo subconjunto LI* $\{u, v\} \subset \mathbb{R}^2$ *gera* $\mathbb{R}^2$*.*

Demonstração. Vai ter 4 passos. I. Os vetores u, v não são múltiplos um do outro: Suponha por absurdo que $u = \alpha v$ para um $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $1u + (-\alpha)v = 1\alpha v - (\alpha v) = \mathcal{O}$ contradizendo LI. II. $u \neq \mathcal{O}$: Caso contrario $u = \mathcal{O} = 0v$ contradizendo I. III. $v \neq \mathcal{O}$: Análogo. IV. Seja $v \in \mathbb{R}^2$. Caso $w = \mathcal{O}$ escrevemos $w = 0u$, pronto. Caso $v \neq \mathcal{O}$: Agora identificamos $\mathbb{R}^2$ com o plano usando dois eixos OXY, veja Figura 2. Segundo II. e III. temos duas retas $\mathbb{R}u$ e $\mathbb{R}v$ passando ambas a origem O, mas não são iguais segundo I. Recebemos um paralelogramo com dois lados parte das retas e dois vértices sendo $\mathcal{O}$ e v; pensa Figura 2 com OX e OY substituto para Ou e Ov. Então a flecha v é a soma de duas flechas do paralelogramo, uma flecha sendo um múltiplo de u e a outra de v. Pronto. $\square$

Teorema A.2.2 (Teorema 2.3.4)**.** *Sejam* $F_1, F_2 \subset F$ *três subespaços de um espaço vetorial* E*, então são equivalentes*

$$F = F_1 \oplus F_2 \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \in F,\ \exists!\ f_1 \in F_1,\ f_2 \in F_2 \ \text{ tal que } \ f = f_1 + f_2$$

Demonstração. '$\Rightarrow$' Seja $f \in F$. Como hipótese temos duas informações, a saber (i) $F = F_1 + F_2$ e (ii) $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$, dando existência e unicidade.
Existência: De (i) sabemos que $f = f_1 + f_2$ para um $f_1 \in F_1$ e um $f_2 \in F_2$.
Unicidade. Suponha que $f = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ também para um $\tilde{f}_1 \in F_1$ e um $\tilde{f}_2 \in F_2$. Então $F_1 \ni f_1 - \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 - f_2 \in F_2$. Assim cada um lado pertence a ambos espaços, então a $F_1 \cap F_2$ o qual segundo (ii) iguale $\{\mathcal{O}\}$. Como não tem outro elemento, cada um lado deve ser o vetor nulo.
'$\Leftarrow$' $F_1 + F_2 = F$: A hipótese *existência* disponibiliza a primeira inclusão $F \subset F_1 + F_2 \subset F$ e a segunda vale como $F_1, F_2 \subset F$.
$F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$: Seja $f \in F_1 \cap F_2$, a mostrar $f = \mathcal{O}$. Note que $f \in F$ como $F_1, F_2 \subset F$. Então segundo a propriedade do vetor nulo

$$\underbrace{f}_{\in F_1} + \underbrace{\mathcal{O}}_{\in F_2} = f = \underbrace{\mathcal{O}}_{\in F_1} + \underbrace{f}_{\in F_2} \tag{A.2.1}$$

Mas pela hipótese *unicidade* escrever f como soma de um elemento de F_1 e um elemento de F_2 é único, então $f = \mathcal{O}$ e $\mathcal{O} = f$. $\square$

A.3 Bases – SLH

Teorema A.3.1 (Teorema 3.1.11)**.** *Dado uma matriz* $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$*. Se tem menos linhas (equações) como colunas (incógnitas), em símbolos* $m < n$*, então o sistema linear homogêneo (SLH)*

$$(*) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

admite soluções $x = (x_1, \dots, x_n)$ *não triviais (não todos* x_j *nulos).*

Demonstração. Se todos os coeficientes a_{ij} são nulos, então todos os elementos $x \in \mathbb{K}^n$ são soluções. Sejam então não todos coeficientes nulos: A prova usa indução sobre o número m de equações.
$\boldsymbol{m = 1}$**:** Em $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$ temos pelo menos dois incógnitas segundo nossa hipótese $n > m = 1$. Além disso, pelo menos um dos coeficientes é não-nulo, dizemos $a_{1n} \neq 0$ (caso fosse um outro renomeamos eles). Então

$$\left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{a_{11}}{a_{1n}}x_1 - \cdots - \frac{a_{1,n-1}}{a_{1n}}x_{n-1}\right)$$

é uma solução para cada um $(x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{K}^{m-1}$.
$\boldsymbol{m - 1 \Rightarrow m}$**:** Caso todos os coeficientes da última equação em $(*)$ são nulos, então as primeiras $m-1$ equações tem uma solução não-trivial x pela hipótese da indução (x também resolve a ultima equação: os coeficientes dela são nulos).

Suponha então que pelo menos um coeficiente da última equação em $(*)$ não é nulo, dizemos $a_{mn} \neq 0$. Nas primeiras $n-1$ equações de $(*)$ substitua x_n por

$$x_* := -\frac{a_{m1}}{a_{mn}}x_1 - \cdots - \frac{a_{m,n-1}}{a_{mn}}x_{n-1}$$

para obter um SLH de $m-1$ equações a $\tilde{n} := n-1 > m-1$ incógnitas. O qual tem uma solução $(x_1, \dots, x_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ pela hipótese $m-1$ da indução. Verifica-se que $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_*)$ é uma solucao nao-trivial de $(*)$. □

A.4 Transformações lineares

Lema A.4.1 (Lema 4.3.10)**.** *Trabalhamos no plano* Π *identificado com* $\mathbb{R}^2$ *mediante um sistema ortogonal de coordenadas. A projeção ortogonal sobre a reta* L_a *é denotada de* $P = P_{L_a} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *e dada por (4.3.2). Sua matriz é*

$$\mathbf{p}_a := [P_{L_a}] = \frac{1}{1+a^2}\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix} \tag{A.4.1}$$

onde $[P_{L_a}] := [P_{L_a}]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ *denota a matriz em respeito à base canônica.*

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{R}$. Dado um elemento $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, denota sua imagem sob P de $(X, Y) := Pv \in L_a = \{(x, ax) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Assim X e Y são funções de (x, y) e $Y = aX$. Resta determinar a função $X(x, y)$. Vamos provar

$$X(x, y) = \frac{1}{1+a^2}\,x + \frac{a}{1+a^2}\,y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{A.4.2}$$

Segundo o Teorema de Pitágoras a distancia $\mathrm{dist}(\mathcal{O}, v)$ entre a origem $\mathcal{O} = (0, 0)$ e o vetor $v = (x, y)$ é dada por $\sqrt{x^2 + y^2}$. Assim, usando Pitágoras de novo na

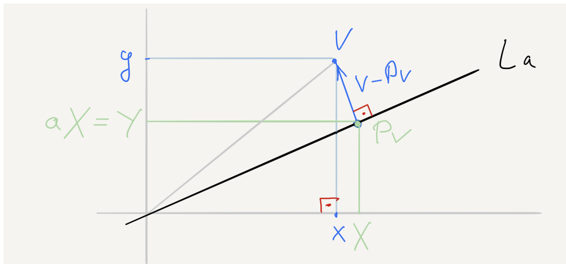

Figura A.1: Dois ângulos retângulos - usando Pitágoras duas vezes

igualdade dois, veja Figura A.1, obtemos

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 &= \operatorname{dist}(\mathcal{O},v)^2\\
&= \operatorname{dist}(\mathcal{O},Pv)^2+\operatorname{dist}(v,Pv)^2\\
&= X^2+(aX)^2+\big(\text{comprimento}^2 \text{ do vetor } v-Pv=(x-X,y-aX)\big)\\
&= X^2+(aX)^2+(x-X)^2+(y-aX)^2\\
&= X^2+(aX)^2+x^2-2xX+X^2+y^2-2aYX+a^2X^2
\end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$X(x,y)^2(1+a^2)=X(x,y)(x+ay)$$

Caso $X(x,y)\neq 0$**.** Divida por $X(x,y)$ e $1+a^2$ para obter (A.4.2).
Caso $X(x,y)=0$**.** Então $Y(x,y)=aX(x,y)=0$ e assim $Pv=(X,Y)=\mathcal{O}$. Como a projeção é ortogonal o ponto v deve ser localizado na reta $(L_a)^{\perp}_{\mathcal{O}}$ ortogonal a L_a e passando a origem. Mas esta reta resulta de L_a mediante uma rotação por $\pi/2$ (90°), em símbolos

$$(L_a)^{\perp}_{\mathcal{O}}=R_{\pi/2}L_a=\left\{\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\at\end{bmatrix}: t\in\mathbb{R}\right\}=\{(-at,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$$

Então v é da forma $(-at,t)$ para um $t\in\mathbb{R}$ e tal par satisfaz (A.4.2) também.

Para concluir note-se que os coeficientes na última identidade de

$$Pe_1=P(1,0)=(X(1,0),Y(1,0))=X(1,0)e_1+Y(1,0)e_2$$

disponibiliza a primeira coluna da matriz (A.4.1) e analogamente

$$Pe_2=X(0,1)e_1+Y(0,1)e_2$$

disponibiliza a segunda coluna. Para obter os valores de X e Y nos pontos $(1,0)$ e $(0,1)$ usa-se a fórmula (A.4.2). $\square$

Índice Remissivo