

Álgebra Linear

Notas da aula¹
MA327 2020-2

manuscrito em progresso

Joa Weber
UNICAMP

5 de novembro de 2020

¹versão final estará lá: www.math.stonybrook.edu/~joa/PUBLICATIONS/MA327.pdf

Sumário

Introdução	1
Notações	3
Convenções	3
I Teoria dos espaços vetoriais	5
1 Espaços vetoriais	7
1.1 Axiomas	7
1.1.1 Grupo	8
1.1.2 Corpo	9
1.1.3 Espaço vetorial	12
1.2 Exemplos	13
1.2.1 Listas ordenadas	13
1.2.2 Matrizes	14
1.2.3 Funções e polinômios	16
1.2.4 Excurso: Escalonamento de matrizes	17
1.3 Independência linear	20
1.3.1 Combinação linear	20
1.3.2 Independência linear	21
2 Subespaços	23
2.1 Definição e exemplos	23
2.2 Conjuntos gerandos	25
2.3 Soma direta	27
3 Bases	29
3.1 Aplicações	30
3.1.1 Coordenadas de um vetor	30
3.1.2 Dimensão de um espaço vetorial	32
3.2 Existência e extensão	35

II	Teoria das transformações lineares	39
4	Transformações lineares	41
4.1	Exemplos e construção	41
4.1.1	O espaço vetorial das transformações lineares	43
4.1.2	O espaço dual	44
4.1.3	Construção	45
4.2	Matrizes	47
4.3	Dimensão dois – o plano	53
4.3.1	Rotações	54
4.3.2	Projeção ortogonal sobre uma reta	56
4.3.3	Reflexão em torno de uma reta	58
4.4	Produto de transformações lineares	59
5	Núcleo e imagem	61
5.1	Sobrejetividade – inversa à direita	63
5.2	Injetividade – inversa à esquerda	64
5.3	Bijetividade – inversa	66
5.3.1	Isomorfismos	66
5.4	Teorema de núcleo e imagem	71
6	Soma direta e projeções	73
7	Matrizes de transformações lineares	77
7.1	Bases induzem isomorfismos	78
7.2	Matriz associada a uma TL e bases	79
7.3	Mudança de base – comutatividade da diagrama	80
7.4	Exercícios e umas soluções	82
7.5	Eliminação e aplicações (repetição de MA141)	86
7.5.1	Dimensão do subespaço gerado por m vetores	86
7.5.2	Cálculo do posto	86
7.5.3	Cálculo da matriz inversa	86
7.5.4	Resolução de sistemas lineares	86
8	Subespaços invariantes	87
III	Estruturas adicionais e operadores especiais	89
9	Produto interno	91
9.1	Ortogonalidade	91
9.2	Ângulos e comprimentos	91
9.3	Desigualdades	91
9.4	Processo de Gram-Schmidt	91
9.5	Complemento ortogonal	91
10	A adjunta	93

<i>SUMÁRIO</i>	iii
11 Operadores auto-adjuntos	95
12 Operadores ortogonais	97
12.1 Matrizes	97
12.2 Operadores	97
12.3 Decomposição polar	97
A Demonstrações restantes	99
A.1 Espaços vetoriais	99
A.2 Subespaços	101
A.3 Bases – SLH	101
A.4 Transformações lineares	102
Índice Remissivo	105

Introdução

Álgebra Linear

é o estudo dos espaços lineares e das transformações lineares.

Uma outra palavra para espaço linear é espaço vetorial.

Exemplo 0.0.1 (O espaço vetorial F das flechas equivalentes no plano). Seja F o conjunto das flechas v no plano Π , onde consideramos iguais duas flechas se têm a mesma direção e comprimento, munido das operações de multiplicar uma flecha v com um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ e de adicionar duas flechas v e w .

Multiplicação (escalar). Pela definição αv é a flecha na direção de v cujo comprimento é α vezes aquele de v (muda-se a direção caso o número α é negativo).

Adição (vetorial). Pela definição $v + w$ é a flecha cujo ponto inicial é aquela de v e cujo ponto termino p é obtido depois fazer uma translação de w movendo o ponto inicial de w no ponto termino de v . Então p é definido como o ponto termino do novo w .

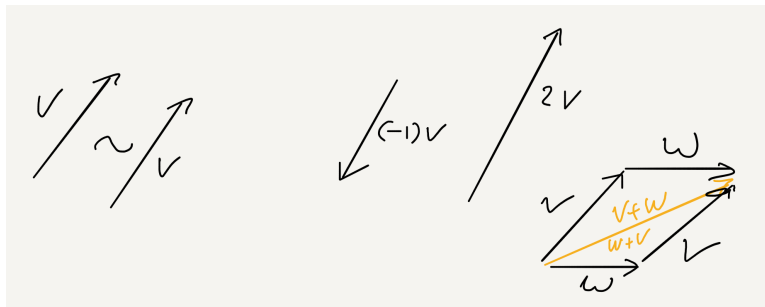


Figura 1: Flechas consideradas iguais, multiplicação escalar, e adição

Tal F é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{R} e um exemplo de uma transformação linear em F é dado pela rotação $r_\theta : F \rightarrow F$ de uma flecha v pelo ângulo θ em torno do ponto inicial.

Exemplo 0.0.2 (Pares de números reais). Seja $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ o conjunto de todas listas ordenadas de dois membros reais munido da adição

membro-por-membro e multiplicação com um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ também membro-por-membro. Então \mathbb{R}^2 é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{R} .

Comentário 0.0.3 (Identificação dos conjuntos e operações – isomorfismo). Os dois exemplos anteriores são “iguais” no sentido seguinte. Suponhamos que na reta podemos medir a distância 1. No plano Π escolha um **eixo** OX , ou seja uma reta com dois pontos diferentes O e X da distância 1, e um segundo eixo OY cujo primeiro ponto O é aquele do OX e qual intersecta OX exatamente no ponto O . Uma tal escolha de dois eixos é chamado um **sistema de coordenadas** no plano, símbolo OXY .

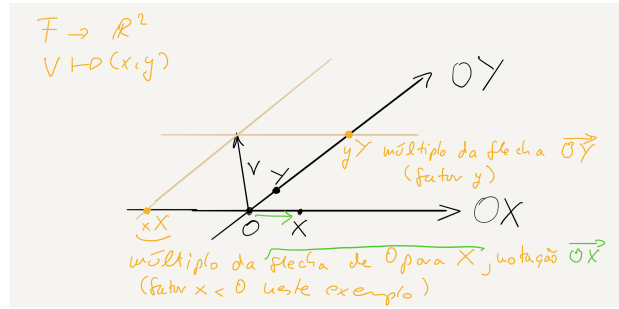


Figura 2: Sistema de coordenadas OXY composto de dois eixos OX e OY

Observe-se que um eixo OX chega com uma direção (de O para X) e com um comprimento unitário (o comprimento do segmento entre O e X). Uma escolha de coordenadas OXY no plano Π nos dá uma aplicação

$$F \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto (x, y) \quad (0.0.1)$$

a qual identifica os elementos de F com os elementos de \mathbb{R}^2 unicamente (bijetora) – e ainda é **linear**, ou seja compatível com as duas operações no domínio e as duas no contradomínio. Uma tal aplicação (bijetora linear) é chamado um **isomorfismo** entre espaços vetoriais. Deixamos ao leitor definir esta aplicação. [Dica: Os pontos O, X e O, Y dão duas flechas. Represente um elemento de F por uma flecha equivalente com ponto inicial O . Pensa num paralelogramo tal que O e o ponto termino da flecha equivalente são dois vértices opostos.]

Exemplo 0.0.4 (Funções contínuas e integração). Sejam $a < b$ dois números reais. Então o quadruplo $V = (C^0([a, b], \mathbb{C}), +, \cdot, \mathbb{R})$ que é composto do conjunto das funções contínuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ munido com as duas operações de adicionar $f + g$ duas funções e multiplicar αf uma função com um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{R} .

Também $W = (\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R})$ composto das números reais \mathbb{R} munido das operações óbvias é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{R} .

Integração $T : V \rightarrow W, f \mapsto \int_a^b f(x) dx$, é compatível com as duas adições e multiplicações (em V e em W) no sentido que

$$T(f + g) = Tf + Tg, \quad T(\alpha f) = \alpha Tf$$

para todos os vetores $f, g \in V$ e escalares α do corpo \mathbb{R} . Uma aplicação T entre espaços vetoriais qual respeita as duas operações no domínio e no contradomínio é chamada uma transformação linear.

Notações

Para uma lista extensiva dos símbolos usados veja o Índice Remissivo na página 105.

Comentário 0.0.5 (Números). Vamos trabalhar com os seguintes **números**

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$	naturais
$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	inteiros
$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$	racionais
$\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ “a reta real”	reais
$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ “o plano complexo”	complexos

Com $|\alpha|$ denotamos o absoluto de um numero α . Denotamos **intervalos** fechados de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e abertos de $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Usamos os símbolos

\forall “para todos os” \exists “existe um” $\exists!$ “existe um único”

A notação $w := v$ significa que o objeto w é **definido** pelo lado direito v . Escrevendo $\dim E = n$ ou $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ indica sem ser mencionado explicitamente que n e k são números naturais, e assim a dimensão e o numero de elemento do conjunto são **finitas**.

Convenções

Cor cinza. Parágrafos e maiores partes de texto em cinza indicam matéria avançada direcionado às turmas A e B do “cursão”, mas não às outras turmas. Palavras individuais em cinza geralmente são nomes ou informações complementares.

Parte I

Teoria dos espaços vetoriais

Capítulo 1

Espaços vetoriais

1.1 Axiomas

Definição 1.1.1. Um **conjunto** X é composto de elementos os quais são dois-a-dois diferentes. **Então não faz sentido escrever expressões da forma $\{2, 3, 2\}$.** Um conjunto não é ordenado, por exemplo $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. A **união** de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \cup B$ cujos elementos pertencem ou a A ou a B . Por exemplo

$$\{2, 3\} \cup \{2\} = \{2, 3\} = \{3, 2\} \quad (1.1.1)$$

A **interseção** de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \cap B$ cujos elementos pertencem a A e também a B . Chama-se um conjunto **ordenado** se seus elementos são enumerados, por exemplo $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. O conjunto que não contém nenhum elemento é chamado **o conjunto vazio**, símbolo \emptyset . Usamos a notação $A \dot{\cup} B$ para transferir a informação adicional que os dois conjuntos A e B são **disjuntos**, ou seja não tem nenhum elemento comum, em símbolos $A \cap B = \emptyset$. Denotamos de $|X|$ o **número de elementos de um conjunto** quando o número é finito. Neste caso X é chamado de **conjunto finito**.

Um **subconjunto** de um conjunto X é um conjunto A tal que cada um elemento de A é elemento de X , notação $A \subset X$. Observe que conforme esta definição, o conjunto vazio \emptyset é subconjunto de todos conjuntos: para todo conjunto X temos $\emptyset \subset X$.

Definição 1.1.2. O **produto cartesiano** $X \times Y$ de dois conjuntos X e Y é o conjunto de todas listas ordenadas (x, y) dos elementos $x \in X$ e $y \in Y$, ou seja

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Observe que se um fator fica vazio, ou seja $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$, então $X \times Y = \emptyset$. Abreviamos

$$Y^{\times k} := Y \times \dots \times Y \quad (1.1.2)$$

se na direita temos k fatores.

1.1.1 Grupo

Definição 1.1.3. Um conjunto não-vazio $G \neq \emptyset$ munido de uma operação

$$* : G \times G \rightarrow G, \quad (f, g) \mapsto f * g$$

é chamado um **grupo**, notação $(G, *)$, se valem os três axiomas

1. $f * (g * h) = (f * g) * h$ para todos os elementos $f, g, h \in G$ (associatividade)
2. existe um elemento $e \in G$ tal que (elemento neutro)

$$e * g = g, \quad g * e = g$$

para todos os elementos $g \in G$.

3. para todo $g \in G$ existe um elemento, notação $\bar{g} \in G$, t.q. (inverso)

$$g * \bar{g} = e, \quad \bar{g} * g = e$$

Em palavras,

um grupo é um conjunto não-vazio munido de uma operação associativa, contendo um elemento neutro, e tal que qualquer elemento admite um inverso.

O seguinte lema diz que um grupo G tem exatamente um elemento neutro, notação comum e , e cada um elemento g de G tem exatamente um inverso, notação \bar{g} . Às vezes é comum e útil escrever o elemento neutro na forma 0 ou 1 e os inversos na forma $-g$ ou g^{-1} — veja os dois exemplos em Exercício 1.1.6 a).

Lema 1.1.4. *Seja $(G, *)$ um grupo. Então vale o seguinte.*

- 1) *O elemento neutro é único.*
- 2) *Os elementos inversos são únicos.*
- 3) *Dado elementos $f, g, h \in G$, então vale:*
 - a) $f * g = f * h \Rightarrow g = h$ (lei da corte)
 - b) $f * g = f \Rightarrow g = e$
 - c) $f * g = e \Rightarrow g = \bar{f}$

Note que b) e c) são consequências imediatas de a).

Demonstração. Lema A.1.1. □

Definição 1.1.5. Um grupo $(G, *)$ é chamado de **abeliano** se a ordem dos dois elementos na operação não importa, em símbolos $f * g = g * f$. (comutatividade)

Exercício 1.1.6. Mostre que

- a) são grupos (ainda abelianos): $(\mathbb{Z}, +)$ e (\mathbb{R}, \cdot)
- b) não são grupos: $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{N}_0, +)$ e (\mathbb{Z}, \cdot)
- c) não são grupos abelianos: as matrizes 3×3 e as rotações em \mathbb{R}^3 .

1.1.2 Corpo

Definição 1.1.7. Um conjunto \mathbb{K} munido de duas operações¹

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K} \quad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$$

é chamado um **corpo** se valem os três axiomas

1. $(\mathbb{K}, +)$ é um grupo abeliano.
(O elemento neutro seja denotado 0 e $-\alpha$ denota o inverso de $\alpha \in \mathbb{K}$.)
2. $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.
(O elemento neutro seja denotado 1 e α^{-1} denota o inverso de $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.)
3. Distributividade: $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$.
(É costume escrever $\alpha\beta$ em vez de $\alpha \cdot \beta$.)

Para distinguir chamamos o elemento neutro da primeira operação – para a qual temos usado o símbolo “+” ainda que geralmente não tem nada ver com adição de números – o **elemento neutro aditivo**. Chamamos o elemento neutro da segunda operação – motivado pelo uso do símbolo “.” – o **elemento neutro multiplicativo**. Como é feio escrever $\alpha + (-\beta)$ para a soma de um elemento com um elemento inverso aditivo definimos $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$. Isso é uma abreviação só, não é, nem tem diferença. Analogamente simplificamos a notação escrevendo α/β em vez de $\alpha\beta^{-1}$.

Corolário 1.1.8. *Um corpo contém pelo menos dois elementos.*

Demonstração. Pelas axiomas 1 e 2 cada uma operação tem um elemento neutro as quais não podem ser iguais por causa de 2. □

Lema 1.1.9. *Seja \mathbb{K} um corpo e $0 \in K$ é o elemento neutro da adição. Então $0\beta = 0$ e $\beta 0 = 0$ para todos os elementos $\beta \in \mathbb{K}$.*

Demonstração. Lema A.1.2. □

Exemplos de corpos

Exemplo 1.1.10. São corpos

- a) $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$
- b) $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ onde as operações são definidas assim

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(bc + ad)$$

Exercício 1.1.11. Os números inteiros $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ não formam um corpo.

¹ as quais vamos batizar aos nomes “+” e “.” – ainda que *geralmente não tem nada ver com adição e multiplicação de números*, mas esta escolha é motivada pelos exemplos principais (Exemplo 1.1.10) nos quais “+” e “.” são adição e multiplicação de números

Exemplo 1.1.12 (Adição e multiplicação modulo n). Dado um número natural $n \in \mathbb{N}$, defina no conjunto $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$ as duas operações

$$a +_n b := a + b \pmod{n}, \quad a \cdot_n b := ab \pmod{n}$$

para todos os elemento $a, b \in \mathbb{Z}_n$.²

Fato. $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ é um corpo $\iff n$ é um número primo.

Para valores pequenos de n pode-se checar da mão se \mathbb{Z}_n é um corpo ou não. Só precisa-se calcular as tabelas de adição e de multiplicação. Vamos ilustrar isso num exemplo.

Exemplo 1.1.13 (\mathbb{Z}_4 não é um corpo.). Para checar se $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ e $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{e_{+4}\}, \cdot_4)$ são grupos abelianos é útil calcular as tabelas de adição e de multiplicação.

• $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ é um grupo abeliano? Para responder calculamos os valores na tabela

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

São 4 passos:

1. Determinar o elemento neutro de $+_4$: Checamos se a linha em cima da linha solida horizontal, ou seja a linha **0 1 2 3**, tem uma cópia nas linhas embaixo. Sim, tem **0 1 2 3**. Neste caso o elemento em frente da cópia é o elemento neutro de $+_4$, certo? No nosso caso $e_{+4} = 0$. Se não tem copia, não tem elemento neutro, então não temos um grupo.
2. Inversos: Na cada dos (neste caso 4) linhas de valores na tabela localiza o elemento neutro 0 (se existir). Então o elemento g em frente da linha de 0 e o elemento em cima da coluna de 0, notação \bar{g} , são inversos um do outro. Caso uma linha não contem 0, então este g não tem inverso, então não temos um grupo. No nosso caso todo elemento g tem um inverso:

g	\bar{g} (denotado $-g$)
0	0
1	3
2	2
3	1

3. Associatividade: Calculando caso por caso temos que checar se $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$ para todas as possibilidades. No nosso caso vale.

² Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\ell \in \mathbb{Z}$ um número inteiro. Pela definição o elemento $\ell \pmod{n} \in \mathbb{Z}_n$ é o resto $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ que falta depois você “enche” ℓ com múltiplos de n . Em símbolos, $\ell \pmod{n} := r$ onde $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ é o único elemento tal que $\ell = kn + r$ para um $k \in \mathbb{Z}$.

4. Grupo abeliano (comutatividade): Vale se a tabela é simétrica em respeito à diagonal. No nosso caso vale.

Na verdade temos esquecido um passo: No início de tudo temos que checar se a operação é bem definida, ou seja os valores da operação (os valores na tabela) realmente são elementos do conjunto, ou não. Olhamos a tabela - sim.

Nosso resultado é que $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ é um grupo abeliano.

- $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$ é um grupo abeliano? Para responder calculamos a tabela

\cdot_4	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

Como o valor 0 não é elemento de $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ a multiplicação \cdot_4 não é uma operação em $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$, então não pode ser um grupo.

Ainda assim vamos repetir os 4 passos para \cdot_4 (em vez de $+_4$) para ver se tem outras falhas ainda. As respostas são:

1. Elemento neutro de \cdot_4 : Tem, é o elemento $e_{\cdot_4} = 1$.
2. Inversos: Na cada dos (neste caso 3) linhas de valores na tabela localizamos o elemento neutro 1 (se existir). No nosso caso

g	\bar{g} (denotado g^{-1})
1	1
2	não tem!
3	3

o elemento 2 não tem um inverso e já por isso não temos um grupo.

3. Associatividade: Ainda que a fórmula $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$ vale, os valores não são todos em $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$.
4. Grupo abeliano (comutatividade): A tabela é simétrica em respeito à diagonal, mas os valores não são todos em $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$.

Nosso resultado é que $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$ não é um grupo abeliano.

Exercício 1.1.14. Seja $n = 6$:

1. Calcule a tabela da adição e da multiplicação no caso \mathbb{Z}_6 .
2. Identifique os elementos neutros da adição e multiplicação em \mathbb{Z}_6 . Eles sempre existem?
3. Para todo $a \in \mathbb{Z}_6$ identifique o elemento inverso aditivo.
4. Para todo $a \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$ identifique o elemento inverso multiplicativo, se existir.
5. Cheque que \mathbb{Z}_6 não é um corpo. Quais dos axiomas não valem?

Matéria avançada

Motivado pelas perguntas da Turma C na 1ª aula 2016-2 vamos dar um exemplo de um corpo onde a primeira operação não está relacionada à adição de números nem a segunda à multiplicação de números.

Exercício 1.1.15 (Corpo (P, \cdot, \circ) onde \cdot não é adição e \circ não é multiplicação). Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a função $p_\alpha : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $x \mapsto x^\alpha$. Seja o conjunto

$$P := \{p_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

composto de todas funções $p_\alpha(x) = x^\alpha$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ e munido das operações

$$\begin{aligned} \cdot : P \times P &\rightarrow P & \circ : P \times P &\rightarrow P \\ (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \cdot p_\beta & (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \circ p_\beta \end{aligned}$$

chamado de **multiplicação**³ e **composição**⁴ de funções, respectivamente. Mostre que:

1. As duas operações são bem definidas: $p_\alpha \cdot p_\beta \in P$ e $p_\alpha \circ p_\beta \in P$, de fato

$$p_\alpha \cdot p_\beta = p_{\alpha+\beta}, \quad p_\alpha \circ p_\beta = p_{\alpha\beta}$$

2. (P, \cdot) é um grupo abeliano com elemento neutro p_0 .
3. $(P \setminus \{p_0\}, \circ)$ é um grupo abeliano com elemento neutro p_1 .
4. Distributividade: $(p_\alpha \cdot p_\beta) \circ p_\gamma = (p_\alpha \circ p_\gamma) \cdot (p_\beta \circ p_\gamma)$, $\forall p_\alpha, p_\beta, p_\gamma \in P$.

1.1.3 Espaço vetorial

Definição 1.1.16. Um **espaço vetorial E sobre um corpo \mathbb{K}** ⁵ é um quádruplo $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ composto de um conjunto E , um corpo \mathbb{K} , e duas operações

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E & \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (v, w) &\mapsto v + w & (\alpha, v) &\mapsto \alpha v \end{aligned}$$

chamado de *adição* e *multiplicação escalar*, respectivamente, tal que vale

1. $(E, +)$ é um grupo abeliano.
(O elemento neutro é denotado \mathcal{O} e chamado o **vetor nulo**.)

$$2. \text{ Distributividade: } \begin{cases} (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \\ \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \end{cases}$$

$$3. \text{ Compatibilidade: } \begin{cases} (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \\ 1v = v \end{cases}$$

³ $(p_\alpha \cdot p_\beta)(x) := p_\alpha(x) \cdot p_\beta(x)$

⁴ $(p_\alpha \circ p_\beta)(x) := p_\alpha(p_\beta(x))$

⁵ fala-se abreviando “ E é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} ” ou ainda “ E é um espaço vetorial”.

Onde as identidades tem que ser válidas para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e todos $v, w \in E$. Chama-se **escalares** os elementos do corpo \mathbb{K} e **vetores** os elementos de E .

Lema 1.1.17. *Seja $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ um espaço vetorial e $0 \in \mathbb{K}$ e $\mathcal{O} \in E$, então:*

- (i) $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ para todos os escalares $\alpha \in \mathbb{K}$.
- (ii) $0v = \mathcal{O}$ para todos os vetores $v \in E$.
- (iii) Para todo o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo o vetor $w \in E$ são equivalentes:

$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O} \quad (1.1.3)$$

Demonstração. Lema A.1.3. □

Corolário 1.1.18 (Compatibilidade dos inversos aditivos com multiplicação). *Para todo o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo o vetor $w \in E$ vale:*

- a) $(-\alpha)w = -(\alpha w)$
- b) $\alpha(-w) = -(\alpha w)$

Demonstração. Corolário A.1.4. □

1.2 Exemplos de espaços vetoriais

Exemplo 1.2.1 (O espaço vetorial trivial $\{\mathcal{O}\}$). Seja E um conjunto com 1 elemento só. Vamos já denotar aquele elemento com o símbolo \mathcal{O} (porque?). Então $E = \{\mathcal{O}\}$. Seja \mathbb{K} um corpo qualquer. Não tem escolha nenhuma para definir as duas operações

$$\begin{aligned} + : E \times E &\rightarrow E & \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E \\ (\mathcal{O}, \mathcal{O}) &\mapsto \mathcal{O} & (\alpha, \mathcal{O}) &\mapsto \mathcal{O} \end{aligned}$$

Então $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ satisfaz os axiomas de um espaço vetorial, denotado simplesmente $E = \{\mathcal{O}\}$ e chamado de **espaço vetorial trivial**.

Exemplo 1.2.2 (Um corpo \mathbb{K} como um espaço vetorial sobre \mathbb{K}). Usa-se as duas operações chegando com o corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ como as duas operações necessárias para tornar um conjunto, escolhemos $E := \mathbb{K}$, num espaço vetorial sobre um corpo, escolhemos \mathbb{K} . Com efeito $(\mathbb{K}, +, \cdot, \mathbb{K})$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} .

1.2.1 Listas ordenadas

Exemplo 1.2.3 (O espaço vetorial \mathbb{R}^n sobre \mathbb{R}). Seja

$$\mathbb{R}^n := \{u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto de todas as listas ordenadas de n números reais. Chamamos α_i o i -ésimo membro da lista. As duas operações

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n & \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

são definidas como adição membro-por-membro e multiplicação de todos membros com um escalar $\beta \in \mathbb{R}$. Checando todos axiomas vê-se que \mathbb{R}^n é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais, notação $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ ou \mathbb{R}^n só. O vetor nulo, também chamado de **origem**, é a lista

$$\mathcal{O} = (0, \dots, 0)$$

e o inverso de um elemento $u = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ é a lista $(-\alpha_1, \dots, -\alpha_n)$ a qual denotamos com o símbolo $-u$.

O **i -ésimo vetor canônico** é a lista de n membros

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

cujo i -ésimo membro é o número 1 e todos outros são nulo 0. O conjunto

$$\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\} \tag{1.2.1}$$

de todos os vetores canônicos é chamado de **base canônica** de \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.2.4 (O espaço vetorial \mathbb{R}^∞ sobre \mathbb{R}). O conjunto

$$\mathbb{R}^\infty := \{u = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots) \mid \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \in \mathbb{R}\}$$

de todas as sequências reais é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} sob adição e multiplicação membro-por-membro, notação $(\mathbb{R}^\infty, +, \cdot, \mathbb{R})$.

Exemplo 1.2.5 (O espaço vetorial \mathbb{R}_0^∞ sobre \mathbb{R}). O conjunto

$$\mathbb{R}_0^\infty := \{u \in \mathbb{R}^\infty \mid \text{só um número finito de membros são não-nulos}\}$$

é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} sob adição e multiplicação membro-por-membro como no exemplo prévio, notação $(\mathbb{R}_0^\infty, +, \cdot, \mathbb{R})$.

Dado $i \in \mathbb{N}$, a sequência com todos membros nulos exceto o i -ésimo qual é 1 denotamos também de e_i . O conjunto de todos os e_i 's é denotado de

$$\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\} \tag{1.2.2}$$

e chamado de **base canônica** de \mathbb{R}_0^∞ .

Comentário 1.2.6 (\mathbb{K}^n e \mathbb{K}^∞). Os espaços vetoriais \mathbb{K}^n e \mathbb{K}^∞ sobre qualquer corpo \mathbb{K} são definidos analogamente Exemplos 1.2.3 e 1.2.4.

1.2.2 Matrizes

Exemplo 1.2.7 (Espaço vetorial das matrizes $m \times n$). O **espaço vetorial das matrizes $m \times n$ sobre um corpo \mathbb{K}** é o conjunto

$$M(m \times n; \mathbb{K}) := \left\{ \mathbf{a} = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \right\}$$

onde a matriz $\mathbf{a} = (a_{ij})$ é o quadro de escalares com m linhas e n colunas ⁶

$$\mathbf{a} = (a_{ij}) := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

munido da adição (entrada por entrada)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (c_{ij}), \quad c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

e da multiplicação escalar (entrada por entrada)

$$\beta \mathbf{a} = \beta (a_{ij}) := (c_{ij}), \quad c_{ij} := \beta a_{ij}$$

para escalares $\beta \in \mathbb{K}$. A matriz \mathbf{a}^t com entradas $(a_{ij})^t = a_{ji}$ é chamada de **transposta** da matriz \mathbf{a} . Uma **matriz quadrada** é uma matriz $n \times n$.

O vetor nulo é a matriz nula $\mathbf{0}$ cujas entradas são todas o escalar nulo $0 \in \mathbb{K}$. Se na matriz nula $n \times n$ colocamos o escalar $1 \in \mathbb{K}$ ao longo da diagonal obtemos a **matriz identidade** $\mathbb{1} = \mathbb{1}_n$. O elemento inverso aditivo, notação $-\mathbf{a}$, de uma matriz $\mathbf{a} = (a_{ij})$ tem como entradas os inversos aditivos dos a_{ij} , notação $-a_{ij}$.

No caso do corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ usamos a notação $M(m \times n) := M(m \times n; \mathbb{R})$ para o **espaço vetorial dos matrizes reais $m \times n$** .

Definição 1.2.8 (Linhas e colunas de matrizes). Seja $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in M(m \times n; \mathbb{K})$ uma matriz $m \times n$. Note-se que o primeiro índice i de uma entrada a_{ij} indica a linha e o segundo j a coluna dela. Tendo isso na vista vamos denotar a **k -ésima coluna**, respectivamente a **ℓ -ésima linha**, de uma matriz \mathbf{a} com os símbolos

$$\mathbf{a}_{\bullet k} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{\ell \bullet} = [a_{\ell 1} \quad \dots \quad a_{\ell n}] \quad (1.2.3)$$

Temos escolhido o símbolo \bullet para sugerir “este índice é aberto” – ele corre e assim gera uma lista, ou vertical ou horizontal dependendo se \bullet fica no primeiro ou no segundo lugar. Assim podemos escrever a matriz \mathbf{a} nas formas seguintes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\bullet} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\bullet} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_{\bullet 1} \quad \dots \quad \mathbf{a}_{\bullet n}]$$

Produto matriz

Para duas matrizes \mathbf{a} de tipo $m \times n$ e \mathbf{b} de tipo $k \times p$ pode se definir o chamado **produto matriz** no caso que $n = k$ coincidem:

$$M(m \times n; \mathbb{K}) \times M(n \times p; \mathbb{K}) \rightarrow M(m \times p; \mathbb{K}), \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{ab} := (c_{ij}) \quad (1.2.4)$$

⁶Os escalares a_{ij} são chamadas as **entradas da matriz**. Observe que a entrada a_{ij} está localizada na i -ésima linha e j -ésima coluna.

onde

$$c_{ij} := \mathbf{a}_{i\bullet} \cdot \mathbf{b}_{\bullet j} := a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

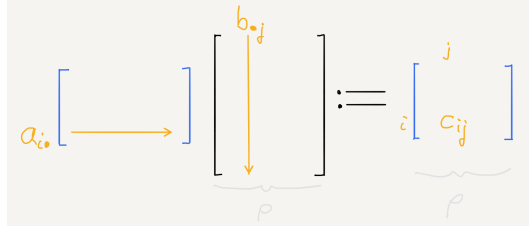


Figura 1.1: Produto matriz – o número de colunas de \mathbf{a} igual o de linhas de \mathbf{b}

Lema 1.2.9 (Propriedades do produto matriz). *Vale o seguinte*

- (i) $(\mathbf{cb})\mathbf{a} = \mathbf{c}(\mathbf{ba})$
- (ii) $\mathbf{c}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{ca} + \mathbf{cb}$ e $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$
- (iii) $\mathbf{a}\mathbb{1}_n = \mathbf{a}$ e $\mathbb{1}_m\mathbf{a} = \mathbf{a}$ $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K})$
- (iv) $\mathbf{b}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha(\mathbf{ba})$

para todos $\alpha \in \mathbb{K}$ e matrizes $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tal que as operações fazem sentido.

Definição 1.2.10 (Matriz inversa). Uma matriz quadrada $\mathbf{a} \in M(n \times n; \mathbb{K})$ admite uma inversa se existe uma matriz quadrada \mathbf{b} tal que $\mathbf{ab} = \mathbb{1}_n$, equivalentemente $\mathbf{ba} = \mathbb{1}_n$. Caso existe, tal \mathbf{b} é única e denotado \mathbf{a}^{-1} ; veja Seção 5.3.1.

Definição 1.2.11 (Matrizes quadradas comutando). Dizemos que duas matrizes quadradas $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M(n \times n; \mathbb{K})$ **comutam** se $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$.

1.2.3 Funções e polinômios

Exercício 1.2.12. Dado um conjunto não-vazio $X \neq \emptyset$ e um corpo \mathbb{K} , seja

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) := \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ função}\}$$

o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{K}$. Adição de funções e multiplicação com um escalar são definidas assim

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x)$$

para todos os $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostre que $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} .

Comentário 1.2.13. A próxima observação ilustra o poder da matemática e um *ponto fundamental* dela - economizar através de abstração e *encontrar o certo ponto da vista*.

Observação 1.2.14.

- a) Se $X = \{1, \dots, n\}$, então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$.
 b) Se $X = \mathbb{N}$, então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^\infty$.
 c) Se $X = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$, então $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = M(m \times n)$.

Exercício 1.2.15 (Polinômios $\mathcal{P}(\mathbb{K})$). Dados escalares $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, então chama-se uma soma finita

$$p = p(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$$

de **polinômio** na variável $x \in \mathbb{K}$ e, no caso $\alpha_n \neq 0$, de **grau n** . Forneça o conjunto dos polinômios com uma estrutura de um espaço vetorial $(\mathcal{P}(\mathbb{K}), +, \cdot, \mathbb{K})$.

1.2.4 Excurso: Escalonamento de matrizes

Definição 1.2.16 (Operações elementares). Pode-se aplicar para as linhas de uma matriz três tipos de operações, as chamadas **operações elementares**:

- (oe1)_↓ trocar duas linhas
 (oe2)_· multiplicar uma linha com um escalar α
 (oe3)₊ adicionar uma linha para uma outra

Processo de escalonamento

Chama-se uma matriz **escalonada** se em cada linha o **primeiro elemento não-nulo está à esquerda** do primeiro elemento não-nulo da próxima linha. Exemplos

$$\text{escalonadas: } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{não é: } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Numa matriz *escalonada* os primeiros elementos não-nulos das linhas são chamados de **pivôs** da matriz escalonada.

Definição 1.2.17. Uma matriz pode ser transformada numa matriz escalonada aplicando operações elementares. O processo é repetir os três passos seguintes:

1. Localiza a primeira coluna não-nula e nela o primeiro elemento não-nulo, dizemos a . Troca a linha de a e a primeira linha.
2. Embaixo de a anulamos todo elemento não-nulo, dizemos b : Multiplique a linha de b com $-a/b$, depois adiciona a linha de a . Continue ate todos elementos embaixo de a são nulos.
3. Esqueça a linha e a coluna de a e trata a matriz reduzida começando de novo com passo 1.

O processo de escalonar uma matriz \mathbf{a} termina com uma matriz escalonada a qual denotamos de \mathbf{a}_{esc} .

Exemplo 1.2.18. Ilustramos o escalonamento. Seja L_i a i -ésima linha.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{2}{1}L_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2.naL_3 \\ \text{adic. } L_1}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{3.\text{esq.linha} \\ \text{e col. de } 2}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e agora começamos de novo com passo 1 tratando a matriz reduzida

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{2}{1}L_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{2.naL_3 \\ \text{adic. } L_2}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aplicação: Sistemas lineares

Seja \mathbf{a} uma matriz $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$ uma lista ordenada com m membros. Agora adiciona para as n colunas de \mathbf{a} a lista b como a $(n+1)$ -ésima coluna para obter a chamada **matriz aumentada**, notação

$$[\mathbf{a} : b] := \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Definição 1.2.19. Suponha a matriz \mathbf{a} e a lista b são dadas. Então queremos saber se existe uma solução $x = (x_1, \dots, x_n)$ da equação $\mathbf{a}x = b$, ou seja do **sistema linear (SL) de m equações a n incógnitas**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.2.5)$$

É útil chamar a matriz aumentada $[\mathbf{a} : b]$ o **sistema linear** definido por (1.2.5). A lista $b = (b_1, \dots, b_m)$ é chamada de **inogeneidade** do sistema linear. O caso $b = \mathcal{O} = (0, \dots, 0)$ chama-se de **sistema linear homogêneo (SLH)**.

O sistema linear pode ser escrito equivalentemente na forma

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (1.2.6)$$

O lado esquerdo é um exemplo de uma chamada “combinação linear” das colunas $\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}$ da matriz \mathbf{a} , veja (1.2.3), representando o vetor b – um conceito fundamental o qual vamos tratar no próximo parágrafo.

Comentário 1.2.20. Note-se que o lado esquerdo de (1.2.6) corre sobre toda a imagem da matriz \mathbf{a} se variamos x sobre todas as listas. Então um SL $[\mathbf{a} : b]$ tem uma solução se e somente se a lista b é elemento da imagem da matriz \mathbf{a} .

Lembramos do curso MA141 “Geometria Analítica” o seguinte

Teorema 1.2.21. *Uma lista x é solução do sistema linear $[\mathbf{a} : b]$ se e somente se x é solução do sistema linear associado à matriz escalonada $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}}$.*

Exemplo 1.2.22 (Resolução de um sistema linear usando escalonamento). Para encontrar as soluções $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ do sistema linear

$$\begin{cases} y + 2z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x - 2z = 0 \end{cases}$$

primeiro, formamos a matriz aumentada $[\mathbf{a} : b]$ onde $b = (0, 0, 0) =: \mathcal{O}$, segundo, escalonamos ela, e terceiro, **resolvemos “de baixo para cima”**. Segundo Teorema 1.2.21 uma solução de $[\mathbf{a} : b]_{\text{esc}}$ também resolve $[\mathbf{a} : b]$, e vice versa. Exemplo 1.2.18 mostra as matrizes \mathbf{a} e \mathbf{a}_{esc} . Note-se que no caso especial quando um sistema linear é *homogêneo*, ou seja $b = \mathcal{O}$, vale a fórmula seguinte

$$[\mathbf{a} : \mathcal{O}]_{\text{esc}} = [\mathbf{a}_{\text{esc}} : \mathcal{O}]$$

No nosso caso o lado direito desta fórmula representa o SLH

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Resolução “de baixo para cima”:

LINHA 3. Começamos embaixo com a última linha $0x + 0y + 0z = 0$ a qual não representa nenhuma restrição para x, y, z .

LINHA 2. Progredimos para cima, ou seja para a linha dois $y + 2z = 0$. Escolha uma variável para ser a variável dependente da(s) outra(s) variáveis, as quais variam livremente no corpo. No nosso caso só tem uma outra e o corpo é \mathbb{R} . Escolhemos por exemplo como variável dependente $y = y(z) = -2z$ como função da variável z a qual varia livremente sobre os números reais, ou seja $z \in \mathbb{R}$.

LINHA 1. Progredimos para cima, ou seja para a primeira linha

$$0 = 2x + y(z) + z = 2x - 2z + z = 2x - z$$

lembrando que $z \in \mathbb{R}$ é livre. Então $x = x(z) = \frac{1}{2}z$ para qualquer $z \in \mathbb{R}$.

Conclusão. Toda solução do SL é da forma

$$\begin{bmatrix} x(z) \\ y(z) \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}z \\ -2z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde $z \in \mathbb{R}$ é um número real arbitrário. Então o SL não tem só uma solução – tem uma para cada um número real z . Isso conclui o Exemplo 1.2.22.

Comentário 1.2.23 (Corpos gerais \mathbb{K}). As construções nesta Seção 1.2.4 para matrizes e listas cujas entradas são elementos do corpo \mathbb{R} funcionam do mesmo jeito para matrizes com entradas num corpo geral \mathbb{K} .

1.3 Independência linear

1.3.1 Combinação linear

Depois da aula 3 foram adicionadas ou modificadas as **partes em marrom**:

Definição 1.3.1. Seja E um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} e $X \subset E$ um subconjunto. Uma **combinação linear estrita (CLE)** em X é uma soma *finita*

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell}_{=: w \in E} \quad (1.3.1)$$

de vetores $v_1, \dots, v_\ell \in X \setminus \{\mathcal{O}\}$ *dois-a-dois diferentes* e escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, vetores e escalares todos não-nulos.⁷

A palavra mais importante em cima é “finita”. Ainda que os vetores v_1, \dots, v_ℓ em (1.3.1) são elementos do conjunto X , a soma deles não necessariamente encontra-se mais em X . Encontra-se sim, quando X é um chamado “subespaço” (Lema 2.1.2).

Definição 1.3.2. Como encontra-se frequentemente somas finitas gerais

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell, \quad \alpha_j \in \mathbb{K}, \quad v_j \in E$$

vamos chamar tal de **combinação linear (CL)** como é costume na literatura. Dizemos que

“A CLe dos vetores v_1, \dots, v_ℓ representa o vetor w .”

ou

“O vetor w é CLe dos vetores v_1, \dots, v_ℓ .”

Exercício 1.3.3. Seja $X \subset E$ nao vazio, mostre que são conjuntos iguais

$$\begin{aligned} & \{\text{todas as combinações lineares em } X\} \cup \{\mathcal{O}\} \\ &= \{\text{todas as combinações lineares generalizadas em } X\} \end{aligned}$$

Definição 1.3.4. Por definição a frase

“**combinação linear dos vetores u, v, \dots** ”

significa

⁷ Permitindo \mathcal{O} e 0, ou não, não faz nenhuma diferença para os valores de (1.3.1). Então permitir é desnecessário, mas na matemática a desnecessidade é o **inimigo da clareza**. Temos adicionado o adjetivo ‘estrito’ porque a terminologia ‘combinação linear’ já é ocupada.

“combinação linear no conjunto $\{u, v, \dots\}$ ”

A diferença é que assim *não precisamos usar todos os vetores*. (O que elimina qualquer necessidade de colocar o escalar 0 em frente dos não necessários.)

Exercício 1.3.5. a) Caso possível escreva o vetor $b = (1, -3, 10)$ como combinação linear dos vetores $u = (2, -3, 5)$, $v = (1, 1, 0)$, e $w = (1, 0, 0)$.

b) Sejam $u = (1, 1)$, $v = (1, 2)$ e $w = (2, 1)$. Encontre números a, b, c e α, β, γ todos não-nulos, tais que

$$au + bv + cw = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

com $a \neq \alpha$, $b \neq \beta$ e $c \neq \gamma$.

[Dica: a) Determinar os coeficientes α, β, γ na CL de u, v, w a qual representa b lida a um SL. Escalonamento.⁸

b) Defina $x = a - \alpha$, $y = b - \beta$, e $z = c - \gamma$ para obter um SLH. Resolva.]⁹

1.3.2 Independência linear

Definição 1.3.6 (Independência linear). Um subconjunto X de um espaço vetorial E é dito de **conjunto linearmente independente (LI)** se não existe nenhuma combinação linear estrita (CLe) em X representando o vetor nulo. Caso existisse, o X é chamado de **conjunto linearmente dependente (LD)**.

Nas outras palavras, chama-se $X \subset E$ de **conjunto LI** se

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell = \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 0, \dots, \alpha_\ell = 0 \quad (1.3.2)$$

para toda escolha (finita) de vetores $v_1, \dots, v_\ell \in X$ *dois-a-dois diferentes*.¹⁰

Comentário 1.3.7.

- (i) O conjunto vazio \emptyset é LI: Com efeito, como não contem elementos, não admite nenhuma CL. Chama-se tal argumentação de **verdade vazia**.
- (ii) Um conjunto $X = \{v\}$, contendo só um vetor, é LI se e somente se $v \neq \mathcal{O}$.
- (iii) Se (1.3.2) vale para uma escolha v_1, \dots, v_ℓ , então vale para qualquer subescolha destes vetores. [Use os coeficientes $\alpha_i = 0$ nos restantes.]

Para provar a afirmação (ii), lembra (1.1.3).

Lema 1.3.8. *Seja X um subconjunto de um espaço vetorial E .*

- a) $\mathcal{O} \in X \Rightarrow X$ LD. (\mathcal{O} vetor nulo rende conjuntos LD)
- b) *Todo subconjunto A de um conjunto LI X é LI.*

⁸ encontre “o certo ponto da vista” (Comentário 1.2.13) e o SL vai chegar já escalonada..

⁹ Respostas para seu controle: a) $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 3, -6)$. b) $(x, y, z) = z(-3, 1, 1)$. Escolha um $z \neq 0$, por exemplo $z = 1$. Então $(a, b, c) = (\alpha - 3, 1 + \beta, 1 + \gamma)$. Toda escolha de reais $\alpha \neq 0, 3$ e $\beta, \gamma \neq 0, -1$ dá uma solução. A escolha $\alpha = 5$ e $\beta = \gamma = 1$ resulta em $a = b = c = 2$.

¹⁰ Para que precisa-se a condição *dois-a-dois diferentes*?

Demonstração. a) O termo $1\mathcal{O}$ é uma CLe em X representando o vetor nulo (segundo Lema 1.1.17). b) Os elementos de A são elementos de X – para as quais (1.3.2) vale pela hipótese. \square

Exemplo 1.3.9. Para saber se o subconjunto $X := \{(1, 0), (2, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 é LI temos que checar (1.3.2) para todas escolhas finitas de elementos v_i de X dois-a-dois diferentes. Como X é um conjunto finito, e tendo em vista Comentário 1.3.7 (iii), começamos com a escolha máxima, ou seja todos os (dois) elementos. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Conforme (1.3.2) suponhamos a primeira igualdade

$$(0, 0) = \alpha(1, 0) + \beta(2, 1) = (\alpha + 2\beta, \beta)$$

e recebemos a segunda igualdade pelas regras de multiplicação escalar e adição de vetores de \mathbb{R}^2 . Comparando os segundos membros vemos que $0 = \beta$ o qual usamos na comparação dos primeiros membros: recebemos $0 = \alpha + 2 \cdot 0 = \alpha$. Assim temos provado que ambos os coeficientes α e β são nulos. Então X é LI.

Exercício 1.3.10. Quais dos seguintes conjuntos X_i de vetores de \mathbb{R}^2 são ou não são conjuntos linearmente independentes (LI)? Explique porque são ou não são.

1. Elementos de X_1 : os vetores $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.
2. $X_2 := \{(2, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 2)\}$.
3. Escolha dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$. Então defina $X_3 := \{u, v, (1, 1)\}$.

Exercício 1.3.11. Prove as afirmações seguintes.

1. A base canônica \mathcal{E}^n em (1.2.1) é um conjunto LI no \mathbb{R}^n para $n \in \mathbb{N}$.
2. A base canônica \mathcal{E}^∞ em (1.2.2) é um conjunto LI no \mathbb{R}_0^∞ e no \mathbb{R}^∞ .
3. Suponha $u, v \in \mathbb{K}^2$ não são múltiplos um do outro. Prove que o conjunto $\{u, v\}$ é LI.
[Dica: Seja $\alpha u + \beta v = \mathcal{O}$. Considere $\beta \neq 0$ e, lembrando (1.1.3), $\beta = 0$.]
4. Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ vetores de \mathbb{R}^n . Prove que um deles é múltiplo do outro se, e somente se, para todo $i, j = 1, \dots, n$ temos $x_i y_j = x_j y_i$.
5. O subconjunto $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\} \subset M(2 \times 2)$ composto das matrizes

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é um conjunto LI.

6. O conjunto X composto dos três polinômios

$$p = p(x) = x^3 - 5x^2 + 1$$

$$q = q(x) = 2x^4 + 5x - 6$$

$$r = r(x) = x^2 - 5x + 2$$

é um conjunto LI no espaço vetorial $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dos polinômios.

7. Se o conjunto de vetores $\{v_1, \dots, v_m\}$ é LI, prove que o mesmo se dá com o conjunto $\{v_1, v_2 - v_1, \dots, v_m - v_1\}$. Vale a recíproca?

Capítulo 2

Subespaços

Subespaços de um espaço vetorial E são subconjuntos F as quais são invariante pelas duas operações chegando com E . Assim faz sentido restringir as duas operações a F . Munidos das restrições F torna-se um espaço vetorial mesmo.

2.1 Definição e exemplos

Definição 2.1.1. Um subconjunto $F \subset E$ de um espaço vetorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ é chamado de **subespaço** se é **fechado sob as duas operações**, ou seja

- (i) $u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$ (F é fechado sob adição)
(ii) $\alpha \in \mathbb{K}, u \in F \Rightarrow \alpha u \in F$ (F é fechado sob multiplicação escalar)

Lema 2.1.2. *Seja F um subespaço de um espaço vetorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$. Então*

- a) $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}, v_1, \dots, v_k \in F \Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i \in F$ (*fechado sob CL*)
b) F é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} onde as duas operações são aquelas de E restrito ao subconjunto $F \subset E$. (*subespaços são espaços vetoriais*)

Demonstração. a) Indução. b) As restrições tomam valores em F segundo parte a) e as axiomas valem como os elementos de F são elementos de E para as quais os axiomas valem pela hipótese que E é um espaço vetorial. \square

Exercício 2.1.3 (Vetor nulo). O vetor nulo de um subespaço F é o vetor nulo \mathcal{O} do espaço vetorial ambiente. [Dica: Mostre $\mathcal{O} \in F$. O vetor nulo de F é único.]

Checar se um subconjunto $F \subset E$ é um espaço vetorial é bastante trabalhoso dado os muitos axiomas. Isso mostra o valor alto da parte b) do lema dizendo que é suficiente checar “fechado sob as duas operações” – tarefa rapidinha.

Exercício 2.1.4. Mostre que o espaço vetorial \mathbb{R} só tem dois subespaços $\{0\}$ e \mathbb{R} .

Exercício 2.1.5. Mostre que são subespaços de um espaço vetorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$:

- a) $F := \{\mathcal{O}\}$ (o subespaço mínimo / trivial)
 a) $F := E$ (o subespaço máximo)
 b) $\mathbb{K}v := \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ (a reta passando v e a origem \mathcal{O})
 onde v é um vetor não-nulo de E . Observe que $\mathbb{K}\mathcal{O} = \{\mathcal{O}\}$ é um ponto só.

Exemplo 2.1.6 (O subespaço \mathbb{R}_0^∞ de \mathbb{R}^∞). O subconjunto $\mathbb{R}_0^\infty \subset \mathbb{R}^\infty$, composto de todas sequências reais tal que só um número finito de membros são não-nulos, é um espaço vetorial: Se a lista u tem k membros não-nulos e v tem ℓ , então (i) $u + v$ tem no máximo $k + \ell$ e (ii) αu tem no máximo k .

Exercício 2.1.7 (Espaços vetoriais de funções). O conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R}) := \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ das funções reais é um espaço vetorial sob adição e multiplicação com constantes $\alpha \in \mathbb{R}$, veja Exercício 1.2.12. Para $n \in \mathbb{N}_0$ seja

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) := \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

o conjunto dos **polinômios reais do grau menor ou igual n** e $\mathcal{P}(\mathbb{R}) := \bigcup_{n=0}^\infty \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ o conjunto de todos os **polinômios reais**. Seja

$$C^0(\mathbb{R}) := C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$$

o conjunto das **funções contínuas**. Para $k \in \mathbb{N}$ seja $C^k(\mathbb{R}) := C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o conjunto das **funções k vezes continuamente diferenciáveis**. Chama-se

$$C^\infty(\mathbb{R}) := C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \bigcap_{k=0}^\infty C^k(\mathbb{R})$$

o conjunto das **funções suaves**. Sejam $n \in \mathbb{N}_0$ e $k \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^k(\mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$$

são subespaços do espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ do Exercício 1.2.12. Segundo parte b) do Lema 2.1.2 todos estes conjuntos são espaços vetoriais sob adição de funções e multiplicação com constantes.

Exemplo 2.1.8 (Hiperplanos no \mathbb{R}^n). Dada uma lista $\alpha \in \mathbb{R}^n$, o subconjunto

$$H_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0\}$$

é um subespaço de \mathbb{R}^n . O vetor nulo lida ao subespaço máximo $H_\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$. No caso não-nulo $\alpha \neq \mathcal{O}$ chama-se H_α de **hiperplano** no \mathbb{R}^n passando a origem \mathcal{O} .

Lema 2.1.9 (Conjunto de subespaços é fechado sob interseções). *Cada interseção $F := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ de subespaços F_λ de um espaço vetorial E é um subespaço.*

Demonstração. Dado $u, v \in F := \bigcap_{\lambda} F_\lambda$, ou seja $u, v \in F_\lambda \forall \lambda$. Como subespaço cada um F_λ é fechado sob adição, ou seja $u + v \in F_\lambda$ para todos os $\lambda \in \Lambda$. Em símbolos $u + v \in \bigcap_{\lambda} F_\lambda =: F$. Analogamente F é fechado sob mult. escalar. \square

- (i) $X \subset \langle X \rangle$ (contido no subespaço gerado)
- (ii) $Y \subset X \Rightarrow \langle Y \rangle \subset \langle X \rangle$ (naturalidade sob inclusão)
- (iii) $F \subset E$ subespaço $\Rightarrow \langle F \rangle = F$ (não muda subespaços)
- (iv) Um subespaço $F \subset E$ contendo X contém $\langle X \rangle$. (respeita subespaços)

Demonstração. (i) Seja $v \in X$, então $v \stackrel{(\text{comp.})}{=} 1v \in \langle X \rangle$. (ii) Como $Y \subset X$, CLe's em Y são CLe's em X . (iii) Igualdade é consequência das duas inclusões $F \subset \langle F \rangle \subset F$, onde a primeira é (i) e para a segunda usamos que os elementos de $\langle F \rangle$ são CL's em F , mas um subespaço é fechado sob CL's segundo Lema 2.1.2 a). (iv) Com efeito $F \stackrel{(\text{iii})}{=} \langle F \rangle \stackrel{(\text{ii})}{\supset} \langle X \rangle$. \square

Lema 2.2.4. *Todo subconjunto LI $\{u, v\} \subset \mathbb{R}^2$ de dois elementos já gera \mathbb{R}^2 .*

Demonstração. Lema A.2.1. \square

Lema 2.2.5 (Os subespaços de \mathbb{R}^2). $\{\mathcal{O}\}, \mathbb{R}^2$, e as retas passando a origem.

Demonstração. '⊃' Exercício 2.1.5. '⊂' Seja F um subespaço de \mathbb{R}^2 . Caso $F = \{\mathcal{O}\}$, pronto. Caso contrário existe $u \in F$ não-nulo. Se os demais $f \in F$ são múltiplos de u temos $F = \mathbb{R}u$, pronto. Caso contrário existe um $v \in F$, não múltiplo de u . Então $\{u, v\}$ é LI segundo Exercício 1.3.11 parte 2. Mas neste caso segundo Lema 2.2.4 e Lema 2.2.3 (iv) obtemos $\mathbb{R}^2 = \langle \{u, v\} \rangle \subset F \subset \mathbb{R}^2$. \square

Exemplo 2.2.6 (Os espaços $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^\infty, \mathbb{R}^\infty$).

- a) A base canônica $\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$, veja (1.2.1), gera \mathbb{R}^n . Com efeito

$$\mathbb{R}^n \ni v = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A base canônica $\mathcal{E}^0 := \emptyset$ gera o subespaço vetorial trivial $\{0\} =: \mathbb{R}^0 \subset \mathbb{R}$.

- b) Dado $i \in \mathbb{N}$, a sequência com todos membros nulos exceto o i -ésimo qual é 1 denotamos também de e_i . A **base canônica** $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$ gera \mathbb{R}_0^∞ .
- c) A base canônica \mathcal{E}^∞ não gera \mathbb{R}^∞ : Uma CLe deve ser uma soma *finita*, tente escrever a sequência cujos membros são todos 1 como uma CL.

Exemplo 2.2.7 (Polinômios). O conjunto de **monômios** $\{x^0, x, x^2, \dots, x^n\}$ onde $x^0 := 1$ gera $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Todos os monômios $\{1, x, x^2, \dots\}$ geram $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exemplo 2.2.8 (Sistemas lineares). Dado um sistema linear $[\mathbf{a} : b]$ onde \mathbf{a} é uma matriz $m \times n$. Sabemos de (1.2.6) que existe uma solução x se e somente se a lista b é CL das colunas da matriz \mathbf{a} . Consequentemente se as colunas de \mathbf{a} formam um conjunto de geradores de \mathbb{R}^m , então para cada uma inhomogeneidade $b \in \mathbb{R}^m$ o SL admite uma solução.

2.3 Soma direta

Definição 2.3.1 (Soma de subconjuntos). A soma de subconjuntos X e Y de um espaço vetorial E é o conjunto de todas as somas

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\} \subset E$$

Em vez de $\{u\} + Y$ escreve-se $u + Y$ e chama-se **a translação de Y por u** .

Lema 2.3.2. A soma de dois subespaços é gerado da união deles, em símbolos

$$F, G \subset E \text{ subespaços} \Rightarrow F + G = \langle F \cup G \rangle$$

Particularmente, a soma de dois subespaços é um subespaço mesmo.

Demonstração. Para provar igualdade de dois conjuntos prova-se as duas inclusões. ' \subset ' Os elementos de $F + G$ são CL's da forma especial $f + g$ enquanto $\langle F \cup G \rangle$ contem todas as CL's em $F \cup G$.

' \supset ' Pegue um elemento h de $\langle F \cup G \rangle$ e use comutatividade para re-escrever a soma finita com os somandos em F no frente e depois aqueles em G . Assim recebemos um elemento, igual h , em $F + G$. \square

Definição 2.3.3 (Soma direta de subespaços). Sejam $F_1, F_2 \subset E$ subespaços de um espaço vetorial E . No caso da interseção trivial $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$ escreve-se $F_1 \oplus F_2$ em vez de $F_1 + F_2$ e chama-se **soma direta dos subespaços F_1 e F_2** .

O símbolo $F \oplus G$ é simplesmente uma abreviação para duas informações, com efeito

$$F \oplus G = H \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{\mathcal{O}\} \\ F + G = H \end{cases}$$

Use-se a soma direta para decompor um vetor unicamente em componentes.

Teorema 2.3.4. Sejam $F_1, F_2 \subset F$ três subespaços de um espaço vetorial E :

$$F = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow \forall f \in F, \exists! f_1 \in F_1, f_2 \in F_2 \text{ tal que } f = f_1 + f_2$$

Demonstração. Teorema A.2.2. \square

Exercício 2.3.5. No espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ das funções $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sejam

$$F_1 = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ que se anulam em todos os pontos do intervalo } [0,1]\}$$

$$F_2 = \{g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ que se anulam em todos os pontos do intervalo } [2,3]\}$$

Mostre que F_1 e F_2 são subespaços de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, que $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = F_1 + F_2$, mas não se tem $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_2$.

Exercício 2.3.6. Verdadeiro ou falso? Para todos subconjuntos $X, Y \subset E$ vale

$$(i) \quad \langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$$

$$(ii) \quad \langle X \cap Y \rangle = \langle X \rangle \cap \langle Y \rangle$$

Exercício 2.3.7. Uma matriz quadrada $\mathbf{a} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ chama-se

simétrica se $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j$ **anti-simétrica** se $a_{ij} = -a_{ji} \forall i, j$

Então as matrizes simétricas são aquelas iguais às suas transpostas $\mathbf{a}^t = \mathbf{a}$ e as anti-simétricas aquelas com $\mathbf{a}^t = -\mathbf{a}$.

Prove que a) o conjunto $\mathcal{S} = \mathcal{S}(n)$ das matrizes simétricas $n \times n$ e o conjunto $\mathcal{A} = \mathcal{A}(n)$ das anti-simétricas são subespaços de $M(n \times n; \mathbb{K})$ e b) que

$$M(n \times n; \mathbb{K}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

[Dica: b) Considere as duas matrizes $\mathbf{a}^\pm := \frac{1}{2}(\mathbf{a} \pm \mathbf{a}^t)$.]

Capítulo 3

Bases

Durante o Capítulo 3 denotamos de E um espaço vetorial

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K})$$

sobre um corpo \mathbb{K} .

Bases de um espaço vetorial E são subconjuntos LI as quais geram E no sentido que todo vetor de E pode ser escrito como combinação linear (CL) dos elementos da base. Os coeficientes escalares na CL são únicos (propriedade LI) e chamados de coordenadas de um vetor em respeito à base. Quando E admite uma base finita de n elementos chama-se n a dimensão de E . Se escolhermos uma outra base, recebemos uma outra dimensão? Veremos na Seção 3.1.2 que não: Se E admite uma base finita todas as bases tem o mesmo número de elementos.

Então bases são LI, contem suficientemente muitos elementos para que todo vetor pode ser escrito como CL deles, e na dimensão finita bases ainda são conjuntos máximos no sentido que só adicionando mais um outro vetor já recebe-se um conjunto LD.

Definição 3.0.8 (Base). Para um subconjunto \mathcal{B} de E definimos

$$\mathcal{B} \text{ base de } E \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{B} \text{ gera } E \\ \mathcal{B} \text{ é LI} \end{cases}$$

Uma **base ordenada** é uma base $\mathcal{B} = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ cujos elementos são enumerados, equivalentemente escreve-se na forma de uma lista ordenada (ξ_1, \dots, ξ_n) . Conjuntos enumerados correspondem a sequências, listas caso finito.

Exercício 3.0.9. Se $E = F_1 \oplus F_2$, mostre que uma união $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ de bases de F_1 e F_2 é uma base de E . [Dica: União LI – ideia de (A.2.1).]

Exemplo 3.0.10. Sejam $u = (1, 1)$ e $v = (2, 0)$. Os conjuntos $\{e_1, u\}$ e $\{u, v\}$ são bases de \mathbb{R}^2 . Ambos conjuntos são LI segundo Teorema 3.1.1 (os elementos não são múltiplos um do outro), e por isso geram \mathbb{R}^2 (Lema A.2.1). Um exemplo para LD é o conjunto $\{e_1, v\}$, no qual um elemento é múltiplo do outro.

Exemplo 3.0.11 (Bases canônicas).

a) **Listas.** Base canônica $\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ onde $n \in \mathbb{N}_0$.

Caso $n \geq 1$. Exercício 1.3.11 confirma LI, Exercício 2.2.6 diz que gera \mathbb{R}^n .
 Caso $n = 0$. Note que $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ é o espaço vetorial trivial. O conjunto vazio $\mathcal{E}^0 = \emptyset$ é LI (Comentário 1.3.7) e gera o espaço trivial (Definição 2.2.1).
 $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$, veja Exemplo 2.2.6, não é base do \mathbb{R}^∞ , é sim do \mathbb{R}_0^∞ .

b) **Matrizes.** Seja $\mathbf{e}^{ij} \in M(m \times n)$ a matriz com todas entradas nulas exceto a ij -ésima entrada a qual é $(\mathbf{e}^{ij})_{ij} = 1$. A base canônica de $M(m \times n)$ é

$$\mathcal{E}^{m \times n} := \{\mathbf{e}^{ij} \mid i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}\} \subset M(m \times n)$$

Note-se que a base canônica tem $|\mathcal{E}^{m \times n}| = mn$ elementos.

c) **Polinômios.** Base canônica são monômios $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Gerando: Por definição de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. LI: Uma CL de monômios é um polinômio $p \neq 0$ (não constantemente nulo). Se p representa o vetor nulo (o polinômio constantemente nulo) todos coeficientes devem se anular porque polinômios de grau $\ell \geq 1$ tem um numero finito de raízes. Caso p é de grau zero, ele é da forma $p(x) = \alpha_0 x^0$ e para se anular α_0 deve-se anular. Analogamente $\{1, x, \dots, x^n\}$ é uma base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

d) **Hiperplanos.** Dado uma lista $\alpha \in \mathbb{R}^n$ com $\alpha_n \neq 0$, o hiperplano

$$\mathbf{H}_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}$$

tem como base o conjunto $\mathcal{B}_\alpha := \{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\}$ no qual a lista

$$\xi_i := \left(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -\frac{\alpha_i}{\alpha_n}\right) \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n-1$$

tem todos membros nulos exceto o i -ésimo e o último. É óbvio que \mathcal{B}_α é LI, que gera \mathbb{R}^n podemos ver assim: Para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vale

$$\begin{aligned} x &\in \mathbf{H}_\alpha \\ \Leftrightarrow 0 &= \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \\ \Leftrightarrow x_n &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} x_1 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1} \\ \Leftrightarrow x &= \left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} x_1 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x_{n-1}\right) \in \mathbb{R}^n \\ \Leftrightarrow x &= x_1 \xi_1 + \dots + x_{n-1} \xi_{n-1} \end{aligned}$$

3.1 Aplicações

3.1.1 Coordenadas de um vetor

Teorema 3.1.1. *Seja $X \subset E$ um subconjunto tal que $|X| \geq 2$. Então*

- a) X é LI \Leftrightarrow nenhum elemento de X é CL de outros elementos de X
 b) X é LD \Leftrightarrow existe um elemento de X que é CL de outros elementos de X

Demonstração. a) ' \Rightarrow ' Seja X LI, suponha por absurdo que um elemento $u \in X$ fosse CL $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ de outros elementos v_j (tem outros como $|X| \geq 2$). Adicionando $-u$ em ambos lados obtemos $\mathcal{O} = (-1)u + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$. Como $-1 \neq 0$, e depois descartar os termos com coeficientes nulos, trata-se de uma CLe em X representando o vetor nulo. Assim X é LD. Contradição.

' \Leftarrow ' Suponhamos por absurdo X fosse LD. Então existe uma CLe em X

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \mathcal{O}$$

representando o vetor nulo. Caso $k = 1$. Então $\alpha_1 v_1 = \mathcal{O}$ e assim $v_1 = \alpha_1^{-1} \mathcal{O} = \mathcal{O}$. Contradição. Caso $k \geq 2$. Então $v_1 = -\alpha_1^{-1} \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_1^{-1} \alpha_k v_k$ é CL de outros elementos de X . Contradição. b) é equivalente à parte a). \square

Corolário 3.1.2 (Unicidade dos coeficientes de CL's em conjuntos LI). *Seja $\{v_1, \dots, v_k\}$ um subconjunto LI de E , então*

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_k = \beta_k$$

Em palavras, se duas CL's num conjunto LI representam o mesmo vetor, então os coeficientes escalares coincidem.

Demonstração. $\alpha_1 - \beta_1 = 0$: Suponha por absurdo $\alpha_1 - \beta_1 \neq 0$. Então o vetor

$$v_1 = (\alpha_1 - \beta_1)^{-1} ((\alpha_2 - \beta_2)v_2 + \dots + (\alpha_k - \beta_k)v_k)$$

é CL de outros elementos. Contradição. Análogo para os outros $\alpha_j - \beta_j$.

Outro argumento (usando LI): Pela hipótese $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_k - \beta_k)v_k = \mathcal{O}$. LI diz que todos coeficientes são nulos. \square

Lema 3.1.3.

- a) Um subconjunto Y de um conjunto LI X é LI. (Subconjuntos herdam LI)
 b) Um conjunto X contendo um Y LD é LD. (Superconjuntos herdam LD)
 c) Um subconjunto LI X num subespaço $F \subset E$, também é LI em E .
 (LI transfere-se para superespaços)

Demonstração. a) Como X é LI, toda CL em X representando \mathcal{O} tem todos coeficientes nulos. Como $Y \subset X$, toda tal CL em Y é uma em X e assim tem todos coeficientes nulos. b) Como $Y \subset X$, uma CLe em Y representando \mathcal{O} é uma tal em X . c) Isso é simplesmente o fato que o vetor nulo de um subespaço é o vetor nulo do espaço vetorial ambiente, veja Exercício 2.1.3. \square

Comentário 3.1.4 (Consequências das duas propriedades de ser base \mathcal{B} de E). $\langle \mathcal{B} \rangle = E$: Assim todo $v \neq \mathcal{O}$ pode ser escrita como CL em \mathcal{B} , com efeito

$$v = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k \quad (3.1.1)$$

para escalares $\alpha_i \in \mathbb{K}$ e vetores $\xi_j \in \mathcal{B}$ da base.

\mathcal{B} é LI: Assim os coeficientes α_j em cima são únicos (Corolário 3.1.2).

Todo vetor $v \in E$ admite coordenadas únicas $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ em respeito a uma base ordenada \mathcal{B} de E .

Definição 3.1.5 (Coordenadas). Suponha $\mathcal{B} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ é uma base ordenada de um espaço vetorial E . As **coordenadas** de um vetor $v \in E$ em respeito à base \mathcal{B} são os coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ em (3.1.1). A matriz $n \times 1$ das coordenadas

$$[v]_{\mathcal{B}} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n \quad (3.1.2)$$

é chamado de **vetor coordenada** de v em respeito à base \mathcal{B} . Abreviamos $[v] := [v]_{\mathcal{E}^m}$ no caso de $E = \mathbb{K}^m$ munido da base canônica \mathcal{E}^m .

Lema 3.1.6. Duas bases $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ de E são iguais se e somente se cada um elemento de E tem o mesmo vetor coordenada em respeito a \mathcal{B} e a $\tilde{\mathcal{B}}$. Em símbolos

$$[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\tilde{\mathcal{B}}} \quad \forall v \in E \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}$$

Demonstração. “ \Rightarrow ” A hipótese para $v := \xi_1$ diz que $[\xi_1]_{\mathcal{B}} = [\xi_1]_{\tilde{\mathcal{B}}}$. Note-se que $[\xi_1]_{\mathcal{B}} = (1, 0, \dots, 0)$. E assim $[\xi_1]_{\tilde{\mathcal{B}}} = (1, 0, \dots, 0)$. Mas isso significa que $\xi_1 = 1 \cdot \tilde{\xi}_1 + 0 \cdot \tilde{\xi}_2 + \dots + 0 \cdot \tilde{\xi}_n = \tilde{\xi}_1$. Repita para $v = \xi_2, \dots, \xi_n$. “ \Leftarrow ” óbvio. \square

Exercício 3.1.7. Seja $E = \mathbb{R}^2$ munido da base canônica $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ e da base $\mathcal{B} = (\xi_1, \xi_2)$ onde $\xi_1 = (1, 1)$ e $\xi_2 = (-1, 1)$. Determine $[e_1]_{\mathcal{B}}, [e_2]_{\mathcal{B}}, [e_1], [e_2]$ e também $[\xi_1]_{\mathcal{B}}, [\xi_2]_{\mathcal{B}}, [\xi_1], [\xi_2]$.

Exercício 3.1.8. Mostre que os polinômios $1, x-1$, e x^2-3x+1 formam uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Exprima o polinômio $2x^2-5x+6$ como CL nessa base.

3.1.2 Dimensão de um espaço vetorial

Teorema 3.1.9. Se um conjunto finito gera E , então qualquer conjunto $Y \subset E$ com mais elementos é LD.

Corolário 3.1.10. Suponha um conjunto finito X gera E , então

$$Y \subset E \text{ LI} \quad \Rightarrow \quad |Y| \leq |X|.$$

Para provar Teorema 3.1.9 vamos usar o seguinte resultado sobre SLH's.

Teorema 3.1.11 (Existência de soluções não-triviais de um SLH). Dado uma matriz $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K})$. Se tem menos linhas como colunas ($m < n$), então o SLH $\mathbf{a}x = \mathcal{O}$, compare (1.2.5), admite soluções $x = (x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$.

Demonstração. Indução sobre o número m de linhas. Veja Teorema A.3.1. \square

Demonstração de Teorema 3.1.9. Suponha que o conjunto $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ gera o espaço vetorial E e seja $Y \subset E$ um outro subconjunto com mais elementos, ou seja $|Y| > m$. Para mostrar que Y é LD, basta mostrar segundo Lema 3.1.3 b) que um subconjunto $U = \{u_1, \dots, u_{m+1}\} \subset Y$ de $m+1$ elementos é LD. Como X gera E e cada um u_j pertence a E existem escalares a_{ij} tal que

$$u_j = a_{1j}v_1 + \dots + a_{mj}v_m \quad (*_j)$$

para $j = 1, \dots, m+1$.

Para U é LD resta mostrar: existem escalares não-nulos x_1, \dots, x_{m+1} tal que

$$x_1u_1 + \dots + x_{m+1}u_{m+1} = \mathcal{O} \quad (3.1.3)$$

Para este fim considere o SLH de m equações de $n = m+1$ incógnitas x_j

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1,m+1}x_{m+1} = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{m,m+1}x_{m+1} = 0 \end{cases} \quad (\text{SLH})$$

o qual tem uma solução não-trivial $x = (x_1, \dots, x_{m+1}) \neq (0, \dots, 0)$ segundo Teorema 3.1.11 como $m < n$. Obtemos (3.1.3) assim: usando $(*_1 - *_{m+1})$ temos

$$\begin{aligned} & x_1u_1 + \dots + x_{m+1}u_{m+1} \\ &= x_1(a_{11}v_1 + \dots + a_{m1}v_m) \\ & \quad + x_2(a_{12}v_1 + \dots + a_{m2}v_m) \\ & \quad \vdots \\ & \quad + x_{m+1}(a_{1,m+1}v_1 + \dots + a_{m,m+1}v_m) \\ &= v_1 \underbrace{\sum_{j=1}^{m+1} a_{1j}x_j}_{= 0 \text{ (SLH)}_1} + \dots + v_m \underbrace{\sum_{j=1}^{m+1} a_{mj}x_j}_{= 0 \text{ (SLH)}_m} \\ &= \mathcal{O} \end{aligned}$$

□

Proposição 3.1.12. *Se uma base \mathcal{B} de E tem m elementos, então todas tem.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ bases de E .

- 1) $\langle \mathcal{B} \rangle = E$ e $Y := \tilde{\mathcal{B}}$ LI implicam (Corolário 3.1.10) $\ell := |\tilde{\mathcal{B}}| \leq |\mathcal{B}| = m < \infty$.
- 2) Analogamente como $\langle \tilde{\mathcal{B}} \rangle = E$ e $Y := \mathcal{B}$ é LI, temos que $m = |\mathcal{B}| \leq |\tilde{\mathcal{B}}| = \ell$. □

Definição 3.1.13 (Dimensão). Se um espaço vetorial E admite uma base finita \mathcal{B} , o numero dos elementos é dito a **dimensão de E** , em símbolos

$$\dim E := |\mathcal{B}|$$

Caso E não admite nenhuma base finita dizemos que E é de **dimensão infinita** e escrevemos $\dim E = \infty$.

Comentário 3.1.14 (Dimensão do espaço vetorial trivial). O conjunto vazio é uma base do espaço vetorial trivial $E = \{\mathcal{O}\}$, Exemplo 1.3.7, assim $\dim\{\mathcal{O}\} = 0$.

Lema 3.1.15 (Aumentando conjuntos LI). *Seja $X = \{v_1, \dots, v_k\}$ um subconjunto LI e seja $u \in E$ um vetor fora do subespaço gerado, ou seja $\langle X \rangle$. Então o conjunto estendido $\{v_1, \dots, v_k, u\}$ também é LI.*

Demonstração. Se $X = \emptyset$, então $u \notin \langle \emptyset \rangle = \{\mathcal{O}\}$, assim $u \neq \mathcal{O}$ e $\{u\}$ é LI segundo Corolário 1.3.7. Se $X \neq \emptyset$, suponha por absurdo que $\{v_1, \dots, v_k, u\}$ fosse LD. Assim existe uma CL $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta u = \mathcal{O}$. Caso $\beta = 0$, então $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq (0, \dots, 0)$ e $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \mathcal{O}$. Assim $\{v_1, \dots, v_k\}$ é LD. Contradição. Caso $\beta \neq 0$, então $u = -\beta^{-1}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) \in \langle X \rangle$. Contradição. \square

Exercício 3.1.16. Sejam X_1, X_2, \dots subconjuntos LI de um espaço vetorial E .

1. Caso encaixado $X_1 \subset X_2 \subset \dots$, prove que $X = \bigcup X_n$ é LI.
2. Se cada X_n tem n elementos, prove que existe um conjunto LI $\tilde{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$ com $x_j \in X_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.
3. Supondo $E = \mathbb{R}^\infty$ e as hipóteses em 1. e 2., é verdade que $X = \bigcup X_n$ seja uma base de E ?

Corolários do Teorema 3.1.9

Nos corolários seguintes $n \in N_0$, particularmente é um número, assim finito.

Corolário 3.1.17. $Y \subset E, |Y| > n := \dim E \Rightarrow Y$ LD

Demonstração. Como $\dim E = n$ existe uma base \mathcal{B} de E com n elementos. \square

Corolário 3.1.18. *Se um conjunto Y é LI em E , então $|Y| \leq \dim E$.*

Demonstração. Caso $\dim E = \infty$: verdadeiro trivialmente. Caso $\dim E < \infty$: escolha para X em Corolário 3.1.10 uma base de E para obter $|Y| \leq \dim E$. \square

Corolário 3.1.19. *Suponha $X \subset E$ tem $n := \dim E$ elementos, então*

$$X \text{ gera } E \quad \Leftrightarrow \quad X \text{ é LI}$$

Demonstração. $n = 0$. Assim $X = \emptyset$, ambos lados valem automaticamente.

$n = 1$. Assim $X = \{v\}$ onde $v \in E$, ambos lados são equivalentes a $v \neq \mathcal{O}$.

$n = 2$. '⇒' Suponha que $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ gera E . Por absurdo suponha que X é LD. Segundo Teorema 3.1.1 b) um elemento de X , dizemos v_n , é CL de outros elementos de X . Então $E = \langle X \rangle = \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle = \langle \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \rangle$. Qualquer base \mathcal{B} de E tem n elementos pela hipótese $n = \dim E$ – mais elementos como o conjunto $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ gerando E . Então \mathcal{B} é LD segundo Teorema 3.1.9. Contradição. '⇐' Suponha que $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ é LI. Por absurdo suponha que X não gera E . Então existe $u \in E$ não elemento de $\langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle$. Assim o conjunto aumentado $\{v_1, \dots, v_n, u\}$ é LI segundo Lema 3.1.15. Mas um subconjunto com mais elementos ($n + 1$) como a dimensão (n) é LD segundo Corolário 3.1.17. Contradição. \square

Corolário 3.1.20. *Um subconjunto LI com $n = \dim E$ elementos é uma base.*

Demonstração. Tal subconjunto LI gera E segundo Corolário 3.1.19 ' \Leftarrow '. \square

Lema 3.1.21. *Se um conjunto finito X gera E , então $|X| \geq \dim E$.*

Demonstração. Suponha que $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ gera E .

CASO $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ é LI: Então X é base e assim $|X| = \dim E$.

CASO $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ é LD: Assim $X \neq \emptyset$.

Caso $m = 1$: Então $v_1 = \mathcal{O}$ e $E = \langle v_1 \rangle = \{\mathcal{O}\}$. Assim $|X| = 1 > 0 = \dim E$.

Caso $m \geq 2$: Como $\{v_1, \dots, v_m\}$ é LD, pelo menos um elemento, dizemos v_m , deve ser CL de outros. Iterando até chegamos num conjunto LI obtemos que

$$E = \langle \{v_1, \dots, v_m\} \rangle = \langle \{v_1, \dots, v_{m-1}\} \rangle = \dots = \langle \{v_1, \dots, v_\ell\} \rangle$$

onde $\{v_1, \dots, v_\ell\}$ é LI e $\ell \geq 1$. Então $\{v_1, \dots, v_\ell\} =: \mathcal{B}$ é base de E e assim $|X| > \ell = |\mathcal{B}| =: \dim E$. \square

Exemplo 3.1.22 (Dimensão). Veja Exemplo 3.0.11.

(a) $\dim \mathbb{R}^n = |\mathcal{E}^n| = n$ e $\dim \mathbb{R}_0^\infty = |\mathcal{E}^\infty| = \infty$. (Análogo para corpos \mathbb{K} .)

$\dim \mathbb{R}^\infty = \infty$: Suponha por absurdo que é finita a dimensão $n := \dim \mathbb{R}^\infty$. Segundo Corolário 3.1.17 para $Y = \mathcal{E}^\infty$ e $E = \mathbb{R}^\infty$, como $|Y| = |\mathcal{E}^\infty| = \infty > n = \dim \mathbb{R}^\infty$, segue que \mathcal{E}^∞ é LD em \mathbb{R}^∞ . Mas \mathcal{E}^∞ é LI em \mathbb{R}^∞ segundo Exercício 1.3.11. (Outro argumento: Como \mathcal{E}^∞ é LI em \mathbb{R}_0^∞ , deve ser LI em \mathbb{R}^∞ segundo parte c) do Lema 3.1.3.) Contradição.

(b) $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1$ e $\dim \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \infty$.

(c) $\dim M(m \times n) = mn$.

(d) Hiperplanos $H_\alpha \subset \mathbb{R}^n$, onde $\alpha \in \mathbb{R}^n$ não-nulo, tem dimensão $n - 1$. Aquele 'hiper' refere-se ao fato de que na dimensão falta 1 para a dimensão do espaço vetorial ambiente.

Exercício 3.1.23 (Produto cartesiano). Seja $n \in \mathbb{N}_0$ e seja F um espaço vetorial de dimensão m . Mostre que o produto cartesiano $F^{\times n}$, veja (1.1.2), é um espaço vetorial sob as operações de adição e multiplicação escalar, ambas componente-por-componente, e que $\dim F^{\times n} = mn$.

[Dica: Dimensão – escolha uma base de F e use para definir uma base de $F^{\times n}$.]

3.2 Existência e extensão

Teorema 3.2.1. *Seja E da dimensão finita $n \in \mathbb{N}_0$.*

(a) *Todo conjunto gerando E contém uma base de E .* (Existência de bases)

(b) *Todo subconjunto LI é contido numa base de E .* (Extensão de bases)

(c) *A dimensão de qualquer subespaço de E é $\leq n$.* (Dimensão)

(d) *Um subespaço F de E da mesma dimensão n é igual a E .*

Demonstração. LI refere-se a E se não especificado diferente. **(a)** Suponha X gera E . Seja $B \subset X$ qualquer subconjunto LI (existe como $B = \emptyset$ mostra), então $|B| \leq \dim E =: n$ segundo Corolário 3.1.18. Para $k \in \mathbb{N}_0$ seja

$$\mathcal{C}_k := \{B \subset X \mid B \text{ é LI e } |B| = k\}$$

a família de todos os subconjuntos $B \subset X$ os quais são LI e composto de k elementos. Seja $B_* \subset X$ um subconjunto LI com o número máximo de elementos. Então $B_* \in \mathcal{C}_\ell$ para um $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$. Seja $B_* = \{\xi_1, \dots, \xi_\ell\}$. Considere as quatro inclusões (dois deles sendo igualdades)

$$E = \langle X \rangle \subset \langle\langle B_* \rangle\rangle = \langle B_* \rangle \subset E$$

Consequentemente o conjunto LI B_* gera E , ou seja B_* é uma base. Resta justificar as quatro inclusões. INCLUSÃO 1. Pela hipótese X gera E .

INCLUSÃO 2. Parte (ii) de Lema 2.2.3 aplica como $X \subset \langle B_* \rangle$: Suponha por absurdo que existe um vetor $v \in X$ o qual não é CL em B_* , ou seja $v \notin \langle B_* \rangle$. Segundo Lema 3.1.15 o subconjunto aumentado $\{\xi_1, \dots, \xi_\ell, v\}$ de X ainda é LI, mas contem $\ell + 1$ elementos, então mais como B_* . Contradição.

INCLUSÃO 3. Como $\langle B_* \rangle$ é um subespaço parte (iii) de Lema 2.2.3 aplica.

INCLUSÃO 4. Como $B_* \subset X \subset E$ parte (ii) de Lema 2.2.3 aplica.

(b) Suponha $X \subset E$ é um subconjunto LI. Como $k := |X| \in \{0, \dots, n\}$, veja Corolário 3.1.18, trata-se de um conjunto finito, ou seja $X = \{v_1, \dots, v_k\}$. Subconjuntos $B \subset E$ LI e **contendo X** (existem como $B := X$ mostra) são compostos de ℓ elementos para um $\ell \in \{k, \dots, n\}$. Seja B_* um tal subconjunto com o número máximo ℓ_* de elementos. Então B_* é LI e contem $X \subset B_*$. Para B_* é uma base de E , resta mostrar que gera E , ou seja $\langle B_* \rangle = E$:

' \subset ' trivial como $B_* \subset E$. ' \supset ' Suponha por absurdo que existe um vetor $u \in E$ o qual não pertence a $\langle B_* \rangle$, então o conjunto aumentado $B_* \cup \{u\}$ é LI segundo Lema 3.1.15, contem X porque B_* contem X – mas tem mais elementos como B_* . Contradição.

(c) Suponha F é um subespaço de E . Seja $B \subset F$ qualquer subconjunto LI em respeito a F (existe como $B = \emptyset$ mostra). Note que B é LI em respeito a E segundo Lema 3.1.3 c). Assim $|B| \leq n := \dim E$ segundo Corolário 3.1.18. Agora escolha um subconjunto $B_* \subset F$ LI em respeito a F com o número máximo de elementos. Como temos visto $k := |B_*| \leq \dim E =: n$. Resta mostrar que B_* é uma base de F (neste caso $\dim F = |B_*|$). Pela escolha B_* é LI em F , então basta mostrar $\langle B_* \rangle = F$:

' \subset ' trivial como $B_* \subset F$. ' \supset ' Suponha por absurdo que existe um vetor $u \in F$ o qual não pertence a $\langle B_* \rangle$, então o conjunto aumentado $B_* \cup \{u\}$ é LI em F segundo Lema 3.1.15 – mas tem mais elementos como B_* . Contradição.

(d) Seja $F \subset E$ um subespaço de dimensão $n := \dim E$. Pela definição de dimensão existe uma base \mathcal{B} de F com n elementos. Como \mathcal{B} é LI em respeito a F , é LI em respeito a E segundo Lema 3.1.3 c). Como além disso $|\mathcal{B}| = n := \dim E$ o Corolário 3.1.19 diz que \mathcal{B} gera E . Então $E = \langle \mathcal{B} \rangle = F$, onde a segunda igualdade segue porque \mathcal{B} é base de F , então gera F . \square

Proposição 3.2.2. *Seja F um espaço vetorial e F_1, F_2 subespaços de dimensão finita k, ℓ . Então existe uma base finita \mathcal{B} do subespaço $F_1 + F_2$ de F que contem uma base \mathcal{B}_1 de F_1 , uma base \mathcal{B}_2 de F_2 , e uma base \mathcal{B}_{12} de $F_1 \cap F_2$. Vale que*

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2) \quad (3.2.1)$$

Demonstração. Vamos denotar de (b),(c) as partes correspondentes do Teorema 3.2.1. O subespaço $F_1 \cap F_2 \subset F_1$ tem dimensão finita m (segundo (c) para $E = F_1$) e assim admite uma base finita $\mathcal{B}_{12} = \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ (segundo a definição de dimensão). Segundo (b) para $E = F_1$ o conjunto \mathcal{B}_{12} – LI em $F_1 \cap F_2$ e segundo Lema 3.1.3 LI no superespaço F_1 – é contido numa base \mathcal{B}_1 de F_1 . Analogamente \mathcal{B}_{12} é contido numa base \mathcal{B}_2 de F_2 . Uma base de $F_1 + F_2$ contendo as bases desejadas é

$$\mathcal{B} := (\mathcal{B}_1 \setminus \mathcal{B}_{12}) \dot{\cup} \overbrace{\mathcal{B}_{12} \dot{\cup} (\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12})}^{\mathcal{B}_2} = \mathcal{B}_1 \dot{\cup} (\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12}) = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$$

Contando elementos obtemos

$$\dim(F_1 + F_2) := |\mathcal{B}| = (k - m) + m + (\ell - m) = k + \ell - m.$$

Resta checar as duas propriedades de uma base. \mathcal{B} gera $F_1 + F_2$: Os elementos de $F_1 + F_2$ são da forma $f_1 + f_2$ onde $f_1 \in F_1$ (assim é CL em \mathcal{B}_1) e $f_2 \in F_2$ (assim é CL em \mathcal{B}_2). Consequentemente $f_1 + f_2$ é CL em $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$. \mathcal{B} é LI em F : Seja $\mathcal{B}_1 = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ e $\mathcal{B}_2 \setminus \mathcal{B}_{12} = \{\eta_1, \dots, \eta_{\ell-m}\}$. Suponha por absurdo que \mathcal{B} é LD, ou seja existem escalares α_i, β_i não todos nulos tal que

$$\underbrace{\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k}_{=: -v_1} + \underbrace{\beta_1 \eta_1 + \dots + \beta_{\ell-m} \eta_{\ell-m}}_{=: v_1} = \mathcal{O}$$

Não todos β_i 's são nulos (caso contrário \mathcal{B}_1 é LD, contradição). Assim $v_1 \in F_2 \setminus (F_1 \cap F_2)$. De outro lado $-v_1$, então v_1 , é elemento do subespaço F_1 . Assim $v_1 \in (F_1 \cap F_2)$ e $v_1 \notin (F_1 \cap F_2)$. Contradição. \square

Corolário 3.2.3. *Sejam $F, G \subset E$ subespaços de dimensões finitas, então:*

$$F \oplus G = E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dim F + \dim G = \dim E \\ F \cap G = \{\mathcal{O}\} \end{cases}$$

Demonstração. ' \Rightarrow ' Fórmula (3.2.1) usando que a interseção tem dimensão zero. ' \Leftarrow ' Suponha que $F \cap G = \{\mathcal{O}\}$ e que as dimensões de F e G adicionam à dimensão de E . Segundo Lema 2.3.2 a soma $F + G$ é um subespaço de E . Então $F + G = E$ segundo Teorema 3.2.1 (d). \square

Exercício 3.2.4 (Subespaços do espaço $M(n \times n)$ das matrizes quadradas). ¹

¹ As dimensões para seu controle: 2. $\dim \mathcal{T} = n(n+1)/2$
3. (a) $2 \frac{(n-1)n}{2} + (n-1) = n^2 - 1$ (b) $n(n-2) + n = n(n-1)$ (c) $(n-1)^2 + n = n^2 - (n-1)$

1. Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{S} \subset M(n \times n)$ os subespaços das matrizes anti-/simétricas.
- (a) Para cada par $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, n\}$ seja \mathbf{e}_+^{ij} a matriz $n \times n$ cujos elementos nas posições ij e ji são iguais a 1 e os demais são zero. Prove que estas matrizes constituem uma base $\{\mathbf{e}_+^{ij}\}$ para \mathcal{S} .
- (b) De modo análogo, obtenha uma base $\{\mathbf{e}_-^{ij}\}$ para \mathcal{A} .
- (c) Conclua que

$$\dim \mathcal{S} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Calcule $\dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{A}$ e lembre-se que $\dim M(n \times n) = n^2$. Conclua que

$$M(n \times n) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$$

Antes, no Exercício 2.3.7, tenhamos obtido uma prova alternativa desse.

2. As matrizes $\mathbf{t} = (t_{ij}) \in M(n \times n)$ tais que $t_{ij} = 0$ quando $i < j$ são chamadas **triangulares inferiores**. Prove que elas constituem um subespaço $\mathcal{T} \subset M(n \times n)$. Obtenha uma base para \mathcal{T} e determine a sua dimensão.
3. Obtenha uma base e conseqüentemente determine a dimensão de cada um dos seguintes subespaços de $M(n \times n)$ as quais são composto de
- (a) matrizes $\mathbf{a} = (a_{ij})$ de **traço** (a soma dos elementos da diagonal)

$$\text{tr} : M(n \times n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{a} \mapsto \text{tr } \mathbf{a} := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

nulo, ou seja $\text{tr } \mathbf{a} = 0$.

- (b) matrizes cuja primeira e última linha são iguais
- (c) matrizes cuja primeira linha e primeira coluna são iguais

Parte II

Teoria das transformações lineares

Capítulo 4

Transformações lineares

No Capítulo 4 denotamos de E, F espaços vetoriais

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K}), \quad F = (F, +, \cdot, \mathbb{K})$$

ambos sobre o mesmo corpo \mathbb{K} . Na primeira leitura pense em $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. As letras m, n denotam números naturais ou zero.

4.1 Exemplos e construção

Definição 4.1.1. Uma **transformação linear (TL)**, também chamado de **homomorfismo de espaços vetoriais** ou **operador linear**, é uma aplicação

$$A : E \rightarrow F, \quad v \mapsto A(v) =: Av$$

a qual preserva as operações em E e F , ou seja

$$\text{(Linearidade)} \quad \begin{cases} A(\alpha v) = \alpha Av \\ A(v + w) = Av + Aw \end{cases}$$

para todos os escalares $\alpha \in \mathbb{K}$ e todos os vetores $v, w \in E$. Note-se que nos lados esquerdos aparecem as operações em E e nos lados direitos aquelas em F .

Como indicado acima vamos escrever no caso de aplicações lineares geralmente Av em vez de $A(v)$. Assim Av já sinaliza que A é linear. Note-se que

$$\text{(Linearidade)} \quad \Leftrightarrow \quad A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E$$

Lema 4.1.2. *Seja $A : E \rightarrow F$ uma TL. Então*

- (i) $A\mathcal{O} = \mathcal{O}$ *(leva o vetor nulo de E no vetor nulo de F)*
- (ii) $A(-v) = -(Av)$ *(leva inversos em inversos)*
- (iii) $A(u - v) = Au - Av$

$$(iv) A(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 A v_1 + \cdots + \alpha_k A v_k \quad (\text{leva CLs em CLs})$$

para todos os vetores $u, v, v_i \in E$ e escalares $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

Demonstração.

$$(i) A\mathcal{O} = A(\mathcal{O} + \mathcal{O}) \stackrel{\text{linear}}{=} A\mathcal{O} + A\mathcal{O}, \text{ então } A\mathcal{O} = \mathcal{O} \text{ segundo Lema 1.1.4 3b)}$$

$$(ii) A(-v) + Av \stackrel{\text{linear}}{=} A(-v + v) = A\mathcal{O} \stackrel{(i)}{=} \mathcal{O}.$$

$$(iii) A(u - v) \stackrel{\text{linear}}{=} Au + A(-v) \stackrel{(ii)}{=} Au - Av.$$

$$(iv) \text{Indução sobre } k \text{ baseado na linearidade.} \quad \square$$

Exercício 4.1.3. Considere os elementos de \mathbb{R}^2 dados por

$$u_1 = (2, -1), \quad u_2 = (1, 1), \quad u_3 = (-1, -4),$$

e

$$v_1 = (1, 3), \quad v_2 = (2, 3), \quad v_3 = (5, 6).$$

Decida se existe ou não uma transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$Au_1 = v_1, \quad Au_2 = v_2, \quad Au_3 = v_3$$

Solução. Se A é linear então escrevendo u_3 como CL de u_1 e u_2 , ou seja $u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$, o elemento $v_3 = Au_3$ deve ser CL de $v_1 = Au_1$ e $v_2 = Au_2$ com os mesmos coeficientes. Com efeito

$$v_3 = Au_3 = A(\alpha u_1 + \beta u_2) \stackrel{\text{lin.}}{=} \alpha Au_1 + \beta Au_2 = \alpha v_1 + \beta v_2$$

Então vamos checar se é verdadeiro isso: Determinamos α e β primeiro

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2 = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha + \beta \\ -\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

Comparando os primeiros membros obtemos $\beta = -1 - 2\alpha$. Use isso na comparação dos segundos membros para obter $\alpha = \beta + 4 = -1 - 2\alpha + 4 = 3 - 2\alpha$. Assim $\alpha = 1$ e $\beta = -3$. Basta calcular

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = v_3$$

Então não existe uma tal transformação linear A .

Exercício 4.1.4. Mesma pergunta como no Exercício 4.1.3 mas a) com $v_3 = (-5, -6)$ e b) com $v_3 = (5, -6)$.

Exemplo 4.1.5 (Derivação e convolução).

(Derivação) Seja $k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$, então é linear o operador derivada

$$D : C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \mapsto f' := \frac{d}{dx} f$$

(Convolação) Dada uma função contínua $k: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, Seja $k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$, então é linear o operador definido por

$$K: C^0([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C^0([a, b], \mathbb{R}), \quad f \mapsto \int_a^b k(\cdot, y)f(y) dy$$

No caso particular $k(x, y) = g(x-y)$ onde $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma dada função contínua o operador K_g definido por

$$(K_g f)(x) := \int_a^b g(x-y)f(y) dy$$

é chamado de **convolação** das funções f e g , notação $f * g := K_g f$.

4.1.1 O espaço vetorial das transformações lineares

Definição 4.1.6 (O espaço vetorial $\mathcal{L}(E, F)$). O conjunto

$$\mathcal{L}(E, F) := \{A \mid A: E \rightarrow F \text{ transformação linear}\}$$

de todas as transformações lineares entre E e F seja munido das operações

$$\begin{aligned} + : \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) & \cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{L}(E, F) &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ (A, B) &\mapsto A + B & (\alpha, A) &\mapsto \alpha A \end{aligned}$$

definidas assim $(A + B)v := Av + Bv$ e $(\alpha A)v := \alpha(Av)$.

Note que $A + B, \alpha A: E \rightarrow F$ realmente são lineares. Por exemplo, vale

$$(\alpha A)(v + w) \stackrel{\text{def.}}{=} \alpha(A(v + w)) \stackrel{\text{lin.}}{=} \alpha(Av + Aw) \stackrel{\text{distr.}}{=} \alpha(Av) + \alpha(Aw)$$

e o lado direito é $(\alpha A)v + (\alpha A)w$ pela definição de αA .

Lema 4.1.7. *O conjunto $\mathcal{L}(E, F)$ das transformações lineares de E para F munido das operações $' + '$ e $' \cdot '$ forma um espaço vetorial*

$$\mathcal{L}(E, F) = (\mathcal{L}(E, F), +, \cdot, \mathbb{K})$$

sobre o corpo \mathbb{K} . O vetor nulo de $\mathcal{L}(E, F)$ é a TL nula $\mathcal{O}: E \rightarrow F, v \mapsto \mathcal{O}$.¹

Demonstração. Deixamos ao leitor verificar os axiomas na Definição 1.1.16. \square

Definição 4.1.8 (Operadores lineares em E). No caso $F = E$ os elementos de $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E, E)$ são chamados de **operadores lineares em E** e o operador

$$I = I_E: E \rightarrow E, \quad v \mapsto v \tag{4.1.1}$$

é chamado de **operador identidade** em E .

¹ o primeiro \mathcal{O} é $\mathcal{O}_{\mathcal{L}(E, F)}$ e o outro \mathcal{O}_F ; para legibilidade não escrevemos demais subscritos

4.1.2 O espaço dual

Definição 4.1.9 (O espaço dual E^*). No caso $F = \mathbb{K}$ o espaço $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ é chamado de **espaço dual** de E . Chama-se os elementos $\phi \in E^*$ de **funcionais \mathbb{K} -lineares** em E ou, no caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, **funcionais lineares**, às vezes **reais**.

Exercício 4.1.10. A expressão geral de um funcional linear $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é

$$\phi(x, y, z) = ax + by + cz$$

onde a, b, c são números reais determinando ϕ . Dados os elementos

$$u = (1, 2, 3), \quad v = (-1, 2, 3), \quad w = (1, -2, 3),$$

de \mathbb{R}^3 determine a, b, c de tal modo que se tenha $\phi u = 1$, $\phi v = 0$ e $\phi w = 0$.²

Exercício 4.1.11. Seja $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ uma base do espaço vetorial real³ E . Para $i = 1, 2, \dots, n$ seja $\phi_i \in E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ determinado pelos valores na base \mathcal{B}

$$\phi_i \xi_1 = 0, \quad \dots, \quad \phi_i \xi_{i-1} = 0, \quad \phi_i \xi_i = 1, \quad \phi_i \xi_{i+1} = 0, \quad \dots, \quad \phi_i \xi_n = 0$$

veja (4.1.3). Prove que $\mathcal{B}^* := \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ é uma base de E^* (chamada de **base dual** de \mathcal{B}). Mostre que se tem $\phi_i v = v_i$ para todo $v = v_1 \xi_1 + \dots + v_n \xi_n \in E$.

Exemplo 4.1.12 (Funcionais lineares $\varphi, \psi \in E^*$). Seja $E = C^0([a, b])$ o espaço vetorial real das funções contínuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neste intervalo.

(Integração) A função $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(f) := \int_a^b f(x) dx$$

é linear e assim $\varphi \in E^*$

(Avaliação) Dado um ponto $x_0 \in [a, b]$, a função $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(f) := f(x_0)$$

é linear e assim $\psi \in E^*$.

Isomorfismos

Isomorfismo e inversa serão tratados com mais detalhes na Seção 5.3.

² A resposta para seu controle: $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = 0$.

³ 'real' indica que o corpo são os números reais \mathbb{R}

Definição 4.1.13 (Isomorfismo). Um **isomorfismo** entre espaços vetoriais E e F é uma transformação linear (homomorfismo) $T : E \rightarrow F$ tal que a aplicação

$$T : E \rightarrow F \text{ é bijetiva} \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{injetiva} & :\Leftrightarrow Tu = Tv \Rightarrow u = v \\ \text{e} \\ \text{sobrejetiva} & :\Leftrightarrow \forall v \in F \exists u \in E : Tu = v \end{cases}$$

Se existe um isomorfismo entre E e F dizemos “ E e F são **isomorfos**” e escrevemos $E \simeq F$, ou ainda $E \xrightarrow{T} F$ para destacar quem é o isomorfismo.

Definição 4.1.14 (Inversa). Uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$ é chamado **invertível** caso existe um $B \in \mathcal{L}(F, E)$ tal que $AB = I_F$ e $BA = I_E$. Neste caso B é único e chamado **a inversa** de A , símbolo $A^{-1} := B$

Comentário 4.1.15. Dado um isomorfismo $T : E \rightarrow F$, definimos a aplicação

$$S : F \rightarrow E, \quad f \mapsto v$$

onde $v \in E$ é o único vetor tal que $Tv = f$, veja (5.3.1). Pode checar que S é linear e bijetiva, ou seja um isomorfismo, e que S é a inversa de T .

A composição BA de dois isomorfismos é um isomorfismo e sua inversa é a composição das inversas – mas na ordem oposta

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} \quad (4.1.2)$$

4.1.3 Construção de transformações lineares

Uma base **ordenada** é uma base $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ cujos elementos são enumerados, alternativamente escreve-se na forma de uma lista ordenada (ξ_1, \dots, ξ_n) .

Proposição 4.1.16. *A fim de definir um homomorfismo $A \in \mathcal{L}(E, F)$ basta escolher as imagens de uma base (ordenada) $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ de E :*

EXISTÊNCIA. *Escolha uma lista $f := (f_1, \dots, f_n)$ de $n := \dim E$ elementos f_j do contra-domínio F , repetições não excluídas, e defina*

$$A_f \xi_j := f_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (*_f)$$

Então estende A_f ao E inteiro usando (Linearidade): Dado $u \in E$, exprime u em respeito à base \mathcal{B} na forma $u = \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j$ onde os escalares α_j são únicas – são as chamadas coordenadas do vetor u , veja (3.1.1). Defina

$$A_f u := \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j \stackrel{(*_f)}{=} \sum_{j=1}^n \alpha_j A_f \xi_j \quad (4.1.3)$$

UNICIDADE. *Se $B \in \mathcal{L}(E, F)$ satisfaz $(*_f)$, levando os ξ_j nos f_j , então $B = A_f$.*

Demonstração. Deixamos ao leitor a tarefa simples de checar que A_f definido acima é linear, ou seja $A_f \in \mathcal{L}(E, F)$, e é unicamente determinado por $(*_f)$. \square

Note-se que A_f não só depende da escolha dos elementos f_j de F , mas também da escolha da base \mathcal{B} de E . Por isso às vezes escrevemos

$$A_f^{\mathcal{B}} = A_f$$

Exercício 4.1.17. Mostre: os membros da lista $f = (f_1, \dots, f_n) \in F^{\times n}$ formam

- a) um conjunto LI de n elementos $\Leftrightarrow A_f$ é injetivo
- b) um conjunto gerando F $\Leftrightarrow A_f$ é sobrejetivo
- c) uma base de F $\Leftrightarrow A_f$ é um isomorfismo (e $\dim E = \dim F$)

Se lembra da diferença entre lista e conjunto? O conjunto $X := \{f_1, \dots, f_n\}$ dos f_j 's não necessariamente contem n elementos: por exemplo, se escolhe para cada um membro f_j da lista f o mesmo vetor f o conjunto X contem 1 elemento.

Teorema 4.1.18. *Seja $\dim F$ finita e $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ uma base de E , então*

$$\begin{aligned} \Psi = \Psi_{\mathcal{B}} : F^{\times n} &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ f &\mapsto A_f \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

é um isomorfismo. Lembre-se de $(*_f)$ que A_f é determinado por $A_f \xi_j := f_j$.

Demonstração. Segundo Proposição 4.1.16 é suficiente avaliar TLs numa base. LINEAR. Segue de $A_{\alpha f + \beta g} \xi_j := (\alpha f + \beta g)_j = \alpha f_j + \beta g_j =: \alpha A_f \xi_j + \beta A_g \xi_j$. INJETIVO. Suponha $A_f = A_g$. Então $f_j := A_f \xi_j = A_g \xi_j := g_j$ para todos os j . SOBREJETIVO. Dado $B \in \mathcal{L}(E, F)$, defina $f_j := B \xi_j, \forall j$. Assim $A_f = B$. \square

Lembre-se do Exercício 3.1.23 que $\dim F^{\times n} = n \dim F$. Vamos ver no futuro, veja Corolário 5.3.9, que isomorfismos preservam dimensões – o que implica

Corolário 4.1.19. $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim F^{\times n} = \dim E \cdot \dim F$

Exercício 4.1.20. Mostre que $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \dim M(m \times n)$. Dado um corpo \mathbb{K} , vale analogamente $\dim \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = \dim M(m \times n; \mathbb{K})$.

Comentário 4.1.21 (Extensão de TLs). Suponha que em vez de uma base de E só temos um subconjunto $\mathcal{X} \subset E$ LI e com k elementos $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$, particularmente $k = |\mathcal{X}| \leq \dim E =: n$. Note-se que \mathcal{X} é uma base do subespaço $\langle \mathcal{X} \rangle$. Seja $f = (f_1, \dots, f_k) \in F^{\times k}$ uma lista com $k := \dim \langle \mathcal{X} \rangle = |\mathcal{X}|$ membros. Conforme Proposição 4.1.16 isso determina unicamente uma TL injetiva

$$A_f^{\mathcal{X}} : E \supset \langle \mathcal{X} \rangle \rightarrow F, \quad A_f^{\mathcal{X}} \xi_j := f_j \quad (j = 1, \dots, k)$$

Então existe uma transformação linear

$$A_{\tilde{f}}^{\tilde{\mathcal{X}}} : E \rightarrow F$$

extendendo $A_f^{\mathcal{X}}$, ou seja a restrição $A_{\tilde{f}}^{\tilde{\mathcal{X}}} |_{\langle \mathcal{X} \rangle} = A_f^{\mathcal{X}}$. Para construir a extensão I) estende-se o conjunto LI \mathcal{X} a uma base de E usando o Teorema 3.2.1 (b) e II) apensa-se à lista f mais $n - k$ membros.

4.2 Matrizes

Matrizes são transformações lineares

Para ver isso escolhemos uma matriz $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K})$ e consideramos a aplicação

$$\mathbf{a}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m, \quad x \mapsto \mathbf{a}x$$

a qual leva uma lista $x \in \mathbb{K}^n$ para a lista definida pelo produto matriz

$$\mathbf{a}x = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Lembrando a notação $\mathbf{a}_{\bullet j}$ para colunas introduzido em (1.2.3), continuamos

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_{\bullet 1}} x_1 + \cdots + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_{\bullet n}} x_n =: (\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

No último passo definimos uma nova notação a qual vai ser bem útil. O símbolo que usamos quer lembrar o produto matriz, para não precisamos memorizar mais uma fórmula. Na nova notação é fácil ver que $\mathbf{a}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathbf{a}x + \beta \mathbf{a}y$ mostrando que $\mathbf{a}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ é linear. Assim temos verificado que cada uma matriz é uma transformação linear. E vice versa?

Escreve as colunas de uma matriz \mathbf{a} como lista, ou seja $f_{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n})$. Agora considere o operador linear $A_{f_{\mathbf{a}}}^{\mathcal{E}^n}$ definido em (4.1.3) e defina a aplicação

$$M(m \times n; \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), \quad \mathbf{a} \mapsto A_{f_{\mathbf{a}}}^{\mathcal{E}^n} \quad (4.2.2)$$

onde $\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de \mathbb{K}^n . Note que $A_{f_{\mathbf{a}}}^{\mathcal{E}^n} = \mathbf{a}$, com efeito

$$A_{f_{\mathbf{a}}}^{\mathcal{E}^n} e_i \stackrel{(*f_{\mathbf{a}})}{=} \mathbf{a}_{\bullet i} = \mathbf{a}e_i, \quad i = 1, \dots, n$$

e então lembre-se de UNICIDADE em Proposição 4.1.16.

Como a aplicação $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}$ é obviamente linear e injetivo, só falta sobrejetivo para ser um isomorfismo. Dado $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, coloque as listas $Ae_1, \dots, Ae_n \in \mathbb{K}^m$ como colunas de uma matriz, notação $[A]$.⁴ O leitor pode verificar que esta matriz $[A]$ é levado ao operador A , em símbolos $A_{f_{[A]}}^{\mathcal{E}^n} = A$. Isso prova sobrejetividade.⁵ Deixa nos formalizar esta idéia próximo.

⁴ Verifique que os membros da lista Ae_i são as entradas do vetor coordenada $[Ae_i]_{\mathcal{E}^m}$.

⁵ Alternativamente, vamos ver no futuro que, como as dimensões são iguais e finito, injetividade de uma TL é equivalente a sobrejetividade.

Aula 14

A matriz $[\cdot]$ de uma transformação linear $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$

Como temos visto acima que uma transformação linear $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ corresponde naturalmente, utilizando as bases canônicas

$$\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}, \quad \mathcal{E}^m = \{E_1, \dots, E_m\}$$

a uma matriz $[A] \in M(m \times n; \mathbb{K})$. Com efeito, seja $[Ae_i]_{\mathcal{E}^m} \in M(m \times 1; \mathbb{K})$ o vetor coordenada do elemento $Ae_i \in \mathbb{K}^m$, veja (3.1.2). Usando estes vetores coordenadas como colunas de uma matriz obtém-se

$$[A] = [A]_{\mathcal{E}^n, \mathcal{E}^m} := [[Ae_1]_{\mathcal{E}^m} \dots [Ae_n]_{\mathcal{E}^m}] \in M(m \times n; \mathbb{K})$$

chamado de **matriz da transformação linear $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ em respeito às bases canônicas**.

O caso geral de associar uma matriz $[A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$ a uma transformação linear $A : E \rightarrow F$ entre espaços vetoriais munidos de bases ordenadas $\mathcal{U} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ e $\mathcal{V} = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ será investigado em grande detalhe na Seção 7 depois tratar isomorfismos e inversas na Seção 5.3.1. Sim, as colunas de esta matriz serão os vetores coordenadas $[A\xi_i]_{\mathcal{V}}$.

Proposição 4.2.1. *A aplicação entre espaços vetoriais definido por*

$$\begin{aligned} [\cdot] &= [\cdot]_{\mathcal{E}^n, \mathcal{E}^m} : \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \rightarrow M(m \times n; \mathbb{K}) \\ A &\mapsto [[Ae_1]_{\mathcal{E}^m} \dots [Ae_n]_{\mathcal{E}^m}] \end{aligned}$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

Demonstração. Checar linearidade é rotina. *Injetivo.* Se as matrizes $[A] = [B]$ são iguais, os vetores coordenadas $[Ae_i]_{\mathcal{E}^m} = [Be_i]_{\mathcal{E}^m}$ são iguais, e assim as imagens $Ae_i = Be_i$ dos elementos da base são iguais. Assim $A = B$ segundo unicidade em Proposição 4.1.16. *Sobrejetivo.* Dado uma matriz \mathbf{a} , então a matriz do operador $A_{\mathbf{a}}^{\mathcal{E}^n}$, veja (4.2.2), é \mathbf{a} . \square

Exercício 4.2.2. Mostre que as entradas a_{ij} da matriz $\mathbf{a} := [A]$ satisfazem

$$Ae_i = E_1 a_{1i} + \dots + E_m a_{mi} =: \mathcal{E}^m \mathbf{a}_{\bullet i}$$

para cada um elemento e_i da base \mathcal{E}^n e onde $\mathcal{E}^m = \{E_1, \dots, E_m\}$.

Exemplo 4.2.3. Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ determinado por

$$A(1, 1) = (1, 2, 3) \quad \text{e} \quad A(-1, 1) = (1, 1, 1)$$

Pede-se a matriz \mathbf{a} de A relativamente às bases canônicas.

Uma solução. Denotamos de $\mathcal{E}^2 = \{e_1, e_2\}$ e $\mathcal{E}^3 = \{E_1, E_2, E_3\}$ as bases canônicas. Precisamos escrever Ae_1 e Ae_2 como CL's dos vetores E_1, E_2, E_3 e colocar os coeficientes como colunas da matriz desejada. Sabemos que

$$\begin{aligned} A(1, 1) &= (1, 2, 3) = (1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, 3) = E_1 + 2E_2 + 3E_3 \\ A(1, 1) &= A((1, 0) + (0, 1)) = A(e_1 + e_2) = Ae_1 + Ae_2 \end{aligned}$$

e

$$A(-1, 1) = (1, 1, 1) = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = E_1 + E_2 + E_3$$

$$A(-1, 1) = A((-1, 0) + (0, 1)) = A(-e_1 + e_2) = -Ae_1 + Ae_2$$

Assim temos 2 equações lineares inhomogêneas para as 2 incógnitas $x := Ae_1$ e $y := Ae_2$, com efeito

$$\begin{cases} x + y = E_1 + 2E_2 + 3E_3 \\ -x + y = E_1 + E_2 + E_3 \end{cases}$$

Aplicamos escalonamento, adicionando a primeira equação para a segunda obtemos $2y = 2E_1 + 3E_2 + 4E_3$ e assim a CL

$$y = E_1 + \frac{3}{2}E_2 + 2E_3$$

cujas coeficientes formam a **segunda** ($y = Ae_2$) coluna da matriz $\mathbf{a} := [A]$. Use na primeira equação para receber os coeficientes da primeira coluna, ou seja

$$x = -y + (E_1 + 2E_2 + 4E_3) = 0E_1 + \frac{1}{2}E_2 + 1E_3$$

Então a matriz é a seguinte

$$\mathbf{a} = [A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Com certeza, vai ter outros caminhos como resolver. Acima vemos um.

Exercício 4.2.4. Tem-se uma transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$A(1, 2) = (1, 1, 1, -1) \quad \text{e} \quad A(3, 4) = (1, 1, 1, 1)$$

Pede-se a matriz \mathbf{a} de A relativamente às bases canônicas.

Exercício 4.2.5 (Vetores linha e coluna). a) Mostre que a matriz de um funcional linear $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^* := \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é **uma linha** (matriz $1 \times n$) da forma

$$[\varphi] = [\varphi e_1 \quad \dots \quad \varphi e_n]$$

b) Mostre que a matriz de uma reta no \mathbb{R}^n passando a origem, ou seja $R \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, é **uma coluna** (matriz $n \times 1$) da forma

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

Lema 4.2.6 (Na dimensão 1 operadores correspondem a escalares). *Seja $\dim E = 1$ e $A \in \mathcal{L}(E)$, então existe um único escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que o operador corresponde a multiplicação com α , em símbolos $A = \alpha I_E$.*

Demonstração. Pegue um elemento não-nulo $\xi \in E$. Então $\mathcal{B} := \{\xi\}$ é uma base de E : Com efeito é LI como $\xi \neq \mathcal{O}$, segundo Comentário 1.3.7 (ii), mas LI é equivalente a gera segundo Corolário 3.1.19. Como \mathcal{B} é base com um elemento só, todo elemento de E é uma CL em $\{\xi\}$, assim um múltiplo escalar de ξ com coeficiente único. Então $E \ni A\xi = \alpha\xi$ para um único $\alpha \in \mathbb{K}$.

Analogamente todo $w \in E$ é da forma $w = \lambda\xi$ para um único $\lambda \in \mathbb{K}$. Segue que

$$Aw = A(\lambda\xi) = \lambda A\xi = \lambda(\alpha\xi) = (\lambda\alpha)\xi = (\alpha\lambda)\xi = \alpha(\lambda\xi) = \alpha w = \alpha I_E w$$

onde usamos vários axiomas do espaço vetorial. Isso prova que $A = \alpha I_E$. \square

4.3 Dimensão dois – o plano

No plano Π queremos estudar três tipos elementares de transformações lineares, nomeadamente

- rotação R_θ por um ângulo θ em torno de um centro O no plano
- projecção ortogonal P_L sobre uma reta L no plano
- reflexão S_L em torno de uma reta L no plano

Mas o plano Π é composto de pontos... Como pode-se dar Π a estrutura de um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais \mathbb{R} ? Como pode-se adicionar pontos ou multiplicar por números? Não da.

Mas pode-se adicionar flechas v no plano se consideramos iguais todas as flechas do mesmo comprimento e direção, veja Exemplo 0.0.1. Mais detalhado duas flechas são consideradas iguais se formam os lados opostos de um paralelogramo no qual os outros dois lados conectam, respectivamente, os dois pontos iniciais e os dois pontos terminais. Multiplicação de uma flecha v com um número real α muda o comprimento pelo fator α , trocando a direção caso $\alpha < 0$ é negativo. Adicionamos duas flechas pondo no ponto termino da primeira flecha o ponto inicial da segunda, veja Figura 1 na introdução do manuscrito.

Definição 4.3.1 (O espaço vetorial Π_O das flechas no plano de ponto início O). Para eliminar a complicação que, dado uma flecha v , todo ponto $p \in \Pi$ nos dá uma flecha equivalente (escolhendo p como ponto início), vamos fixar um ponto do plano, notação $O \in \Pi$. Neste caso todo ponto $p \in \Pi$ representa uma flecha só: por definição a flecha correndo de O a p . Vice versa, cada uma flecha em Π é equivalente a uma iniciando no ponto O . Seja

$$\Pi_O := (\Pi, O)$$

o conjunto das flechas no plano Π com ponto início O . Identificamos tal flecha com seu ponto termino $p \in \Pi$. Escrevendo $p \in \Pi$ significa que p é um ponto do

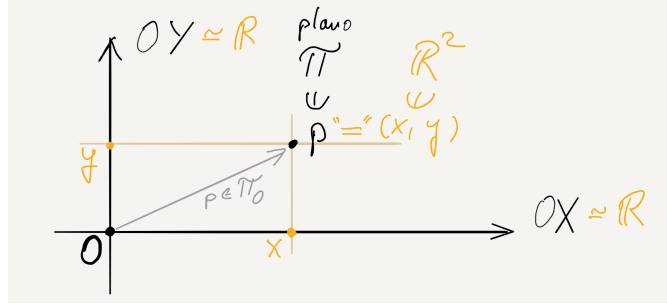


Figura 4.1: Sistema ortogonal de coordenadas OXY no plano Π

plano, escrevendo $p \in \Pi_O$ significa que p é a flecha correndo de O a p . Para Π_O pode-se verificar os axiomas de um espaço vetorial real sob multiplicação escalar αp definida como mudando o comprimento da flecha com ponto termino p pelo fator $\alpha \in \mathbb{R}$ e adição $p + q$ definida pelo paralelogramo gerado, veja Figura 4.3.

Comentário 4.3.2. Note-se que são em bijeção o conjunto Π_O das flechas no plano Π iniciando no ponto O e o conjunto F no Exemplo 0.0.1 cujos elementos são flechas v no plano junto com todas flechas equivalentes a v . Adição e multiplicação escalar coincidem. Assim os espaços vetoriais F e Π_O são isomorfos.

Comentário 4.3.3 (Sistema de coordenadas ortogonal OXY). Escolhendo no plano Π dois eixos OX e OY ortogonal um ao outro, notação OXY , recebemos uma bijeção linear

$$\Pi_O \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto (x, y)$$

como definida em (0.0.1) e ilustrada na Figura 4.1.

4.3.1 Rotações

Seja Π_O o plano Π junto com um ponto $O \in \Pi$ fixado. Suponha que podemos medir distancia no plano, assim ângulos entre semi-retas do mesmo ponto inicial. Para os elementos $p \in \Pi_O$ (pontos do plano interpretado simultaneamente como flecha de O ao ponto), denotamos de

- C_p o círculo com centro O e passando p , veja Figura 4.2
- ℓ_p a semi-reta iniciando em O e passando p (se $p = O$ seja $\ell_O := \{O\}$)
- $\ell_p(\theta)$ a semi-reta obtida pela rotação de ℓ_p em torno O pelo ângulo θ no sentido contra-horário

Definição 4.3.4 (Rotação). A aplicação definida por

$$R_\theta : \Pi_O \rightarrow \Pi_O, \quad p \mapsto \ell_p(\theta) \cap C_p$$

é chamado de **rotação** no plano Π em torno de O por o ângulo θ .

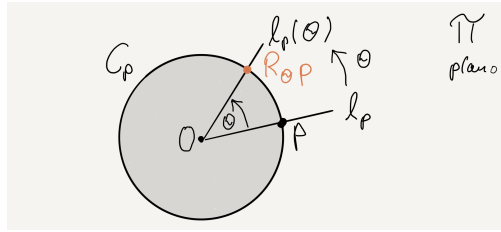


Figura 4.2: Rotação R_θ no plano Π em torno do ponto O por um ângulo θ

Comentário 4.3.5 (Preservação de comprimento e ângulos). Como o resultado da rotação é localizado no mesmo círculo a distância de O fica constante. O ângulo φ entre duas flechas $p, q \in \Pi_O$ fica constante se aplicamos a rotação R_θ pelo *mesmo* ângulo θ em ambas flechas. aplicar a rotação R_θ pelo mesmo ângulo θ em ambas flechas, veja Figura 4.3.

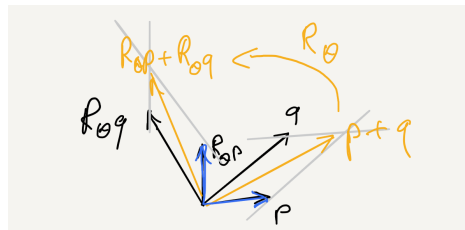


Figura 4.3: Preservação de ângulos

Lema 4.3.6. Dado um ângulo θ , a rotação $R_\theta : \Pi_O \rightarrow \Pi_O$ é linear.

Demonstração. Lembre que os elementos $p \in \Pi_O$ são pontos do plano visto como flechas de O a p . O comprimento da flecha é a distancia dos ponto p e O . Dado p , denotamos ambos, **comprimento da flecha** e **distancia de O** , com o símbolo $|p|$.

PRESERVAÇÃO DE COMPRIMENTO \Rightarrow MULTIPLICATIVO. Dado um ponto p e um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $p = O$ ou $\alpha = 0$ temos $R_\theta(\alpha p) = R_\theta(O) = O = \alpha R_\theta(p)$. Seja então $p \neq O$ e $\alpha \neq 0$. Segundo preservação de comprimento obtemos

$$\frac{|R_\theta(\alpha p)|}{|R_\theta(p)|} = \frac{|\alpha p|}{|p|} = \pm \alpha \quad \text{então} \quad |R_\theta(\alpha p)| = \pm \alpha |R_\theta(p)|$$

onde o sinal em $+/- \alpha$ depende se α é positivo/negativo.

Resta eliminar os absolutos. No caso $\alpha > 0$ os pontos αp e p estão na mesma semi-reta, mas rotação preserva esta propriedade, assim $R_\theta(\alpha p) = \alpha R_\theta(p)$. No caso $\alpha < 0$ os pontos αp e p estão em semi-retas opostas. Rotação também preserva esta propriedade, assim $R_\theta(\alpha p)$ e $R_\theta(p)$ são múltiplos negativos um do outro. Como $|R_\theta(\alpha p)| = -\alpha |R_\theta(p)|$ segue que $R_\theta(\alpha p) = \alpha R_\theta(p)$.

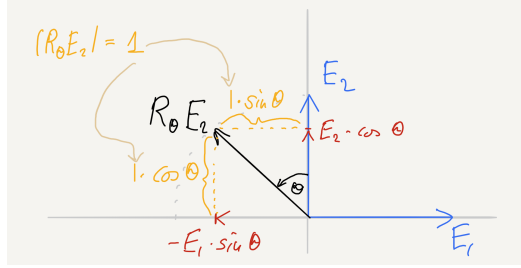


Figura 4.4: Rotação do vetor unitário – coeficientes formam coluna 2 da matriz

PRESERVAÇÃO DE ÂNGULOS \Rightarrow ADITIVO. Dado pontos p, q , considere o paralelogramo definindo a soma $p + q$. Aplicando a rotação sabemos que $R_\theta p$ e $R_\theta q$ formam o mesmo ângulo como p e q . Então o paralelogramo gerado por $R_\theta p$ e $R_\theta q$ resulta daquele gerado por p e q através de aplicar R_θ . Mas assim a diagonal $R_\theta p + R_\theta q$ resulta de aplicar R_θ à diagonal $p + q$ do paralelogramo original, em símbolos $R_\theta p + R_\theta q = R_\theta(p + q)$. \square

A matriz da rotação num sistema ortogonal de coordenadas

Conforme a definição de eixo, veja Comentário 0.0.3, o vetor unitário no eixo OX é a flecha correndo de O ao ponto X , notação E_1 . Analogamente denotamos de E_2 o vetor unitário no eixo OY .

Por definição a matriz \mathbf{r}_θ da rotação R_θ em respeito à base $\mathcal{E} := \{E_1, E_2\}$ contem como colunas os coeficientes (veja Figura 4.4) de

$$R_\theta E_1 = E_1 \cos \theta + E_2 \sin \theta, \quad R_\theta E_2 = -E_1 \sin \theta + E_2 \cos \theta$$

Lema 4.3.7. *A matriz da rotação pelo ângulo θ é a matriz real*

$$\mathbf{r}_\theta := [R_\theta]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

Lembramos que o sistema ortogonal de coordenadas disponibiliza uma correspondência $\Pi_O \simeq \mathbb{R}^2$ na qual a base $\{E_1, E_2\}$ corresponde à base canônica $\mathcal{E}^2 = \{e_1, e_2\}$. Obviamente é mais confortável trabalhar com as listas de \mathbb{R}^2 como com as flechas de Π_O . Assim vamos trabalhar no futuro com \mathbb{R}^2 .

4.3.2 Projeção ortogonal sobre uma reta

Trabalhamos no plano identificado com \mathbb{R}^2 mediante um sistema ortogonal de coordenadas.

Definição 4.3.8 (Projeção ortogonal). Seja $a \in \mathbb{R}$ uma constante e seja $L_a := \mathbb{R}(1, a)$ a reta no \mathbb{R}^2 passando a origem $\mathcal{O} = (0, 0)$ e o ponto $(1, a)$ como ilustrado

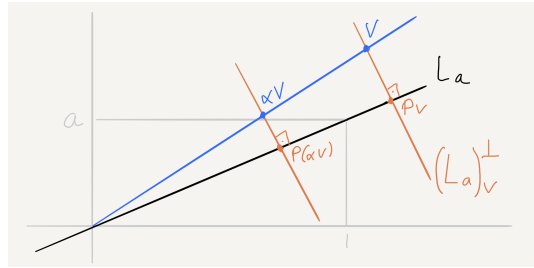


Figura 4.5: Projeção ortogonal P sobre a reta L_a

na Figura 4.5. Para um elemento $v \in \mathbb{R}^2$ seja $(L_a)_v^\perp$ a reta ortogonal a L_a e passando o ponto v . Então a aplicação que leva v à interseção das duas retas

$$P = P_{L_a} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto L_a \cap (L_a)_v^\perp \quad (4.3.2)$$

é chamado de **projeção ortogonal** sobre a reta L_a .

Lema 4.3.9. A projeção ortogonal $P = P_{L_a} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é linear.

Demonstração. MULTIPLICATIVO. Similarmente como na prova de Lema 4.3.4 discrimina-se três casos $\alpha < 0$, ($\alpha = 0$ ou $v = \mathcal{O}$), e $\alpha > 0$. Vamos tratar o caso $\alpha > 0$ e deixar os outros ao leitor. Para $\alpha > 0$ e $v \neq \mathcal{O}$ obtemos

$$\frac{|v|}{|Pv|} = \frac{|\alpha v|}{|P\alpha v|} = \frac{\alpha|v|}{|P\alpha v|}$$

onde temos usado o Teorema do Raio na primeira igualdade. Como $|v| \neq 0$ segue, cortando $|v|$, que $|P\alpha v| = \alpha|Pv|$. Como $P\alpha v$ e Pv são elementos da mesma ($\alpha > 0$) semi-reta de L_a , obtém-se $P\alpha v = \alpha Pv$.

ADITIVO. A identidade $P(v + w) = Pv + Pw$ resulta da Figura 4.6. \square

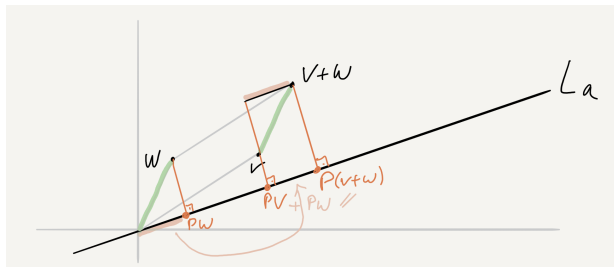
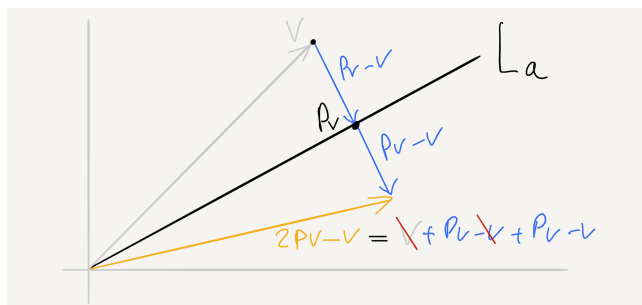


Figura 4.6: A identidade $P(v + w) = Pv + Pw$

Figura 4.7: Reflexão $S = 2P - I$ em torno da reta L_a

A matriz da projeção ortogonal

Trabalhamos no plano identificado com \mathbb{R}^2 mediante um sistema ortogonal de coordenadas.

Lema 4.3.10. A matriz da projeção ortogonal sobre a reta L_a é dada por

$$\mathbf{p}_a := [P_{L_a}] = \frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix} \quad (4.3.3)$$

Demonstração. Lema A.4.1 □

4.3.3 Reflexão em torno de uma reta

Trabalhamos no plano identificado com \mathbb{R}^2 mediante um sistema ortogonal de coordenadas.

Definição 4.3.11 (Reflexão). Dado $a \in \mathbb{R}$, a aplicação definida assim

$$S = S_{L_a}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ v \mapsto v + 2(P_{L_a}v - v)$$

é chamado de **reflexão** em torno da reta L_a . Note que $S = 2P - I$ é linear.

Use Proposição 4.2.1 e a matriz de P para obter a **matriz da reflexão** em torno da reta L_a , com efeito

$$\mathbf{s}_a := [S_{L_a}] = 2\mathbf{p}_a - \mathbf{1} = \frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & -(1-a^2) \end{bmatrix} \quad (4.3.4)$$

Exercício 4.3.12 (Rotação, projeção, reflexão).

- Sejam $R, P, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ respectivamente a rotação de 30° em torno da origem, a projeção ortogonal sobre a reta $y = \frac{1}{3}x$ (notação $L_{\frac{1}{3}}$) e a reflexão em torno da mesma reta.

Dado o vetor $v = (2, 5)$, determine suas imagens Rv, Pv, Sv .

2. Considere os operadores lineares $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$R = R_{30^\circ}, \quad S = S_{L_2}, \quad P = P_{L_2}.$$

- (a) Mostre que se tem $PS = SP = P$.
- (b) Verifique a igualdade $RSR = S$.
- (c) Mostre que R não comuta com S nem com P .
- (d) Determine todos os vetores v tais que $RPv = 0$ e $RPv \neq 0$.

4.4 Produto de transformações lineares

Capítulo 5

Núcleo e imagem

No Capítulo 5 denotamos de E, F espaços vetoriais

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K}), \quad F = (F, +, \cdot, \mathbb{K})$$

ambos sobre o mesmo corpo \mathbb{K} , e denotamos de $A: E \rightarrow F$ uma transformação linear. Na primeira leitura pense em $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. As letras m, n denotam números naturais ou zero.

O primeiro objetivo no Capítulo 5 é associar a uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$ dois subespaços

$$N(A) \subset E \xrightarrow{A} F \supset \text{Im}(A)$$

e relacionar seu tamanho mínimo/máximo a injetividade/sobrejetividade de A . Outros resultados fundamentais são os seguintes: Uma transformação linear A é injetiva se e somente se leva conjuntos LI em conjuntos LI. Sobrejetividade é equivalente à existência de uma inversa à direita e injetividade à existência de uma inversa à esquerda.

Definição 5.0.1. Dado uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$ chamamos

$$N(A) := \{v \in E \mid Av = \mathcal{O}\} \text{ o } \mathbf{núcleo} \text{ de } A \text{ e}$$

$$\text{Im}(A) := \{Av \mid v \in E\} \text{ a } \mathbf{imagem} \text{ de } A$$

Dado um subconjunto $X \subset E$, seja $AX := \{Ax \mid x \in X\}$ a imagem de X sob A .

Lema 5.0.2. Os subconjuntos $N(A) \subset E$ e $\text{Im}(A) \subset F$ são subespaços.

Demonstração. “ $\text{Im}(A)$ fechado sob $+$ ”: Dado dois elementos da imagem, ou seja Av e Aw onde $v, w \in E$, então de linearidade $Av + Aw = A(v + w) \in \text{Im}(A)$.

“ $\text{Im}(A)$ fechado sob \cdot ”: Se $\alpha \in \mathbb{K}$ e $Av \in \text{Im}(A)$, então $\alpha Av = A(\alpha v) \in \text{Im}(A)$. Deixamos ao leitor provar que $N(A)$ é fechado sob \cdot e $+$. \square

Lema 5.0.3 (Os dois subespaços naturais – mínimo e máximo). *Para uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$ injetividade e sobrejetividade correspondem a*

- (i) $N(A) = \{\mathcal{O}\} \Leftrightarrow A \text{ é injetivo}$
(ii) $\text{Im}(A) = F \Leftrightarrow A \text{ é sobrejetivo}$

Demonstração. (i) “ \Leftarrow ” ‘ \subset ’ Seja $v \in N(A)$, então $Av = \mathcal{O} = A\mathcal{O}$ onde temos usado linearidade no segundo passo. Então segundo injetividade como as imagens são iguais, os elementos $v = \mathcal{O}$ devem ser iguais. ‘ \supset ’ Como subespaço $N(A)$ contem o vetor nulo. “ \Rightarrow ” Suponha que são iguais as imagens $Av = Aw$ de dois elementos $v, w \in E$. Então $\mathcal{O} = Av - Aw = A(v - w)$, e assim $v - w \in N(A) = \{\mathcal{O}\}$. Então $v = w$.

(ii) “ \Leftarrow ” ‘ \subset ’ trivial. ‘ \supset ’ Dado $f \in F$, como A é sobrejetivo existe um $v \in E$ tal que $f = Av$. Assim $f \in \text{Im}(A)$. “ \Rightarrow ” Seja $f \in F = \text{Im}(A)$, ou seja $f = Av$ para um $v \in E$, mostrando que A é sobrejetivo. \square

Lema 5.0.4. *Seja $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e $X \subset E$, então*

$$\langle X \rangle = E \Rightarrow \langle AX \rangle = \text{Im}(A)$$

Demonstração. ‘ \subset ’ Sem usar $\langle X \rangle = E$, um elemento $f \in \langle AX \rangle$ é da forma de uma soma finita $f = \sum \alpha_i Ax_i = A \sum \alpha_i x_i \in \text{Im}(A)$ onde $x_i \in X$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$. ‘ \supset ’ Um elemento $f \in \text{Im}(A) = AE = A\langle X \rangle$ é da forma de uma soma finita $f = A \sum \alpha_i x_i = \sum \alpha_i Ax_i \in \langle AX \rangle$ onde $x_i \in X$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$. \square

Como $\text{Im}(A) \subset F$ é um subespaço já sabemos de Teorema 3.2.1 que sua dimensão não é maior daquela de F . É uma surpresa que isso vale para $\dim E$ também. Este fato será utilizado no famoso Teorema 5.4.1 de núcleo e imagem.

Corolário 5.0.5. $\forall A \in \mathcal{L}(E, F)$ vale $\dim \text{Im}(A) \leq \dim E$.

Demonstração. Se $\dim E = \infty$ não tem nada a provar. No caso $n = \dim E \in \mathbb{N}_0$ seja $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ uma base de E . Como $\langle \mathcal{B} \rangle = E$ temos $\langle A\mathcal{B} \rangle = \text{Im}(A)$ segundo Lema 5.0.4. Nas outras palavras, o conjunto finito $A\mathcal{B} = \{A\xi_i \mid i = 1, \dots, n\}$ de $m \leq n$ elementos (possivelmente uns $A\xi_i$'s são iguais) gera o espaço vetorial $\text{Im}(A)$. Então $\dim \text{Im}(A) \leq m \leq n = \dim E$ segundo Lema 3.1.21. \square

Exercício 5.0.6. Defina operadores lineares $A, B : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ como

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \dots) \\ B(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (x_2 - 2x_1, x_3 - 2x_2, \dots). \end{aligned}$$

Determine o núcleo e a imagem de A e de B .

Exemplo 5.0.7 (SL). Dada uma matriz $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K})$ e uma lista $b \in \mathbb{K}^m$. São equivalente os seguintes:

O sistema linear (SL) de m equações a n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

admite uma solução $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.

$\stackrel{(1.2.6)}{\iff}$ O vetor b é CL das colunas $\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}$ da matriz \mathbf{a} ; veja (1.2.3)

$\stackrel{2}{\iff}$ $b \in \text{Im}(\mathbf{a})$ considerando a matriz como transformação linear $\mathbf{a}: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$

$\stackrel{3}{\iff}$ $\langle \{\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}, b\} \rangle = \langle \{\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}\} \rangle$

Equivalência 2: Isso é o fato que a imagem de uma matriz é o espaço-coluna, ou seja o conjunto de todas as CLs das colunas da matriz.

Equivalência 3: “ \Rightarrow ” Se b é CL das colunas a igualdade é trivial. Caso geral: Como as colunas $\{\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}\}$ geram $\text{Im}(\mathbf{a})$, $b \in \text{Im}(\mathbf{a})$, e $\text{Im}(\mathbf{a})$ é um subespaço obtemos a primeira identidade

$$\langle \{\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}, b\} \rangle = \text{Im}(\mathbf{a}) = \langle \mathbf{a}\mathcal{E}^n \rangle = \langle \underbrace{\{\mathbf{a}e_1, \dots, \mathbf{a}e_n\}}_{\mathbf{a}_{\bullet 1} \quad \mathbf{a}_{\bullet n}} \rangle$$

Identidade dois segue do Lema 5.0.4 com a base canônica \mathcal{E}^n de \mathbb{K}^n .

“ \Leftarrow ” A identidade fala que b é CL das colunas $\mathbf{a}_{\bullet i} = \mathbf{a}e_i \in \text{Im}(\mathbf{a})$, então $b \in \text{Im}(\mathbf{a})$ porque $\text{Im}(\mathbf{a})$ é um subespaço e assim fechado sob adição.

Exercício 5.0.8. Seja $A: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:

$$(x, y, z, t) \mapsto (x + y + z + 2t, x - y + 2z, 4x + 2y + 5z + 6t).$$

Encontre $b \in \mathbb{R}^3$ que não pertença à imagem de A . Com b , exiba um sistema linear de 3 equações e 4 incógnitas sem solução.

5.1 Sobrejetividade – inversa à direita

Definição 5.1.1. Dado $A \in \mathcal{L}(E, F)$, uma transformação linear $B \in \mathcal{L}(F, E)$ é chamado de *uma inversa à direita de A* se a composição satisfaz $AB = I_F$.

Exemplo 5.1.2 (Geralmente inversas à direita não são únicas). Seja $a \in \mathbb{R}$ e

$$A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x, y), \quad B_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, ax).$$

Então $AB_a = I_{\mathbb{R}^2}$ para cada um $a \in \mathbb{R}$, mas $B_a \neq B_b$ caso $a \neq b$.

Teorema 5.1.3. *Suponha $A \in \mathcal{L}(E, F)$ onde $m := \dim F < \infty$. Então*

$$A \text{ admite uma inversa à direita} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ sobrejetivo}$$

Demonstração. “ \Rightarrow ” Dado uma inversa à direita B de A , então $\forall f \in F$ vale $ABf = I_F f = f$. Assim para todo $f \in F$ existe um $v \in E$, com efeito $v := Bf$, tal que $Av = f$. Mas isso significa que A é sobrejetivo.

“ \Leftarrow ” Usamos sobrejetividade de A para construir explicitamente uma inversa à direita de A . Escolha uma base ordenada $\mathcal{Y} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ de F e, usando sobrejetividade, uma lista $v = (v_1, \dots, v_m)$ de m elementos de E tal que $Av_j = \eta_j$ para $j = 1, \dots, m$. Lembremos de (4.1.4) que a lista v nos dá uma transformação

linear $B_v : F \rightarrow E$ unicamente determinado pelos valores $B_v \eta_j := v_j$ nos membros da base \mathcal{Y} . Resta checar $AB_v = I_F$: Escrevendo $f \in F$ como CL única na base \mathcal{Y} , ou seja $f = \sum_j \beta_j \eta_j$, e usando linearidade de B_v e de A obtemos

$$AB_v f = AB_v \sum_j \beta_j \eta_j = A \sum_j \beta_j \underbrace{B_v \eta_j}_{v_j} = \sum_j \beta_j A v_j = \sum_j \beta_j \eta_j = f$$

Note-se a soma é finita porque temos exprimido f como uma CL. \square

Exercício 5.1.4. (a) Mostre que $\{0\}$ e o próprio \mathbb{R} são os únicos subespaços de \mathbb{R} .

(b) Seja E um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{R} . Mostre que $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ é sobrejetivo ou igual a zero.

(c) Mostre que a derivação $D : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, $p(x) \mapsto \frac{d}{dx} p(x)$, é sobrejetiva.

(d) Mostre que a derivação $D : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$, $f(x) \mapsto \frac{d}{dx} f(x)$, é sobrejetiva.

(e) Encontre uma inversa à direita $J : \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ para a derivação D em iii).

5.2 Injetividade – inversa à esquerda

Teorema 5.2.1. *Dada uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$, então*

$$A \text{ injetivo} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ leva conjuntos LI em conjuntos LI}$$

Demonstração. “ \Rightarrow ” Seja A injetivo e $X \subset E$ um subconjunto LI. Pegue elementos $Ax_1, \dots, Ax_\ell \in AX$ na imagem e suponha que uma CL deles representa o vetor nulo, ou seja $\mathcal{O} = \alpha_1 Ax_1 + \dots + \alpha_\ell Ax_\ell = A(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_\ell x_\ell)$ onde os α_i 's são escalares. Como A é injetivo, equivalentemente $N(A) = \{\mathcal{O}\}$ segundo Lema 5.0.3, segue que $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_\ell x_\ell = \mathcal{O}$. Como X é LI segue que $\alpha_1 = \dots = \alpha_\ell = 0$ e isso prova que o subconjunto $AX \subset F$ é LI.

“ \Leftarrow ” Seja $v \in E$. Se $v \neq \mathcal{O}$, então o subconjunto $\{v\} \subset E$ é LI segundo Comentário 1.3.7 (ii). Assim $\{Av\} \subset F$ é LI como A leva LI em LI segundo hipótese. Assim o vetor Av não pode ser nulo. Temos provado $v \neq \mathcal{O} \Rightarrow Av \neq \mathcal{O}$. O contra-positivo então diz que $Av = \mathcal{O} \Rightarrow v = \mathcal{O}$. Assim $N(A) = \{\mathcal{O}\}$. \square

Corolário 5.2.2. *Se $A \in \mathcal{L}(E, F)$ é injetivo, então $\dim E \leq \dim F$.*

Demonstração. Se $\dim F = \infty$ não tem nada a provar. Seja $m := \dim F \in \mathbb{N}_0$. Seja $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ um subconjunto LI de E , então como A leva LI em LI segundo Teorema 5.2.1, o conjunto $AB = \{Av_1, \dots, Av_k\}$ é LI em F e por isso (Corolário 3.1.18) não pode conter mais elementos como $\dim F$, em símbolos $k := |B| = |AB| \leq m$. (Como A é injetivo vale $|B| = |AB|$.) Analogamente

à prova da parte (a) de Teorema 3.2.1 um subconjunto $B_* \subset E$ LI com o número máximo $n (\leq m)$ de elementos gera E e assim é uma base de E . Assim $\dim E := |B_*| = n \leq m := \dim F$. \square

Exemplo 5.2.3 (Aplicação). Não existe nenhuma transformação linear $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a qual é injetiva.

Definição 5.2.4. Dado $A \in \mathcal{L}(E, F)$, uma transformação linear $B \in \mathcal{L}(F, E)$ é chamado de *uma inversa à esquerda de A* se a composição satisfaz $BA = I_E$.

Exemplo 5.2.5 (Geralmente inversas à esquerda não são únicas). Seja $a \in \mathbb{R}$ e

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, 0), \quad B_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + az, y).$$

Então $B_a A = I_{\mathbb{R}^2}$ para cada um $a \in \mathbb{R}$, mas $B_a \neq B_b$ caso $a \neq b$.

Teorema 5.2.6. *Suponha $A \in \mathcal{L}(E, F)$ onde $\dim E, \dim F < \infty$. Então*

$$A \text{ admite uma inversa à esquerda } B \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ injetivo}$$

Demonstração. “ \Rightarrow ” Se $Au = Av$, então $BAu = BAv$. Mas $BA = I$, daí $u = v$. “ \Leftarrow ” Como a dimensão $n := \dim E$ é finita, escolha uma base $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ de E . Baseado na injetividade de A , segundo Teorema 5.2.1, o conjunto das imagens $\{A\xi_1, \dots, A\xi_n\}$ é LI em F e pode ser estendido, segundo Teorema 3.2.1 (b) usando $\dim F < \infty$, para obter a base $\mathcal{B} := \{A\xi_1, \dots, A\xi_n, \eta_1, \dots, \eta_k\}$ de F . A lista $w := (\xi_1, \dots, \xi_n, \mathcal{O}, \dots, \mathcal{O}) \in E^{\times(n+k)}$ determina $B_w \in \mathcal{L}(F, E)$ segundo (4.1.4), ou seja $B_w(A\xi_i) := \xi_i$ e $B_w\eta_j := \mathcal{O}$. Escreve $v \in E$ como CL única $v = \sum_i \alpha_i \xi_i$. Então usando linearidade de A e de B_w obtemos

$$B_w Av = B_w A \sum_i \alpha_i \xi_i = \sum_i \alpha_i \underbrace{B_w A \xi_i}_{\xi_i} = v = I_E v$$

para cada um $v \in E$. \square

Exercício 5.2.7. Determine uma base para a imagem de cada uma das transformações lineares abaixo e indique quais são sobrejetivas.

(a) $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - y, x - y)$;

(b) $B : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, (x, y, z, t) \mapsto (x + y, z + t, x + z, y + t)$;

(c) $C : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (x + \frac{1}{2}y, y + \frac{1}{2}z, z + \frac{1}{2}x)$;

(d) $D : M(2 \times 2) \rightarrow M(2 \times 2), X \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X$;

(e) $E : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_{n+1}(\mathbb{R}), p = p(x) \mapsto xp$.

5.3 Bijetividade – inversa

Definição 5.3.1 (Inversa). Chama-se uma transformação linear $A : E \rightarrow F$ de **invertível** se A admite uma inversa à esquerda $B \in \mathcal{L}(F, E)$ e uma inversa à direita $C \in \mathcal{L}(F, E)$. Neste caso $B = C$,¹ denotado A^{-1} , é dito **a inversa** de A .

Exercício 5.3.2. Sejam $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e $B \in \mathcal{L}(F, G)$ invertíveis, mostre que

- a inversa de A (se existasse) é única
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$ para escalares não-nulos $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$

5.3.1 Isomorfismos

Definição 5.3.3 (Isomorfismo). Um **isomorfismo** (entre E e F) é uma transformação linear $A : E \rightarrow F$ a qual é bijetiva (injetivo e sobrejetivo). Neste caso se diz que E e F são espaços vetoriais **isomorfos**, símbolo $E \simeq F$.

Para aplicações gerais bijetividade é equivalente a existência da aplicação inversa (a qual claramente herda bijetividade). É interessante observar que se a aplicação bijetiva é linear a aplicação inversa não só existe mas herda linearidade.

Proposição 5.3.4. *Seja $A \in \mathcal{L}(E, F)$, então*

$$A \text{ isomorfismo} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ é invertível}$$

Demonstração. “ \Rightarrow ” Definimos o candidato B para ser a inversa de A assim

$$B : F \rightarrow E, \quad f \mapsto Bf := v \tag{5.3.1}$$

onde v é o único elemento de E com $Av = f$ (existência: A sobrejetivo, unicidade: A injetivo). A aplicação definida B é linear: Sejam $f, g \in F$, denotamos $v := Bf$ e $w := Bg$. Então $Av = f$ e $Aw = g$ e como A é linear obtemos $A(v+w) = Av + Aw = f + g$, então $B(f+g) = v+w = Bf + Bg$. Deixamos ao leitor verificar que $B(\alpha f) = \alpha Bf$. Também tem a propriedade de ser inversa à direita e esquerda, com efeito para $v \in E$ denota $f := Av$, então

$$ABf = Av = f, \quad BAv = Bf = v$$

“ \Leftarrow ” Suponha que A admite a inversa $A^{-1} : F \rightarrow E$. Então A^{-1} é inversa à direita e à esquerda de A . Assim A é sobrejetivo e injetivo segundo os Teoremas 5.1.3 e 5.2.6. Mas bijetivo e linear significa isomorfismo. \square

Corolário 5.3.5. *Dado isomorfismos $E \xrightarrow{A} F \xrightarrow{B} G$, então composição BA e múltiplos αA são isomorfismos para todos os escalares não-nulos $\alpha \neq 0$.*

¹ Com efeito $B = BI_F = B(AC) = (BA)C = I_EC = C$.

Demonstração. Proposição 5.3.4 e Exercício 5.3.2. \square

Exercício 5.3.6 (Isomorfismo é relação de equivalência). Mostre que isomorfismo ' \simeq ' é uma **relação de equivalência** no conjunto de todos os espaços vetoriais: ou seja, mostre que são satisfeitos os três axiomas seguintes

$$E \simeq E \text{ para cada um espaço vetorial} \quad (\text{reflexividade})$$

$$E \simeq F \Rightarrow F \simeq E \quad (\text{simetria})$$

$$E \simeq F \text{ e } F \simeq G \Rightarrow E \simeq G \quad (\text{transitividade})$$

Teorema 5.3.7. *Dada uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$, então*

$$A \text{ bijetiva (isomorfismo)} \Leftrightarrow A \text{ leva uma base de } E \text{ numa base de } F$$

Demonstração. " \Rightarrow " Seja A um isomorfismo e \mathcal{B} uma base de E . Resta mostrar que o conjunto $A\mathcal{B}$ é LI e gera F . LI segue de Teorema 5.2.1 (uma TL injetiva A leva LI em LI) e como \mathcal{B} gera E o Lema 5.0.4 diz que $\langle A\mathcal{B} \rangle = \text{Im}(A) = F$ onde a segunda identidade é a sobrejetividade de A .

" \Leftarrow " Dado um base \mathcal{B} de E , então $A\mathcal{B}$ é uma base de F segundo a hipótese. A INJETIVO ($N(A) = \{\mathcal{O}\}$): Suponha $v \in E$ e $Av = \mathcal{O}$. Escrevemos v como CL $v = \sum_{i=1}^{k(v)} \alpha_i \xi_i$ de elementos ξ_i da base \mathcal{B} . Então

$$\mathcal{O} = Av = A \sum_i \alpha_i \xi_i = \sum_i \alpha_i \underbrace{A\xi_i}_{\in A\mathcal{B}}$$

Como $A\mathcal{B}$ é um conjunto LI todos os coeficientes $\alpha_i = 0$ se anulam. Assim $v = \mathcal{O}$ o que mostra que $N(A) = \{\mathcal{O}\}$.

A SOBREJETIVO: Segundo hipótese $A\mathcal{B}$ é uma base de F . Dado $f \in F$, escrevemos f como CL $f = \sum_{j=1}^{\ell(f)} \beta_j A\xi_j$ de elementos $A\xi_j$ da base $A\mathcal{B}$. O elemento de E definido por $v := \sum_j \beta_j \xi_j$ satisfaz $Av = A \sum_j \beta_j \xi_j = \sum_j \beta_j A\xi_j = f$. \square

Corolário 5.3.8. *Um espaço vetorial E sobre um corpo \mathbb{K} e de dimensão $n \in \mathbb{N}_0$ é isomorfo a \mathbb{K}^n .*

Demonstração. Escolha uma base $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ de E e defina a aplicação $A : \mathbb{K}^n \rightarrow E$ na forma $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$. Note-se que A é linear e que $Ae_j = A(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = 1 \cdot \xi_j = \xi_j$. Assim A leva a base canônica $A\mathcal{E}^n = \mathcal{B}$ na base \mathcal{B} , então A é um isomorfismo segundo Teorema 5.3.7. \square

Corolário 5.3.9. *Sejam E e F espaços vetoriais sobre um corpo \mathbb{K} e de dimensões finitas, então*

$$E \simeq F \Leftrightarrow \dim E = \dim F$$

Demonstração. " \Rightarrow " Seja $A : E \rightarrow F$ um isomorfismo e \mathcal{B} uma base de E . Então $A\mathcal{B}$ é base de F segundo Teorema 5.3.7. e $|\mathcal{B}| = |A\mathcal{B}|$ como A é bijetivo. Daí $\dim E := |\mathcal{B}| = |A\mathcal{B}| =: \dim F$.

" \Leftarrow " Corolário 5.3.8 da dois isomorfismos $E \simeq \mathbb{K}^{\dim E} = \mathbb{K}^{\dim F} \simeq F$. \square

Exemplo 5.3.10. O espaço vetorial $\mathcal{S}(n)$ das matrizes $n \times n$ simétricas e o espaço vetorial $\mathcal{P}_{\frac{n(n+1)}{2}-1}$ dos polinômios de grau menor ou igual $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ são isomorfos. Com efeito as dimensões são iguais – segundo Exercício 3.2.4 (c) e Exemplo 3.1.22 (b) – e assim Corolário 5.3.9 aplica.

Exercício 5.3.11. Dado $A \in \mathcal{L}(E)$ onde $\dim E < \infty$, defina

$$\begin{aligned} T_A : \mathcal{L}(E) &\rightarrow \mathcal{L}(E) \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

Prove que T_A é linear e que T_A é invertível se, e somente se A é invertível. Mesmo problema com $S_A(X) := XA$.

Exercício 5.3.12. Estabeleça um isomorfismo entre o espaço vetorial das matrizes reais simétricas $n \times n$ e o espaço das matrizes reais *triangulares inferiores* ($a_{ij} = 0$ se $i < j$).

Idem entre as matrizes anti-simétricas e as triangulares inferiores com diagonal nula.

Exercício 5.3.13. Sejam E, F espaços vetoriais tais que $\dim E \leq \dim F < \infty$. Prove que existem $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e $B \in \mathcal{L}(F, E)$ tais que A é injetiva e B é sobrejetiva.

Exercício 5.3.14. Sejam E, F espaços vetoriais (de dimensão finita ou infinita). Sejam $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e $B \in \mathcal{L}(F, E)$ tais que AB é invertível.

- (a) Prove que A é sobrejetiva e B é injetiva.
- (b) Se AB e BA são invertíveis, prove que A é invertível.

Aula 15

Temos adicionado Exemplos 4.1.5 e 4.1.12

5.4 Teorema de núcleo e imagem

Teorema 5.4.1 (Teorema de núcleo e imagem). *Para uma transformação linear $A: E \rightarrow F$ com domínio E de dimensão finita n vale*

$$\dim E = \dim N(A) + \dim \text{Im}(A)$$

Demonstração. Segundo Lema 5.0.2 os conjuntos $N(A)$ e $\text{Im}(A)$ são subespaços de E e F , respectivamente. Segundo Teorema 3.2.1 (c) e Corolário 5.0.5 temos

$$k := \dim N(A) \leq \dim E =: n < \infty$$

$$\ell := \dim \text{Im}(A) \leq \dim E =: n < \infty$$

Escolha uma base ordenada (ξ_1, \dots, ξ_k) de $N(A)$ e uma $(A\nu_1, \dots, A\nu_\ell)$ de $\text{Im}(A)$. Resta mostrar que

$$\mathcal{B} := (\xi_1, \dots, \xi_k, \nu_1, \dots, \nu_\ell)$$

é uma base de E , porque neste caso $\dim E = k + \ell = \dim N(A) + \dim \text{Im}(A)$.

\mathcal{B} é LI. Suponha que uma CL em \mathcal{B} representa o vetor nulo, ou seja

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k + \beta_1 \nu_1 + \dots + \beta_\ell \nu_\ell = \mathcal{O}$$

Resta mostrar que todos os coeficientes se anulam. Aplique A usando linearidade e que $\xi_i \in N(A)$ para obter

$$\alpha_1 \underbrace{A\xi_1}_{\mathcal{O}} + \dots + \alpha_k \underbrace{A\xi_k}_{\mathcal{O}} + \beta_1 A\nu_1 + \dots + \beta_\ell A\nu_\ell = \mathcal{O}$$

Então $\beta_1 = \dots = \beta_\ell = 0$ porque toda CL no conjunto LI $\{A\nu_1, \dots, A\nu_\ell\}$ e representando o vetor nulo tem todos coeficientes nulos. Neste caso a primeira identidade simplifica-se para $\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k = \mathcal{O}$. Mas os ξ_i 's formam uma base, então um conjunto LI, assim os coeficientes se anulam $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.

\mathcal{B} gera E . Dado $v \in E$, temos que exprimir v como CL em \mathcal{B} . Como temos uma base de $\text{Im}(A)$, escrevemos $Av \in \text{Im}(A)$ como CL $Av = \beta_1 A\nu_1 + \dots + \beta_\ell A\nu_\ell$ com coeficientes únicos β_j . Mas isso nos dá um elemento w do núcleo

$$A \underbrace{(v - \beta_1 \nu_1 - \dots - \beta_\ell \nu_\ell)}_{=:w} = \mathcal{O}$$

Exprimindo w como CL na base do núcleo, com coeficientes únicos α_j , obtemos

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k = w = v - \beta_1 \nu_1 - \dots - \beta_\ell \nu_\ell$$

Assim temos exprimido

$$v = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_k \xi_k + \beta_1 \nu_1 + \dots + \beta_\ell \nu_\ell$$

como CL em \mathcal{B} . □

Corolário 5.4.2. Para uma transformação linear $A: E \rightarrow F$ entre espaços vetoriais da mesma dimensão finita $n = \dim E = \dim F$ são equivalente

$$A \text{ injetivo} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ sobrejetivo} \quad (\Leftrightarrow \quad A \text{ isomorfismo})$$

Demonstração. Da hipótese da mesma dimensão e do Teorema 5.4.1 sabemos

$$\dim F = \dim E = \dim N(A) + \dim \text{Im}(A)$$

Injetividade (equivalente a $N(A) = \{\mathcal{O}\}$ segundo Lema 5.0.3) implica $\dim F = \dim \text{Im}(A)$, então $F = \text{Im}(A)$ (sobrejetividade) segundo Teorema 3.2.1 (d). Vice versa, sobrejetividade ($F = \text{Im}(A)$) implica $N(A) = \{\mathcal{O}\}$ (injetividade). \square

Exercício 5.4.3 (Errado na dimensão infinita). Considere os operadores lineares $A, B: \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ dado por empurrar todos os membros por um lugar

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (0, x_1, x_2, x_3, \dots) \\ B(x_1, x_2, x_3, \dots) &:= (x_2, x_3, \dots) \end{aligned}$$

Mostre que A é linear e injetivo, mas não é sobrejetivo, enquanto B é linear e sobrejetivo, mas não é injetivo,

Corolário 5.4.4. Na mesma dimensão finita $n = \dim E = \dim F$ ser inversa à esquerda é equivalente a ser inversa à direita, em símbolos para $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e $B \in \mathcal{L}(F, E)$ são equivalentes

$$BA = I_E \quad \Leftrightarrow \quad AB = I_F$$

No todo caso A é invertível com inversa $A^{-1} = B = C$.

Demonstração. “ \Rightarrow ” Temos as três equivalências

$$BA = I_E \Leftrightarrow A \text{ injetivo} \Leftrightarrow A \text{ sobrejetivo} \Leftrightarrow \exists C \in \mathcal{L}(F, E): AC = I_F$$

segundo respectivamente os três resultados Teorema 5.2.6, Corolário 5.4.2, e Teorema 5.1.3. Mas neste caso $C = B$ e este operador é a inversa de A como mostrado na Definição 5.3.1. \square

Exemplo 5.4.5. Dado uma lista não-nula $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathcal{O}\}$, o subconjunto

$$H_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_\alpha(x) := \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\} = N(\varphi_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$$

é chamado de hiperplano e foi introduzido no Exemplo 2.1.8. Já sabemos que

$$\dim H_\alpha = n - 1$$

como no Exemplo 3.0.11 d) temos visto uma base composto de $n - 1$ elementos.

Um caminho alternativo para calcular a dimensão é do ponto da vista como núcleo do funcional linear $\varphi_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. O Teorema 5.4.1 diz que

$$\underbrace{\dim \mathbb{R}^n}_{=n} = \underbrace{\dim N(\varphi_\alpha)}_{H_\alpha} + \underbrace{\dim \text{Im}(\varphi_\alpha)}_{=1}$$

Resta ver que $\text{Im}(\varphi_\alpha) = \mathbb{R}$. O subespaço $\text{Im}(\varphi_\alpha)$ de \mathbb{R} não é o trivial $\{0\}$ porque $\varphi_\alpha \alpha = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 > 0$ é não-nulo como $\alpha \neq (0, \dots, 0)$. Então $\text{Im}(\varphi_\alpha)$ deve ser o outro subespaço de \mathbb{R} , o \mathbb{R} mesmo, veja Exercício 2.1.4.

Capítulo 6

Soma direta e projeções

No Capítulo 6 denotamos de

$$F_1, F_2 \subset E$$

subespaços de um espaço vetorial E sobre um corpo \mathbb{K} . Na primeira leitura pense em $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Lembre-se do Exercício 3.1.23 que o produto cartesiano $F_1 \times F_2$ de dois espaços vetoriais sobre um corpo \mathbb{K} é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} de dimensão

$$\dim F_1 \times F_2 = \dim F_1 + \dim F_2$$

Dado dois subespaços, será útil relembrar da Seção 2.3 a soma ordinária $F_1 + F_2$ e a soma direta $F_1 \oplus F_2$ deles. Mesmo para a formula (3.2.1) a qual diz que

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2)$$

Exercício 6.0.6. Seja E um espaço vetorial com subespaços de interseção trivial $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$. Prove que

$$S : F_1 \times F_2 \rightarrow F_1 \oplus F_2, \quad (u, v) \mapsto u + v$$

é um isomorfismo (linear, injetivo, sobrejetivo).

Definição 6.0.7 (Pontos fixos e anti-fixos). Dado uma aplicação $f : X \rightarrow X$ entre um conjunto X , um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = x$ chama-se um **ponto fixo** de f . Denotamos de $\text{Fix}(f)$ o conjunto de todos os pontos fixos de f . Se X é um espaço vetorial denotamos de $\text{AFix}(f)$ o conjunto de todos os **pontos anti-fixos** de f , ou seja $f(x) = -x$.

Projeções

Definição 6.0.8. Operadores lineares idempotentes $P^2 = P \in \mathcal{L}(E)$ chama-se de **projeção** de E . Um **par de subespaços complementares** de E é um par (F_1, F_2) de subespaços decompondo E no sentido que $F_1 \oplus F_2 = E$.

Lema 6.0.9 (Caracterização de projeção). *Seja $P \in \mathcal{L}(E)$, então*

$$P \text{ projeção de } E \Leftrightarrow \begin{cases} (1) & \forall w \in \text{Im}(A): Pw = w & \text{Im}(P) = \text{Fix}(P) \\ (2) & E = \text{Im}(P) \oplus \text{N}(P) & \text{par complementar} \end{cases}$$

Demonstração. □

Definição 6.0.10. Seja (F_1, F_2) um par de subespaços complementares de E , escreva $w \in E = F_1 \oplus F_2$ na forma $w = u + v$ com únicos elementos $u \in F_1$ e $v \in F_2$, veja Teorema 2.3.4. A aplicação dado por

$$P_{F_1, F_2} : E \rightarrow E, \quad w \mapsto u$$

é chamado de **projeção de E sobre F_1 paralelo F_2** .

Lema 6.0.11. *A aplicação $P = P_{F_1, F_2}$ é uma projeção de E , em símbolos $P^2 = P \in \mathcal{L}(E)$, sua imagem é F_1 e seu núcleo F_2 .*

Demonstração. □

Teorema 6.0.12. *Existe uma bijeção*

$$\Psi : \{\text{pares de subespaços complementares de } E\} \rightarrow \{\text{projeções em } E\} \\ (F_1, F_2) \mapsto P_{F_1, F_2}$$

com inversa $\Phi(P) := \Psi^{-1}(P) = (\text{Im}(P), \text{N}(P))$.

Demonstração. □

Involuções

Definição 6.0.13. Um operador linear $S \in \mathcal{L}(E)$ cujo quadrado $S^2 = I_E$ é o operador identidade é chamado de **involução** de E .

Teorema 6.0.14. *Para involuções S em E vale*

$$E = \text{Fix}(S) \oplus \text{AFix}(S)$$

e para os vetores $w \in E$ vale

$$Sw = P_{\text{Fix}(S), \text{AFix}(S)}w - P_{\text{AFix}(S), \text{Fix}(S)}w$$

Defina $P := \frac{1}{2}(I_E + S)$ e $Q := \frac{1}{2}(I_E - S)$, então valem as identidades

$$S = P - Q, \quad I_E = P + Q, \quad P = P_{\text{Fix}(S), \text{AFix}(S)}, \quad Q = P_{\text{AFix}(S), \text{Fix}(S)}$$

Demonstração. □

Aula X

Capítulo 7

Matrizes de transformações lineares

Consideramos uma transformação linear

$$A : E \rightarrow F$$

entre espaços vetoriais sobre um corpo \mathbb{K} . Denotamos o operador identidade de

$$I_E : E \rightarrow E, \quad v \mapsto v$$

e o em F de I_F , veja (4.1.1). Agora será muito útil escrever uma base ordenada na forma de uma lista ordenada. Sejam $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ e $\tilde{\mathcal{U}}$ bases ordenadas de E e $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ e $\tilde{\mathcal{V}}$ de F . Nas seguintes seções vamos estabelecer e provar os detalhes da seguinte diagrama comutativa¹

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}} & & \mathbb{K}^m & \\
 \downarrow \cong & \searrow \mathcal{U} & & \swarrow \mathcal{V} & \downarrow \cong \\
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\mathbf{p} := [I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}} & E & \xrightarrow{A} & F & \xrightarrow{\mathbf{q} := [I_F]_{\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}}}} & \mathbb{K}^m \\
 \downarrow \cong & \swarrow \tilde{\mathcal{U}} & & \nwarrow \tilde{\mathcal{V}} & \downarrow \cong \\
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{a}} := [A]_{\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{V}}}} & & & \mathbb{K}^m
 \end{array} \quad (7.0.1)$$

No diagrama \mathbf{p} é a chamada **matriz de passagem** da base \mathcal{U} de E para $\tilde{\mathcal{U}}$. Além disso \mathbf{a} é a **matriz da transformação linear** $A : E \rightarrow F$ em respeito às bases \mathcal{U} do domínio e \mathcal{V} do contradomínio.

¹ **Comutatividade** significa que caso entre dois espaços vetoriais no diagrama tem dois caminhos de flechas, então não importa o qual usamos. Note que a flecha de um isomorfismo ' \cong ' também existe na direção reversa (no diagrama só mostramos uma flecha para simplicidade).

Comentário 7.0.15 (Interpretação da parte triangular esquerda da diagrama). Sejam $\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}$ e \mathcal{W} bases do espaço vetorial E da dimensão n . Sejam

- p**: a matriz de passagem de \mathcal{U} para $\tilde{\mathcal{U}}$
r: a matriz de passagem de $\tilde{\mathcal{U}}$ para \mathcal{W}

Vamos entender nesta seção que nestas hipóteses

- rp** é a matriz de passagem de \mathcal{U} para \mathcal{W}
p⁻¹ é a matriz de passagem de $\tilde{\mathcal{U}}$ para \mathcal{U}

7.1 Bases induzem isomorfismos

Definição 7.1.1 (Um símbolo com duas significados). Usamos *o mesmo símbolo* para a base e para o isomorfismo determinado pela: Escrevemos

$$\mathcal{U} : \mathbb{K}^n \rightarrow E, \quad x \mapsto \mathcal{U}x$$

para a transformação linear determinada pela base $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, ou seja

$$\mathcal{U}x := (\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \underbrace{\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n}_{=v} \in E \quad (7.1.1)$$

Obviamente a aplicação $\mathcal{U} : \mathbb{K}^n \rightarrow E$ é linear. Ela é injetiva como a base \mathcal{U} é LI (Corolário 3.1.2) e sobrejetiva como \mathcal{B} gera E .

Portanto $\mathcal{U} : \mathbb{K}^n \rightarrow E$ é um isomorfismo, símbolo \simeq .

No caso $E = \mathbb{K}^n$ a base canônica \mathcal{E}^n produz o operador identidade $\mathcal{E}^n = I_{\mathbb{K}^n}$.

Seja $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ uma base ordenada de E . Dado $v \in E$, então $x := \mathcal{U}^{-1}v \in \mathbb{K}^n$ é o vetor coordenada $[v]_{\mathcal{U}}$ de v em respeito à base \mathcal{U} introduzido em (3.1.2): Com efeito como \mathcal{B} é base exprime-se v como CL dos elementos de \mathcal{B} com coeficientes únicos x_i , ou seja $v = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n =: \mathcal{U}x$. Assim

$$\mathcal{U}^{-1}v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [v]_{\mathcal{U}} \in \mathbb{K}^n \quad (7.1.2)$$

O isomorfismo $\mathcal{U}^{-1} : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ é chamado de **sistema de coordenadas** em E . No caso de $E = \mathbb{K}^n$ com base canônica $\mathcal{U} = \mathcal{E}$ abreviamos $[v] := [v]_{\mathcal{E}}$.

7.2 Matriz associada a uma TL e bases

Dado uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E, F)$ e bases $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ de E e $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ de F , então podemos representar os elementos $A\xi_j \in F$ como combinação linear na base \mathcal{V} com coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{K}$ únicos. Com efeito

$$\boxed{A\xi_j = \eta_1 a_{1j} + \dots + \eta_m a_{mj}} \quad (7.2.1)$$

Note como pela nossa definição o índice do η_i coincide com o primeiro (mais perto) índice do escalar a_{ij} o qual deve ser escrito *atrás*.

Os escalares a_{ij} formam uma matriz $m \times n$ chamada de **matriz de A** em respeito às bases \mathcal{U} e \mathcal{V} , símbolo

$$[A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} := \mathbf{a} = [a_{ij}] \quad (7.2.2)$$

Note-se que a matriz \mathbf{a} tem como colunas

$$\mathbf{a}_{\bullet j} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = [A\xi_j]_{\mathcal{V}}$$

os vetores coordenadas dos imagens $A\xi_j$, ou seja

$$[A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} = [[A\xi_1]_{\mathcal{V}} \dots [A\xi_n]_{\mathcal{V}}] = [\mathbf{a}_{\bullet 1} \dots \mathbf{a}_{\bullet n}] = \mathbf{a}$$

No caso $E = F$ e $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ abreviamos $[A]_{\mathcal{U}} := [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{U}}$. No caso $E = F = \mathbb{K}^n$ e $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{E}$ abreviamos $[A] := [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$.

Exercício 7.2.1. Mostre que a matriz do operador identidade

$$[I_E]_{\mathcal{U}} := [I_E]_{\mathcal{U}, \mathcal{U}} = \mathbb{1}$$

sempre é a matriz identidade se usamos só uma base \mathcal{U} de E .

Teorema 7.2.2. Levando transformações lineares às suas matrizes

$$\begin{aligned} \Phi = \Phi_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} : \mathcal{L}(E, F) &\xrightarrow{\cong} M(n \times m; \mathbb{K}) \\ A &\mapsto [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Seja $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ base de E e $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ de F .

LINEAR. Escreve (7.2.2) para A , para B , e depois adiciona as duas equações e use $(A+B)\xi_j = A\xi_j + B\xi_j$.

INJETIVO. Suponha $(a_{ij}) := [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} = [B]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} =: (b_{ij})$. Então A e B coincidem

$$A\xi_j = \eta_1 a_{1j} + \dots + \eta_m a_{mj} = \eta_1 b_{1j} + \dots + \eta_m b_{mj} = B\xi_j$$

nos elementos de uma base e linearidade implica que coincidem em todo $v \in E$.

SOBREJETIVO. Dado $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in M(m \times n; \mathbb{K})$, para cada um j defina

$$A\xi_j := \eta_1 a_{1j} + \dots + \eta_m a_{mj}$$

Isso determina A unicamente (Prop. 4.1.16). Então $\Psi(A) := [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} = \mathbf{a}$. \square

Teorema 7.2.3. *Considere duas transformações lineares*

$$E \xrightarrow{A} F \xrightarrow{B} G$$

entre três espaços vetoriais com bases respectivas

$$\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m), \quad \mathcal{W} = (\nu_1, \dots, \nu_p)$$

Então a matriz da composição

$$[BA]_{\mathcal{U}, \mathcal{W}} = [B]_{\mathcal{V}, \mathcal{W}} [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} \quad (7.2.3)$$

é o produto das matrizes.

Demonstração. Sejam \mathbf{a} e \mathbf{b} as matrizes de A e B , seja \mathbf{c} aquela de BA . Assim

$$A\xi_j = \sum_{k=1}^m \eta_k a_{kj}, \quad B\eta_k = \sum_{i=1}^p \nu_i b_{ik}, \quad BA\xi_j = \sum_{i=1}^p \nu_i c_{ij}$$

para $j = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, m$. Use estas identidades para obter

$$\sum_{i=1}^p \nu_i c_{ij} = B(A\xi_j) = \sum_{k=1}^m (B\eta_k) a_{kj} = \sum_{i=1}^p \nu_i \sum_{k=1}^m b_{ik} a_{kj}$$

onde no último passo temos permutado a ordem das somas *finitas*. Mas como a base \mathcal{W} é LI os coeficientes dos ν_i devem ser iguais (Corolário 3.1.2). \square

Lembre-se do Exemplo 3.1.22 (c) que $\dim M(n \times m; \mathbb{K}) = nm$. Vamos ver no futuro que isomorfismos preservam dimensões – o que implica

Corolário 7.2.4. $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim M(n \times m; \mathbb{K}) = nm = \dim E \cdot \dim F$

7.3 Mudança de base – comutatividade da diagrama

Nesta seção estudamos na diagrama (7.0.1) o que acontece a) com um vetor coordenada $[v]_{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^{-1}v$ se trocamos a base \mathcal{U} de E para uma outra base $\tilde{\mathcal{U}}$ e b) com a matriz de uma transformação linear se também trocamos a base de F .

Vetor coordenada

A matriz $\mathbf{p} := [I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}$ do operador identidade, por definição (7.2.1), satisfaz

$$\xi_j = I_E \xi_j = \tilde{\xi}_1 p_{1j} + \dots + \tilde{\xi}_n p_{nj} \quad j = 1, \dots, n. \quad (7.3.1)$$

Nas outras palavras ela exprime os elementos da *base velha* $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ de E como combinação linear dos elementos da *base nova* $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n)$ de E . Por isso \mathbf{p} é chamado de **matriz de passagem de \mathcal{U} para $\tilde{\mathcal{U}}$** . A matriz de passagem participa do diagrama (7.0.1) fazendo as partes triangulares comutativo (7.0.1).

Lema 7.3.1. $\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{p} = \mathcal{U}$ na diagrama (7.0.1), equivalentemente $[I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}} = \tilde{\mathcal{U}}^{-1}\mathcal{U}$.

Demonstração. Para $x \in \mathbb{K}^n$ vale

$$\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{p}x = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sum_k p_{1k}x_k \\ \vdots \\ \sum_k p_{nk}x_k \end{bmatrix} = \sum_\ell \tilde{\xi}_\ell \sum_k p_{\ell k}x_k = \sum_k \underbrace{\left(\sum_\ell \tilde{\xi}_\ell p_{\ell k} \right)}_{\stackrel{(7.3.1)}{=} \xi_k} x_k = \mathcal{U}x$$

□

Corolário 7.3.2. Toda matriz de passagem é um isomorfismo e sua inversa é

$$[I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}^{-1} = [I_E]_{\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{U}} = \mathcal{U}^{-1}\tilde{\mathcal{U}}$$

Demonstração. Aplicando $\tilde{\mathcal{U}}^{-1}$ em ambos os lados de $\tilde{\mathcal{U}}\mathbf{p} = \mathcal{U}$ obtem-se $\tilde{\mathcal{U}}^{-1}\mathcal{U} = \mathbf{p} := [I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}$. Assim \mathbf{p} é um isomorfismo como \mathcal{U} e $\tilde{\mathcal{U}}$ são. Toma as inversas em ambos lados e use (4.1.2) para obter $[I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}^{-1} = \mathbf{p}^{-1} = \mathcal{U}^{-1}\tilde{\mathcal{U}} = [I_E]_{\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{U}}$. □

Matriz de uma transformação linear

Lema 7.3.3. $A\mathcal{U} = \mathcal{V}\mathbf{a}$ na diagrama (7.0.1).

Demonstração. Seja $x \in \mathbb{K}^n$, então

$$\begin{aligned} A\mathcal{U}x &= A(\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n) \\ &= \underbrace{(A\xi_1)}_{\eta_1 a_{11} + \dots + \eta_m a_{m1}} x_1 + \dots + \underbrace{(A\xi_n)}_{\eta_1 a_{1n} + \dots + \eta_m a_{mn}} x_n \\ &= \sum_{j=1}^m (\eta_j a_{j1}) x_1 + \dots + \sum_{j=1}^m (\eta_j a_{jm}) x_n \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} A\mathcal{U}x &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (\eta_j a_{jk}) x_k = \sum_{j=1}^m \eta_j \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k}_{\mathbf{a}_{j\bullet}x} \\ &= \eta_1 \mathbf{a}_{1\bullet}x + \dots + \eta_m \mathbf{a}_{m\bullet}x = (\eta_1, \dots, \eta_m) \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1\bullet}x \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m\bullet}x \end{bmatrix} = \mathcal{V}\mathbf{a}x \end{aligned}$$

□

Segundo as Lemas 7.3.3 e 7.3.1 o diagrama (7.0.1) é comutativo, e assim recebemos a relação

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{qap}^{-1}$$

entre as matrizes de A em respeito às bases novas e velhas. No caso $F = E$ munido das bases $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ e $\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{\mathcal{U}}$ recebemos

$$[A]_{\tilde{\mathcal{U}}} = \mathbf{p}[A]_{\mathcal{U}}\mathbf{p}^{-1}$$

Caso especial $E = F = \mathbb{K}^n$ com a base canônica \mathcal{E} e uma base \mathcal{U}

Considere o caso de um operador linear $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ onde \mathbb{K}^n é munido originalmente da base canônica $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ e depois de uma base nova \mathcal{U} . Neste caso o diagrama (7.0.1) torna-se no diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\mathbf{a} := [A]} & \mathbb{K}^n \\
 \downarrow \mathcal{E} = I_{\mathbb{K}^n} & \swarrow \simeq & \searrow \simeq \\
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^n \\
 \downarrow \mathcal{U} & \swarrow \simeq & \searrow \simeq \\
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{a}} := [A]_{\mathcal{U}}} & \mathbb{K}^n
 \end{array}
 \quad (7.3.2)$$

o qual disponibiliza a relação $[A]_{\mathcal{U}} = \mathbf{p}[A]\mathbf{p}^{-1}$ entre as matrizes de A quando trocar a base canônica por qualquer outra base.

Exercício 7.3.4. Suponha que $E = \mathbb{K}^n$ munido da base canônica \mathcal{E} como base velha, veja diagrama (7.3.2). Então os membros da base nova $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ formam as colunas da matriz inversa \mathbf{p}^{-1} . Veja Exercício 7.4.5.

Nas outras palavras, como a inversa de $\mathbf{p} := [I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{E}, \mathcal{U}}$ é $[I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{U}, \mathcal{E}}$, vale a seguinte fórmula

$$\boxed{[I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{U}, \mathcal{E}} = [\mathcal{U}]}$$

onde $[\mathcal{U}]$ denota a matriz cujas colunas são os elementos da base \mathcal{U} de \mathbb{K}^n .

7.4 Exercícios e umas soluções

Matriz de uma transformação linear

Exercício 7.4.1. Considere a base ordenada $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de \mathbb{R}^3 , onde

$$u = (1, 1, 1), \quad v = (1, -1, 1), \quad w = (1, 1, -1)$$

Seja $\mathcal{B}^* = (\phi, \psi, \chi)$ a base (de \mathbb{R}^{3*}) dual de \mathcal{B} . Calcule as matrizes $[\phi], [\psi], [\chi]$ das transformações lineares $\phi, \psi, \chi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Uma solução. Sejam $\mathcal{E}^3 = (e_1, e_2, e_3)$ e $\mathcal{E}^1 = (E_1)$ as bases canônicas onde o

vetor unitário em \mathbb{R}^1 é a lista $E_1 = (1)$ de um membro com 1 no 1-ésimo lugar (e nulos nos outros lugares – as quais não têm). Seja $x_i := \phi e_i$, então usando a propriedade da base dual e linearidade obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \phi u = \phi(1, 1, 1) = \phi e_1 + \phi e_2 + \phi e_3 = x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 &= \phi v = \phi(1, -1, 1) = \phi e_1 - \phi e_2 + \phi e_3 = x_1 - x_2 + x_3 \\ 0 &= \phi w = \phi(1, 1, -1) = \phi e_1 + \phi e_2 - \phi e_3 = x_1 + x_2 - x_3 \end{aligned}$$

Usamos escalonamento para resolver o SL de 3 equações nas 3 incógnitas $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$ as quais são listas de um membro só. O resultado é

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

Observamos que

$$\begin{aligned} 1 &= x_1 = \phi e_1 = E_1 \phi_{11} = 1 \cdot \phi_{11} = \phi_{11} \\ 0 &= x_2 = \phi e_2 = E_1 \phi_{12} = 1 \cdot \phi_{12} = \phi_{12} \\ 0 &= x_3 = \phi e_3 = E_1 \phi_{13} = 1 \cdot \phi_{13} = \phi_{13} \end{aligned}$$

e assim

$$[\phi]_{\mathcal{E}^3, \mathcal{E}^1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Analogamente obtemos

$$[\psi]_{\mathcal{E}^3, \mathcal{E}^1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\chi]_{\mathcal{E}^3, \mathcal{E}^1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Olha só, no caso $E = \mathbb{R}^n$ a matriz da base dual de qualquer base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n tem em respeito às bases canônicas de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^1 a forma da base canônica.

Exercício 7.4.2. Considere as transformações lineares

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, x + y)$$

e $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido assim

$$B(x, y, z) = (ax + (a - 1)y + (1 - a)z, -bx + (1 - b)y + bz)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes. Determine o operador $BA \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

[Dica: Use as matrizes $[A]$ e $[B]$ que correspondem a A e B respectivamente.]

Uma solução. Denotamos de $\mathcal{E}^2 = \{e_1, e_2\}$ e $\mathcal{E}^3 = \{E_1, E_2, E_3\}$ as bases canônicas. As duas colunas da matriz $[A] \in M(3 \times 2)$ são formadas das coeficientes seguintes

$$\begin{aligned} Ae_1 &= A(1, 0) = (1, 0, 1) = 1E_1 + 0E_2 + 1E_3 \\ Ae_2 &= A(0, 1) = (0, 1, 1) = 0E_1 + 1E_2 + 1E_3 \end{aligned}$$

As três colunas da matriz $[B] \in M(2 \times 3)$ são formadas das coeficientes seguintes

$$\begin{aligned} BE_1 &= B(1, 0, 0) = (a, -b) = ae_1 - be_2 \\ BE_2 &= B(0, 1, 0) = (a - 1, 1 - b) = (a - 1)e_1 + (1 - b)e_2 \\ BE_3 &= B(0, 0, 1) = (1 - a, b) = (1 - a)e_1 + be_2 \end{aligned}$$

Assim recebemos

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} a & a-1 & 1-a \\ -b & 1-b & b \end{bmatrix}$$

Use (7.2.3) no primeiro passo e no segundo calcule produto matriz para obter

$$[BA] = [B][A] = \begin{bmatrix} a+1-a & a-1+1-a \\ -b+b & 1-b+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1}_2$$

Use a relação (7.2.1) entre matriz e operador para concluir que $BA = I_{\mathbb{R}^2}$.

Exercício 7.4.3. Qual é a matriz $[A]$ do operador $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$A(2, 3) = (2, 3) \quad \text{e} \quad A(-3, 2) = (0, 0) ?$$

Exercício 7.4.4. Considere as transformações lineares

$$A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}), \quad (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n,$$

e

$$B : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad p = p(x) \mapsto (p(0), p(1), \dots, p(n)).$$

Determina a matriz $[BA]$ da composição $BA : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

Uma solução. Seja $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_{n+1})$ a base canônica e seja

$$\mathcal{M} = (x^0, x, x^2, \dots, x^n) =: (\eta_1, \dots, \eta_{n+1}), \quad x^0 := 1$$

a base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ composto de monômios. Segundo a definição de A recebemos

$$Ae_i = A(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = 0x^0 + \dots + 0x^{i-1} + 1x^i + 0x^{i+1} + \dots + 0x^n$$

para $i = 1, \dots, n+1$. Segundo (7.2.1) obtemos $[A]_{\mathcal{E}, \mathcal{M}} = \mathbb{1}_{n+1}$. Analogamente

$$B\eta_i = (\eta_i(0), \eta_i(1), \dots, \eta_i(n)) = (0^{i-1}, 1^{i-1}, \dots, n^{i-1}) = \sum_{j=1}^{n+1} e_j \underbrace{(j-1)^{i-1}}_{b_{ji}}$$

para cada $i = 1, \dots, n+1$ o que nos dá a i -ésima coluna da matriz

$$[B]_{\mathcal{M}, \mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0^0 & 0^1 & \dots & 0^n \\ 1^0 & 1^1 & \dots & 1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ n^0 & n^1 & \dots & n^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & n & \dots & n^n \end{bmatrix}$$

Assim $[B]_{\mathcal{M}, \mathcal{E}} = [B]_{\mathcal{M}, \mathcal{E}} \mathbb{1}_{n+1} = [B]_{\mathcal{M}, \mathcal{E}} [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{M}} = [BA]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$ segundo (7.2.3).

Mudança de base – vetor

Ignore no momento:

Exercício 7.4.5. Seja $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ a base canônica de \mathbb{R}^n . Dados vetores $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$ e escalares $p_{ij} \in \mathbb{R}$ tal que

$$e_j = \xi_1 p_{1j} + \xi_2 p_{2j} + \dots + \xi_n p_{nj}, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

mostre que

1. a lista ordenada $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ é uma base de \mathbb{R}^n .
2. a matriz $\mathbf{p} = [p_{ij}]$ é a inversa da matriz \mathbf{q} cujos vetores-coluna são por definição ξ_1, \dots, ξ_n , em símbolos $\mathbf{q}\mathbf{p} = \mathbb{1}_n$. Veja Exercício 7.3.4.

Em palavras, obtém-se a matriz $\mathbf{p} := [I_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{E}, \mathcal{U}}$ de mudança da base canônica \mathcal{E} para uma base nova $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ como a matriz inversa da matriz $\mathbf{q} := [\xi_1 \dots \xi_n]$ cujas colunas são os ξ_i 's, em símbolos

$$\mathbf{p} := [I_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{E}, (\xi_1, \dots, \xi_n)} = \mathbf{q}^{-1} = [\xi_1 \dots \xi_n]^{-1}$$

Mudança de base – matriz

7.5 Eliminação e aplicações (MA141)

7.5.1 Dimensão do subespaço gerado por m vetores

7.5.2 Cálculo do posto

7.5.3 Cálculo da matriz inversa

7.5.4 Resolução de sistemas lineares

Capítulo 8

Subespaços invariantes

Parte III

Estruturas adicionais e operadores especiais

Capítulo 9

Produto interno

9.1 Ortogonalidade

9.2 Ângulos e cumprimentos

9.3 Desigualdades

9.4 Processo de Gram-Schmidt

9.5 Complemento ortogonal

Capítulo 10

A adjunta

Capítulo 11

Operadores auto-adjuntos

Capítulo 12

Operadores ortogonais

12.1 Matrizes

12.2 Operadores

12.3 Decomposição polar

Apêndice A

Demonstrações restantes

A.1 Espaços vetoriais

Lema A.1.1 (Lema 1.1.4). *Seja $(G, *)$ um grupo. Então vale o seguinte.*

- 1) *O elemento neutro é único.*
- 2) *Os elementos inversos são únicos.*
- 3) *Para todos os elementos $f, g, h \in G$ vale:*

- a) $f * g = f * h \Rightarrow g = h$ *(lei da corte)*
- b) $f * g = f \Rightarrow g = e$
- c) $f * g = e \Rightarrow g = \bar{f}$

Demonstração. 1) Se $e, \tilde{e} \in G$ satisfazem o axioma (elemento neutro), então usando o axioma para e e depois para \tilde{e} obtemos que $e = e * \tilde{e} = \tilde{e}$.

2) Seja $g \in G$. Se $\bar{g}, \tilde{g} \in G$ satisfazem o axioma (inverso) para g , então obtemos

$$\bar{g} = e * \bar{g} = \underbrace{(\tilde{g} * g)}_{=e} * \bar{g} = \tilde{g} * \underbrace{(g * \bar{g})}_{=e} = \tilde{g} * e = \tilde{g}$$

usando (elem. neutro) no início e fim, (inverso) $_{\tilde{g}}$, (associatividade), (inverso) $_{\bar{g}}$.

- 3) a) $g = e * g = (\bar{f} * f) * g = \bar{f} * (f * g) \stackrel{\text{hip.}}{=} \bar{f} * (f * h) = (\bar{f} * f) * h = e * h = h$.
- b) Use a) com $h = e$. c) Use a) com $h = \bar{f}$. □

Lema A.1.2 (Lema 1.1.9). *Seja \mathbb{K} um corpo e $0 \in K$ é o elemento neutro da adição. Então $0\beta = 0$ e $\beta 0 = 0$ para todos os elementos $\beta \in \mathbb{K}$.*

Demonstração. Seja $\beta \in \mathbb{K}$, denotamos o inverso aditivo de $-\beta$. Então

$$\beta \stackrel{(\text{el.n.})}{=} 1\beta \stackrel{(\text{el.n.})_+}{=} (1+0)\beta \stackrel{(\text{distr.})}{=} 1\beta + 0\beta \stackrel{(\text{el.n.})}{=} \beta + 0\beta$$

Usamos esta identidade para obter a segunda igualdade no seguinte

$$0 \stackrel{(\text{inv.})}{=} (-\beta) + \beta = -\beta + (\beta + 0\beta) \stackrel{(\text{ass.})_+}{=} (-\beta + \beta) + 0\beta \stackrel{(\text{inv.})}{=} 0 + 0\beta \stackrel{(\text{el.n.})}{=} 0\beta$$

□

Lema A.1.3 (Lema 1.1.17). *Para o vetor nulo $\mathcal{O} \in E$ de um espaço vetorial e o elemento neutro aditivo $0 \in \mathbb{K}$ do corpo vale o seguinte.*

- (i) $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ para todos os escalares $\alpha \in \mathbb{K}$.
- (ii) $0v = \mathcal{O}$ para todos os vetores $v \in E$.
- (iii) Para todo o escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo o vetor $w \in E$ são equivalentes:

$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O}$$

Demonstração. (i) CASO $\alpha = 0$. Como $\alpha\mathcal{O} + 0\mathcal{O} = (\alpha + 0)\mathcal{O} = \alpha\mathcal{O}$, então $0\mathcal{O} = \mathcal{O}$ pela lei da corte (Lema A.1.1 3b) para $(G, *) = (E, +)$. CASO $\alpha \neq 0$. Tal α tem um inverso aditivo, notação α^{-1} . Seja $v \in E$, então

$$v \stackrel{(\text{comp.})}{=} 1v \stackrel{(\text{inv.})_{\mathbb{K}}}{=} (\alpha\alpha^{-1})v \stackrel{(\text{comp.})}{=} \alpha(\alpha^{-1}v)$$

Usando este resultado no início e no fim do seguinte obtemos que

$$v + \alpha\mathcal{O} = \alpha(\alpha^{-1}v) + \alpha\mathcal{O} \stackrel{(\text{distr.})_E}{=} \alpha((\alpha^{-1}v) + \mathcal{O}) \stackrel{(\text{el.n.})_{E,+}}{=} \alpha(\alpha^{-1}v) = v$$

Então $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ pela lei da corte (Lema A.1.1 3b) para $(G, *) = (E, +)$.

- (ii) Como $v + 0v = 1v + 0v = (1 + 0)v = 1v = v$ a lei da corte diz que $0v = \mathcal{O}$.
- (iii) '⇒' Suponha $\alpha w = \mathcal{O}$. Caso $\alpha = 0$, pronto. Caso $\alpha \neq 0$ concluímos que

$$w \stackrel{(\text{comp.})}{=} 1w \stackrel{(\text{el.n.})_{\mathbb{K}}}{=} (\alpha^{-1}\alpha)w \stackrel{(\text{comp.})}{=} \alpha^{-1}(\alpha w) \stackrel{\text{hip.}}{=} \alpha^{-1}\mathcal{O} \stackrel{(i)}{=} \mathcal{O}$$

'⇐' Se $w = \mathcal{O}$, então $\alpha\mathcal{O} \stackrel{(i)}{=} \mathcal{O}$, pronto. Se $\alpha = 0$, então $0w \stackrel{(ii)}{=} \mathcal{O}$, pronto. □

Corolário A.1.4 (Corolário 1.1.18). *Para todos os $\alpha \in \mathbb{K}$ e $w \in E$ vale:*

- a) $\alpha(-w) = -(\alpha w)$
- b) $(-\alpha)w = -(\alpha w)$

Demonstração. a) Temos que mostrar que a soma de αw e o candidato para ser seu inverso aditivo iguale o vetor nulo. Com efeito

$$\alpha w + \alpha(-w) \stackrel{(\text{distr.})_E}{=} \alpha(w + (-w)) \stackrel{(\text{el.n.})_{E,+}}{=} \alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$$

onde o último passo é parte (i) de Lema A.1.3.

b) Temos o objetivo análogo de chegar ao vetor nulo, com efeito

$$\alpha w + (-\alpha)w \stackrel{(\text{distr.})_E}{=} (\alpha + (-\alpha))w \stackrel{(\text{el.n.})_{\mathbb{K},+}}{=} 0w = \mathcal{O}$$

onde o último passo é parte (ii) de Lema A.1.3. □

A.2 Subespaços

Lema A.2.1 (Lema 2.2.4). *Todo subconjunto LI $\{u, v\} \subset \mathbb{R}^2$ gera \mathbb{R}^2 .*

Demonstração. Vai ter 4 passos. I. Os vetores u, v não são múltiplos um do outro: Suponha por absurdo que $u = \alpha v$ para um $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $1u + (-\alpha)v = 1\alpha v - (\alpha v) = \mathcal{O}$ contradizendo LI. II. $u \neq \mathcal{O}$: Caso contrario $u = \mathcal{O} = 0v$ contradizendo I. III. $v \neq \mathcal{O}$: Análogo. IV. Seja $v \in \mathbb{R}^2$. Caso $w = \mathcal{O}$ escrevemos $w = 0u$, pronto. Caso $v \neq \mathcal{O}$: Agora identificamos \mathbb{R}^2 com o plano usando dois eixos OXY , veja Figura 2. Segundo II. e III. temos duas retas $\mathbb{R}u$ e $\mathbb{R}v$ passando ambas a origem O , mas não são iguais segundo I. Recebemos um paralelogramo com dois lados parte das retas e dois vértices sendo O e v ; pensa Figura 2 com OX e OY substituto para Ou e Ov . Então a flecha v é a soma de duas flechas do paralelogramo, uma flecha sendo um múltiplo de u e a outra de v . Pronto. \square

Teorema A.2.2 (Teorema 2.3.4). *Sejam $F_1, F_2 \subset F$ três subespaços de um espaço vetorial E , então são equivalentes*

$$F = F_1 \oplus F_2 \iff \forall f \in F, \exists! f_1 \in F_1, f_2 \in F_2 \text{ tal que } f = f_1 + f_2$$

Demonstração. '⇒' Seja $f \in F$. Como hipótese temos duas informações, a saber (i) $F = F_1 + F_2$ e (ii) $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$, dando existência e unicidade.

EXISTÊNCIA: De (i) sabemos que $f = f_1 + f_2$ para um $f_1 \in F_1$ e um $f_2 \in F_2$.

UNICIDADE. Suponha que $f = \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2$ também para um $\tilde{f}_1 \in F_1$ e um $\tilde{f}_2 \in F_2$. Então $F_1 \ni f_1 - \tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 - f_2 \in F_2$. Assim cada um lado pertence a ambos espaços, então a $F_1 \cap F_2$ o qual segundo (ii) iguale $\{\mathcal{O}\}$. Como não tem outro elemento, cada um lado deve ser o vetor nulo.

'⇐' $F_1 + F_2 = F$: A hipótese *existência* disponibiliza a primeira inclusão $F \subset F_1 + F_2 \subset F$ e a segunda vale como $F_1, F_2 \subset F$.

$F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$: Seja $f \in F_1 \cap F_2$, a mostrar $f = \mathcal{O}$. Note que $f \in F$ como $F_1, F_2 \subset F$. Então segundo a propriedade do vetor nulo

$$\underbrace{f}_{\in F_1} + \underbrace{\mathcal{O}}_{\in F_2} = f = \underbrace{\mathcal{O}}_{\in F_1} + \underbrace{f}_{\in F_2} \tag{A.2.1}$$

Mas pela hipótese *unicidade* escrever f como soma de um elemento de F_1 e um elemento de F_2 é único, então $f = \mathcal{O}$ e $\mathcal{O} = f$. \square

A.3 Bases – SLH

Teorema A.3.1 (Teorema 3.1.11). *Dado uma matriz $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K})$. Se tem menos linhas (equações) como colunas (incógnitas), em símbolos $m < n$, então o sistema linear homogêneo (SLH)*

$$(*) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

admite soluções $x = (x_1, \dots, x_n)$ não triviais (não todos x_j nulos).

Demonstração. Se todos os coeficientes a_{ij} são nulos, então todos os elementos $x \in \mathbb{K}^n$ são soluções. Sejam então não todos coeficientes nulos: A prova usa indução sobre o número m de equações.

$m = 1$: Em $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$ temos pelo menos dois incógnitas segundo nossa hipótese $n > m = 1$. Além disso, pelo menos um dos coeficientes é não-nulo, dizemos $a_{1n} \neq 0$ (caso fosse um outro renomeamos eles). Então

$$\left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{a_{11}}{a_{1n}}x_1 - \dots - \frac{a_{1,n-1}}{a_{1n}}x_{n-1} \right)$$

é uma solução para cada um $(x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{K}^{m-1}$.

$m - 1 \Rightarrow m$: Caso todos os coeficientes da última equação em (*) são nulos, então as primeiras $m - 1$ equações tem uma solução não-trivial x pela hipótese da indução (x também resolve a última equação: os coeficientes dela são nulos).

Suponha então que pelo menos um coeficiente da última equação em (*) não é nulo, dizemos $a_{mn} \neq 0$. Nas primeiras $n - 1$ equações de (*) substitua x_n por

$$x_* := -\frac{a_{m1}}{a_{mn}}x_1 - \dots - \frac{a_{m,n-1}}{a_{mn}}x_{n-1}$$

para obter um SLH de $m - 1$ equações a $\tilde{n} := n - 1 > m - 1$ incógnitas. O qual tem uma solução $(x_1, \dots, x_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ pela hipótese $m - 1$ da indução. Verifica-se que $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_*)$ é uma solução não-trivial de (*). \square

A.4 Transformações lineares

Lema A.4.1 (Lema 4.3.10). *Trabalhamos no plano Π identificado com \mathbb{R}^2 mediante um sistema ortogonal de coordenadas. A projeção ortogonal sobre a reta L_a é denotada de $P = P_{L_a} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e dada por (4.3.2). Sua matriz é*

$$\mathbf{p}_a := [P_{L_a}] = \frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4.1})$$

onde $[P_{L_a}] := [P_{L_a}]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$ denota a matriz em respeito à base canônica.

Demonstração. Seja $a \in \mathbb{R}$. Dado um elemento $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, denota sua imagem sob P de $(X, Y) := Pv \in L_a = \{(x, ax) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Assim X e Y são funções de (x, y) e $Y = aX$. Resta determinar a função $X(x, y)$. Vamos provar

$$X(x, y) = \frac{1}{1+a^2}x + \frac{a}{1+a^2}y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (\text{A.4.2})$$

Segundo o Teorema de Pitágoras a distância $\text{dist}(\mathcal{O}, v)$ entre a origem $\mathcal{O} = (0, 0)$ e o vetor $v = (x, y)$ é dada por $\sqrt{x^2 + y^2}$. Assim, usando Pitágoras de novo na

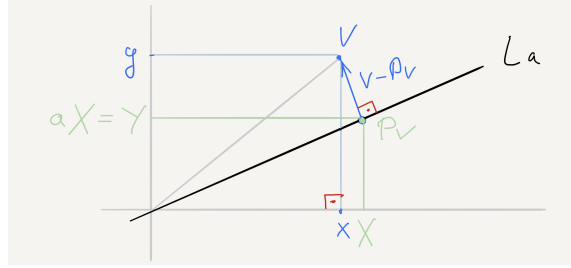


Figura A.1: Dois ângulos retângulos - usando Pitágoras duas vezes

igualdade dois, veja Figura A.1, obtemos

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= \text{dist}(\mathcal{O}, v)^2 \\
 &= \text{dist}(\mathcal{O}, Pv)^2 + \text{dist}(v, Pv)^2 \\
 &= X^2 + (aX)^2 + (\text{comprimento}^2 \text{ do vetor } v - Pv = (x - X, y - aX)) \\
 &= X^2 + (aX)^2 + (x - X)^2 + (y - aX)^2 \\
 &= X^2 + (aX)^2 + x^2 - 2xX + X^2 + y^2 - 2aYX + a^2X^2
 \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$X(x, y)^2(1 + a^2) = X(x, y)(x + ay)$$

Caso $X(x, y) \neq 0$. Divida por $X(x, y)$ e $1 + a^2$ para obter (A.4.2).

Caso $X(x, y) = 0$. Então $Y(x, y) = aX(x, y) = 0$ e assim $Pv = (X, Y) = \mathcal{O}$. Como a projeção é ortogonal o ponto v deve ser localizado na reta $(L_a)_{\mathcal{O}}^{\perp}$ ortogonal a L_a e passando a origem. Mas esta reta resulta de L_a mediante uma rotação por $\pi/2$ (90°), em símbolos

$$(L_a)_{\mathcal{O}}^{\perp} = R_{\pi/2}L_a = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ at \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \{(-at, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Então v é da forma $(-at, t)$ para um $t \in \mathbb{R}$ e tal par satisfaz (A.4.2) também.

Para concluir note-se que os coeficientes na última identidade de

$$Pe_1 = P(1, 0) = (X(1, 0), Y(1, 0)) = X(1, 0)e_1 + Y(1, 0)e_2$$

disponibiliza a primeira coluna da matriz (A.4.1) e analogamente

$$Pe_2 = X(0, 1)e_1 + Y(0, 1)e_2$$

disponibiliza a segunda coluna. Para obter os valores de X e Y nos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ usa-se a fórmula (A.4.2). \square

Índice Remissivo

- A^{-1} inversa, 45, 66
 $Av := A(v)$ operador linear, 41
 $A_f^B = A_f \in \mathcal{L}(E, F)$, 46
 $AX := \{Ax \mid x \in X\}$ imagem do conjunto X sob A , 61
 $C^0(\mathbb{R})$ funções contínuas $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 24
 $C^k(\mathbb{R})$ funções k vezes continuamente diferenciáveis, 24
 $C^\infty(\mathbb{R})$ funções suaves $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 24
 CL combinação linear, 20
 CLe combinação linear estrita, 20
 $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ espaço vetorial, 12
 $e_i \in \mathbb{K}^n$ i -ésimo vetor canônico, 14
 $\mathcal{E}^n := \{e_1, \dots, e_n\}$ base canônica, 14, 26, 30
 $\mathcal{E}^\infty := \{e_1, e_2, \dots\}$ base canônica, 14, 26, 30
 $\mathcal{E}^{m \times n} := \{\mathbf{e}^{ij}\}_{i,j}$ base canônica, 30
 $\mathbf{e}^{ij} \mp = \frac{1}{2}(\mathbf{e}^{ij} \mp (\mathbf{e}^{ij})^t) \in \mathcal{A}/\mathcal{S}$, $i \leq j$, 38
 $\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) := \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{K}\}$, 16
 $\text{Fix}(f)$ conjunto dos pontos fixos, 73
 $\text{AFix}(f)$ conjunto dos pontos anti-fixos, 73
 $(G, *)$ grupo, 8
 H_α hiperplano no \mathbb{R}^n , 24, 30, 35, 72
 $\text{Im}(A)$ imagem, 61
 $I = I_E$ operador identidade, 43
 $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ corpo, 9
 $\mathbb{K}v$ reta passando v e \mathcal{O} , 24
 LI/LD linearmente in/dep., 21
 $\mathcal{L}(E, F)$ operadores lineares, 43
 $\mathcal{L}(E)$ operadores lineares em E , 43
 $M(m \times n)$ matrizes $m \times n$, 14, 28, 35
 \mathcal{A}, \mathcal{S} matrizes anti-/simétricas, 28
 $N(A)$ núcleo, 61
 \mathcal{O} vetor nulo, 12
 (oe) operações elementares, 17
 $\mathcal{P}(\mathbb{K})$ polinômios, 17
 $\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ polinômios reais e aqueles do grau $\leq n$, 24, 35
 $P = P_{L_a} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ projeção ortogonal sobre a reta L_a , 57
 $\mathbf{p}_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ matriz da projeção ortogonal, 58
 $P_{F_1, F_2} : E \rightarrow F_1$ projeção sobre F_1 , 74
 \mathbb{R}^n listas ordenadas de n reais, 13, 35
 \mathbb{R}^∞ sequências reais, 14
 \mathbb{R}_0^∞ quase todos membros nulos, 14, 24, 35
 $R_\theta \in \mathcal{L}(\Pi_{\mathcal{O}})$ rotação no plano, 54
 $\mathbf{r}_\theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ matriz da rotação, 56
 $S = S_{L_a} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ reflexão em torno da reta L_a , 58
 $\mathbf{s}_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ matriz da reflexão, 58
 SL sistema linear, 18, 62
 SLH sistema linear homogêneo, 18, 32, 101
 TL transformação (ou operador) linear, 41
 $\mathbb{1} = \mathbb{1}_n = \text{diag}(1, \dots, 1) \in M(n \times n; \mathbb{K})$ matriz identidade, 15
 $\forall, \exists, \exists!$ “para todos”, “existe”, “existe unicamente”, 3
 $\langle X \rangle$ subespaço gerado por X , 25
 $\langle v \rangle := \langle \{v\} \rangle$, 25
 $|X|$ número de elementos de um conjunto X , 7
 $|\alpha|$ absoluto de um número α , 3
 $\mathbf{a} = (a_{ij})$ matriz, 15
 $\mathbf{a}^t = (a_{ij}^t = a_{ji})$ matriz transposta, 15
 a_{ij} i -ésima linha, j -ésima coluna, 15
 $\mathbf{a}_{\bullet k}, \mathbf{a}_{k \bullet}$ k -ésima coluna, linha, 15

- \mathbf{a}_{esc} matriz escalonada, 17
- \simeq isomorfismo, 66
- $:=$ “definido por”, 3
- E^* espaço dual de E , 44
- $[a, b]$, (a, b) intervalo fechado, aberto, 3
- $[\mathbf{a} : b]$ matriz aumentada, 18
- $[v]_{\mathcal{B}}$ vetor coordenada do vetor v na base \mathcal{B} , 32
- $[v]_{\mathcal{B}}$ vetor coordenada do vetor v na base \mathcal{B} , 78
- $[v] := [v]_{\mathcal{E}_m}$ na base canônica, 32
- $[v] := [v]_{\mathcal{E}_m}$ na base canônica, 78
- $[A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$ matriz de $A \in \mathcal{L}(E, F)$, 79
- $[A] = [A]_{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m}$ nas bases canôn., 51
- $[A]_{\mathcal{U}} := [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{U}}$, 79
- $[A] := [A]_{\mathcal{E}}$ na base canônica, 79
- $X \times Y$ produto cartesiano, 7
- $Y^{\times k} := Y \times \dots \times Y$, 7, 35
- $F \oplus G$ soma direta, 27
- $X + Y$ soma de subconjuntos, 27
- $\text{tr } \mathbf{a} := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ traço, 38
- $\dot{\cup}$ união de conjuntos disjuntos, 7
- adição
 - de funções, 16
- base, 29
 - canônica, 14, 26, 30
 - das matrizes $m \times n$, 30
 - ordenada, 29, 45
- bijetivo, 45, 66
- combinação linear, 20
 - ‘de vetores’, 20
- combinação linear estrita (num conjunto), 20
- composição
 - de funções, 12
- comutar
 - matrizes, 16
- comutativo
 - diagrama $-$, 77
- conjunto, 7
 - finito, 7
 - gerando, 25
 - linearmente independente LI, 21
 - ordenado, 7
 - que gera, 25
- conjuntos
 - interseção de $-$, 7
 - união de $-$, 7
- convolução, 43
- coordenadas
 - de um vetor, 32
 - no plano, 2
- corpo, 9
- decomposição
 - de vetores, 27
- diagrama
 - comutativo, 77
- eixo, 2
- elemento neutro
 - aditivo, 9
 - multiplicativo, 9
- escalares, 13
- espaço dual E^* , 44
- espaço vetorial, 12
 - base, 29
 - real ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), 44
 - subespaço, 23
 - trivial, 13
- fechado sob uma operação, 23
- funções
 - adição de $-$, 16
 - composição de $-$, 12
 - multiplicação de $-$, 12
- funcional
 - \mathbb{K} -linear, 44
 - linear, 44
 - real, 44
- grau
 - de um polinômio, 17
- grupo, 8
 - abeliano, 8
- hiper, 35
- hiperplano, 24, 30, 72
- homomorfismo, 41

- imagem, 61
- independência linear
 - de um conjunto, 21
- inimigo da clareza
 - desnecessidade, 20
- injetivo, 45
- interseção de conjuntos, 7
- inversa, 66
 - à direita, 63
 - à esquerda, 65
 - de um operador linear, 45
- invertível, 66
 - transformação linear, 45
- isomorfismo, 45, 66
 - inversa, 45
- lei
 - da corte, 8
- linearidade, 41
- linearmente in/dependente, 21
- matriz
 - anti-/simétrica, 28
 - aumentada, 18
 - de passagem, 80
 - de passagem entre bases, 77
 - de uma transformação linear, 51, 79
 - entradas da $-$, 15
 - escalonada, 17
 - pivôs, 17
 - identidade $\mathbb{1}$, 15
 - linhas e colunas, 15
 - operações elementares numa $-$, 17
 - produto $-$, 15
 - projeção ortogonal, 58
 - reflexão, 58
 - rotação, 56
 - traço de uma $-$ quadrada, 38
 - transposta \mathbf{a}^t , 15
- matrizes
 - comutam, 16
 - triangulares
 - inferiores, 38
- monômios, 26, 30
- multiplicação
 - de funções, 12
- núcleo, 61
- operações elementares numa matriz, 17
- operador
 - identidade, 43
- operador linear, 41
 - em E , 43
 - inversa, 45
- origem, 14
- par
 - de subespaços complementares, 73
- pivôs, 17
- polinômio, 17
 - grau de um $-$, 17
- ponto
 - anti-fixo, 73
 - fixo, 73
- produto
 - cartesiano, 7, 35
 - matriz, 15
- projeção, 73
 - ortogonal, 57
 - paralelo, 74
- projeção ortogonal
 - matriz da $-$, 58
- reflexão
 - em torno de uma reta, 58
 - matriz da $-$, 58
- relação
 - de equivalência, 67
- rotação, 54
 - matriz de $-$, 56
 - no plano, 1
- sistema de
 - coordenadas
 - no plano, 2
- sistema de coordenadas, 78
- sistema linear (SL), 18, 62
 - inogeneidade, 18
 - resolver “de baixo para cima”, 19
- sistema linear homogêneo (SLH), 18, 32

- sobrejetivo, 45
- soma
 - de subconjuntos, 27
 - direta, 27
- subconjunto
 - translação de $-$, 27
- subconjuntos
 - herdam LI, 31
 - soma de $-$, 27
- subespaço
 - vetorial, 23
- subespaços
 - complementares, 73
 - soma direta de $-$, 27
- teorema
 - decomposição única de vetores, 27
- traço, 38
- transformação linear
 - inversa, 66
 - invertível, 66
 - matriz de uma $-$, 79
- transformação linear (TL), 41
- translação, 27
- união de conjuntos, 7
- verdade vazia, 21
- vetor
 - decomposição, 27
- vetor coordenada, 32, 78
- vetor nulo, 12
- vetores, 13