Álgebra Linear

Notas da aula[1]
MA327 2020-2

manuscrito em progresso

Joa Weber
UNICAMP

16 de setembro de 2020

[1] versão final estará la: www.math.stonybrook.edu/~joa/PUBLICATIONS/MA327.pdf

Sumário

Aula 1

Introdução

Convenções

Cor cinza. Parágrafos e maiores partes de texto em cinza indicam matéria avançada direcionado às turmas A e B do "cursão", mas não às outras turmas. Palavras individuais em cinza geralmente são nomes ou informações complementares.

Notações

Comentário 0.0.1 (Números)**.** Vamos trabalhar com os seguintes **números**

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$	naturais
$\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	inteiros
$\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$	racionais
$\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ "a reta real"	reais
$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ "o plano complexo"	complexos

Denotamos **intervalos** fechados de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e abertos de $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

Conceito e motivação

Àlgebra Linear

é o estudo dos espaços lineares e das transformações lineares.

Espaço vetorial é uma outra palavra para espaço linear.

Exemplo 0.0.2 (Flechas equivalentes no plano)**.** Seja F o conjunto das flechas equivalentes v (mesma direção e comprimento) no plano Π munido das operações de multiplicar uma flecha v com um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ e de adicionar duas flechas v e w.

Multiplicação (escalar). Pela definição αv é a flecha na direção de v cujo comprimento é α vezes aquele de v (muda-se a direção caso o número α é negativo).

Adição (vetorial). Pela definição $v + w$ é a flecha cujo ponto inicial é aquela de v e cujo ponto termino p é obtido depois fazer uma translação de w movendo o ponto inicial de w no ponto termino de v. Então p é definido como o ponto termino do novo w.

Tal F é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$ e um exemplo de uma transformação linear em F é dado pela rotação $r_\theta : F \to F$ de uma flecha v pelo angulo θ em torno do ponto inicial.

Exemplo 0.0.3 (Pares de números reais)**.** Seja $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ o conjunto de todas listas ordenadas de dois membros reais munido da adição membro-por-membro e multiplicação com um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ também membro-por-membro. Então $\mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Comentário 0.0.4 (Identificação dos conjuntos e operações – isomorfismo)**.** Os dois exemplos anteriores são "iguais" no sentido seguinte. Suponhamos que na reta podemos medir a distância 1. No plano Π escolha um **eixo** OX, ou seja uma reta com dois pontos diferentes O e X da distância 1, e um segundo eixo OY cujo primeiro ponto O é aquele do OX e qual intersecta OX exatamente no ponto O. Uma tal escolha de dois eixos é chamado um **sistema de coordenadas** no plano, símbolo OXY.

Observe-se que um eixo OX chega com uma direção (de O para X) e com um comprimento unitário (o comprimento do segmento entre O e X). Uma escolha de coordenadas OXY no plano Π nos das uma aplicação

$$F \to \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto (x, y)$$

a qual identifica os elementos de F com os elementos de $\mathbb{R}^2$ unicamente (bijetora) – e ainda é **linear**, ou seja compatível com as duas operações no domínio e as duas no contradomínio. Uma tal aplicação (bijetora linear) é chamado um **isomorfismo** entre espaços vetoriais. Deixamos ao leitor definir esta aplicação.

[Dica: Os pontos O, X e O, Y dão duas flechas. Represente um elemento de F por uma flecha equivalente com ponto inicial O. Pensa num paralelogramo tal que O e o ponto termino da flecha equivalente são dois vértices opostos.]

Exemplo 0.0.5 (Funções continuas e integração)**.** Sejam $a < b$ dois números reais. Então o quadruplo $V = (C^0([a, b], \mathbb{C}), +, \cdot, \mathbb{R})$ que é composto do conjunto das funções contínuas $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ munido com as duas operações de adicionar $f + g$ duas funções e multiplicar αf uma função com um numero real $\alpha \in \mathbb{R}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Também $W = (\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R})$ composto das números reais $\mathbb{R}$ munido das operações óbvias é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Integração $T : V \to W$, $f \mapsto \int_a^b f(x)\, dx$, é compatível com as duas adições e multiplicações (em V e em W) no sentido que

$$T(f + g) = Tf + Tg, \qquad T(\alpha f) = \alpha Tf$$

para todos os vetores $f, g \in V$ e escalares α do corpo $\mathbb{R}$. Uma aplicação T entre espaços vetoriais qual respeita as duas operações no domínio e no contradomínio é chamada uma transformação linear.

Parte I

Teoria dos espaços vetoriais

Capítulo 1

Espaços vetoriais

1.1 Axiomas

1.1.1 Grupo

Comentário 1.1.1. Um **conjunto** X é composto de elementos os quais são dois-a-dois diferentes. Consequentemente $\{2,3\} \cup \{2\} = \{2,3,2\} = \{2,3\}$. Um conjunto não é ordenado, por exemplo $\{1,2\} = \{2,1\}$. O conjunto que não contem nenhum elemento é chamado **o conjunto vazio**, símbolo $\emptyset$. Denotamos de $|X|$ o **número de elementos de um conjunto** quando o número é finito. Um **subconjunto** de um conjunto X é um conjunto A tal que cada um elemento de A é elemento de X, notação $A \subset X$. Observe que conforme esta definição, o conjunto vazio $\emptyset$ é subconjunto de todos conjuntos: para todo conjunto X temos $\emptyset \subset X$.

Definição 1.1.2. Um conjunto não vazio $G \neq \emptyset$ munido de uma operação

$$* : G \times G \to G, \quad (f, g) \mapsto f * g$$

é chamado um **grupo**, notação $(G, *)$, se valem os três axiomas

1. $f*(g*h) = (f*g)*h$ para todos os elementos $f, g, h \in G$ (associatividade)
2. existe um elemento $e \in G$ t.q. $e * g = g$ e $g * e = g$ (elemento neutro)
3. para todo $g \in G$ existe um elemento, notação $\bar{g} \in G$, t.q. (inverso)

$$g * \bar{g} = e, \quad \bar{g} * g = e$$

Em palavras,

> *um grupo é um conjunto não vazio munido de uma operação associativa, contendo um elemento neutro, e tal que qualquer elemento admite um inverso.*

O seguinte lema diz que um grupo G tem exatamente um elemento neutro, notação comum e, e cada um elemento g de G tem exatamente um inverso, notação $\bar{g}$. Ás vezes é comum e útil escrever o elemento neutro na forma 0 ou 1 e os inversos na forma $-g$ ou g^{-1} — veja os dois exemplos em Exercício 1.1.5 a).

Lema 1.1.3. *Seja $(G, *)$ um grupo. Então vale o seguinte.*
1) *O elemento neutro e* 2) *os elementos inversos são únicos.*
3) *Para todos os elementos $f, g, h \in G$ vale:*
a) $f * g = f * h \;\Rightarrow\; g = h$ *(lei da corte)*
b) $f * g = f \;\Rightarrow\; g = e$
c) $f * g = e \;\Rightarrow\; g = \bar{f}$

Note que b) e c) são consequências imediatas de a).

Definição 1.1.4. Um grupo $(G, *)$ é chamado de **abeliano** se a ordem dos dois elementos na operação nao importa, em símbolos $f*g = g*f$. (comutatividade)

Exercício 1.1.5. Mostre que
a) sao grupos (ainda abelianos): $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{R}, \cdot)$
b) nao sao grupos: $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{N}_0, +)$ e $(\mathbb{Z}, \cdot)$
c) nao sao grupos abelianos: as matrizes 3×3 e as rotações em $\mathbb{R}^3$.

1.1.2 Corpo

Definição 1.1.6. Um conjunto $\mathbb{K}$ munido de duas operações[1]

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K} \qquad\qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$$

é chamado um **corpo** se valem os três axiomas

1. $(\mathbb{K}, +)$ é um grupo abeliano.
   (O *elemento neutro* seja denotado 0 e $-\alpha$ denota o *inverso* de $\alpha \in \mathbb{K}$.)

2. $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano.
   (O *elemento neutro* seja denotado 1 e α^{-1} denota o *inverso* de $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$.)

3. Distributividade: $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$.
   (É costume escrever $\alpha\beta$ em vez de $\alpha \cdot \beta$.)

Para distinguir chamamos o elemento neutro da primeira operação – para a qual temos usado o símbolo "+" ainda que geralmente não tem nada ver com adição de números – o **elemento neutro aditivo**. Analogamente chamamos o elemento neutro da segunda operação por causa do símbolo usado "·" o **elemento neutro multiplicativo**. Como é feio escrever $\alpha + (-\beta)$ para a soma de um elemento com um elemento inverso aditivo definimos $\alpha - \beta := \alpha + (-\beta)$. Isso é uma abreviação só, não é nem tem diferença. Analogamente simplificamos a notação escrevendo α/β em vez de $\alpha\beta^{-1}$.

[1] as quais vamos batizar aos nomes + e · ainda que geralmente não tem nada ver com adição e multiplicação de números, mas esta escolha é motivado pelos exemplos principais onde tem; veja Exemplo 1.1.9

Corolário 1.1.7. *Um corpo contem pelo menos dois elementos.*

Demonstração. Pelas axiomas 1 e 2 cada uma operação tem um elemento neutro as quais não podem ser iguais por causa de 2. □

Lema 1.1.8. *Seja* $\mathbb{K}$ *um corpo e* $0 \in K$ *é o elemento neutro da adição. Então* $0\beta = 0$ *e* $\beta 0 = 0$ *para todos os elementos* $\beta \in \mathbb{K}$.

Exemplos de corpos

Exemplo 1.1.9. Sao corpos
a) $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$
b) $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ onde as operações sao definidas assim

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)$$
$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(bc + ad)$$

Exercício 1.1.10. Os números inteiros $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ não formam um corpo.

Exemplo 1.1.11 (Adição e multiplicação modulo n)**.** Dado um número natural $n \in \mathbb{N}$, defina no conjunto $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \dots, n-1\}$ as duas operações

$$a +_n b := a + b \pmod{n}, \qquad a \cdot_n b := ab \pmod{n}$$

para todos os elemento $a, b \in \mathbb{Z}_n$.[2]

Fato. $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ é um corpo $\iff$ n é um número primo.

Para valores pequenos de n pode-se checar da mão se $\mathbb{Z}_n$ é um corpo ou não. Só precisa-se calcular as tabelas de adição e de multiplicação. Vamos ilustrar isso num exemplo.

Exemplo 1.1.12 ($\mathbb{Z}_4$ não é um corpo.)**.** Para checar se $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ e $(\mathbb{Z}_4 \backslash \{e_{+_4}\}, \cdot_4)$ são grupos abelianos é útil calcular as tabelas de adição e de multiplicação.

• $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ é um grupo abeliano? Para responder calculamos os valores na tabela

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

São 4 passos:

1. Determinar o elemento neutro de $+_4$: Checamos se a linha mais em cima $0\,1\,2\,3$ tem uma cópia na tabela. Sim, tem $0\,1\,2\,3$. Neste caso o elemento em frente da cópia é o elemento neutro de $+_4$, certo? No nosso caso $e_{+_4} = 0$. Se não tem copia, não tem elemento neutro, então não temos um grupo.

[2] Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\ell \in \mathbb{Z}$ um número inteiro. Pela definição o elemento $\ell \pmod{n} \in \mathbb{Z}_n$ é o resto $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ que falta depois você "enche" ℓ com múltiplos de n. Em símbolos, $l \pmod{n} := r$ onde $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ é o único elemento tal que $l = kn + r$ para um $k \in \mathbb{Z}$.

2. Inversos: Na cada dos (neste caso 4) linhas de valores na tabela localiza o elemento neutro 0 (se existir). Então o elemento g em frente da linha de 0 e o elemento em cima da coluna de 0, notação $\bar{g}$, são inversos um do outro. Caso uma linha nao contem 0, então este g não tem inverso, então não temos um grupo. No nosso caso todo elemento g tem um inverso:

g	$\bar{g}$ (denotado $-g$)
0	0
1	3
2	2
3	1

3. Associatividade: Calculando caso por caso temos que checar se $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$ para todas as possibilidades. No nosso caso vale.
4. Grupo abeliano (comutatividade): Vale se a tabela é simétrica em respeito à diagonal. No nosso caso vale.

Nosso resultado é que $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ é um grupo abeliano.

• $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$ é um grupo abeliano? Para responder calculamos a tabela

$\cdot_4$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	0	2
3	3	2	1

Como o valor 0 não é elemento de $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ a multiplicado $\cdot_4$ não é uma operação em $\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$, então não pode ser um grupo.

Ainda assim vamos repetir os 4 passos para $\cdot_4$ (em vez de $+_4$) para ver se tem outras falhas ainda. As respostas são:

1. Elemento neutro de $\cdot_4$: Tem, é o elemento $e_{\cdot_4} = 1$.
2. Inversos: Na cada dos (neste caso 3) linhas de valores na tabela localizamos o elemento neutro 1 (se existir). No nosso caso

g	$\bar{g}$ (denotado g^{-1})
1	1
2	não tem!
3	3

o elemento 2 não tem um inverso e já por isso não temos um grupo.

3. Associatividade: Ainda que a formula $f +_4 (g +_4 h) = (f +_4 g) +_4 h$ vale, os valores não são todos em $Z_4 \setminus \{0\}$).
4. Grupo abeliano (comutatividade): A tabela é simétrica em respeito à diagonal, mas os valores não são todos em $Z_4 \setminus \{0\}$.

Nosso resultado é que $(\mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}, \cdot_4)$ não é um grupo abeliano.

Exercício 1.1.13. Seja $n = 6$:

1. Calcule a tabela da adição e da multiplicação no caso $\mathbb{Z}_6$.
2. Identifique os elementos neutros da adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_6$. Eles sempre existem?
3. Para todo $a \in \mathbb{Z}_6$ identifique o elemento inverso aditivo.
4. Para todo $a \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$ identifique o elemento inverso multiplicativo, se existir.
5. Cheque que $\mathbb{Z}_6$ não é um corpo. Quais dos axiomas não valem?

Materia avançada

Motivado pelas perguntas da Turma C na 1ª aula 2016-2 vamos dar um exemplo de um corpo onde a primeira operação não está relacionado à adição de números nem a segunda à multiplicação de números.

Exercício 1.1.14 (Um corpo $(P, \cdot, \circ)$ onde $\cdot$ não é adição e $\circ$ não é multiplicação)**.** Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a função $p_\alpha : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $x \mapsto x^\alpha$. Seja o conjunto

$$P := \{p_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

composto de todas funções $p_\alpha(x) = x^\alpha$ com $\alpha \in \mathbb{R}$ e munido das operações

$$\begin{aligned} \cdot : P \times P &\to P, & \circ : P \times P &\to P, \\ (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \cdot p_\beta & (p_\alpha, p_\beta) &\mapsto p_\alpha \circ p_\beta \end{aligned}$$

chamado de **multiplicação**[3] e **composição**[4] de funções, respectivamente. Mostre que:

1. As duas operações são bem definidos: $p_\alpha \cdot p_\beta \in P$ e $p_\alpha \circ p_\beta \in P$, de fato
$$p_\alpha \cdot p_\beta = p_{\alpha+\beta}, \qquad p_\alpha \circ p_\beta = p_{\alpha\beta}.$$
2. $(P, \cdot)$ é um grupo abeliano com elemento neutro p_0.
3. $(P \setminus \{p_0\}, \circ)$ é um grupo abeliano com elemento neutro p_1.
4. Distributividade: $(p_\alpha \cdot p_\beta) \circ p_\gamma = (p_\alpha \circ p_\gamma) \cdot (p_\beta \circ p_\gamma)$, $\forall p_\alpha, p_\beta, p_\gamma \in P$.

[3] $(p_\alpha \cdot p_\beta)(x) := p_\alpha(x) \cdot p_\beta(x)$
[4] $(p_\alpha \circ p_\beta)(x) := p_\alpha(p_\beta(x))$

1.1.3 Espaço vetorial

Definição 1.1.15. Um **espaço vetorial sobre um corpo**[5] é um quádruplo $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ composto de um conjunto E, um corpo $\mathbb{K}$, e duas operações

$$+ : E \times E \to E, \qquad\qquad \cdot\ : \mathbb{K} \times E \to E$$
$$(v, w) \mapsto v + w \qquad\qquad (\alpha, v) \mapsto \alpha v$$

chamado de *adição* e *multiplicação escalar*, respectivamente, tal que vale

1. $(E, +)$ é um grupo abeliano.
   (O *elemento neutro* é denotado $\mathcal{O}$ e chamado o **vetor nulo**.)

2. Distributividade: $\begin{cases} (\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v \\ \alpha(v+w) = \alpha v + \alpha w \end{cases}$

3. Compatibilidade: $\begin{cases} (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) \\ 1v = v \end{cases}$

Onde as identidades tem que ser válidos para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e todos $v, w \in E$. Chama-se **escalares** os elementos do corpo $\mathbb{K}$ e **vetores** os elementos de E.

Lema 1.1.16. *Seja $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ um espaço vetorial e $0 \in \mathbb{K}$ e $\mathcal{O} \in E$, então:*

(i) $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O}$ *para todos os escalares* $\alpha \in \mathbb{K}$.

(ii) $0v = \mathcal{O}$ *para todos os vetores* $v \in E$.

(iii) *Para todo escalar* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e todo vetor* $w \in E$ *são equivalentes:*

$$\alpha w = \mathcal{O} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0 \text{ ou } w = \mathcal{O}$$

Corolário 1.1.17 (Compatibilidade dos inversos aditivos com multiplicação)**.** *Para todo escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ e todo vetor $w \in E$ vale:*

a) $(-\alpha)w = -(\alpha w)$

b) $\alpha(-w) = -(\alpha w)$

[5] fala-se abreviando "*E é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$" ou ainda "*E é um espaço vetorial*".

Aula 2

Exemplos de espaços vetoriais

1.2 Combinação linear e independência linear

Exercício 1.2.1. Quais dos seguintes conjuntos X_i de vetores de $\mathbb{R}^2$ são ou não são conjuntos linearmente independentes (LI)? Explique porque são ou não são.

1. Elementos de X_1: os vetores $(1, 1)$ e $(-1, -1)$
2. $X_2 := \{(2, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 2)\}$
3. Escolha dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$ e defina $X_3 := \{u, v, (1, 1)\}$.

Índice Remissivo