Departamento de Matemática
Imecc Unicamp
Joa Weber

Álgebra Linear

MA327 – Turma E

Lista 3a – Subespaços invariantes e autovalores/vetores

Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ de dimensão n e seja $A \in \mathcal{L}(E)$.

Motivação. A matriz $n \times n$ (quadrada) $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{B}}$ do operador linear A óbviamente depende da base $\mathcal{B}$ de E. Dado A, existem bases tal que a matriz $\mathbf{a}$ seja de uma forma simples? Por exemplo, de forma diagonal? Vamos ver que todo subespaço invariante por A gera um bloco diagonal em $\mathbf{a}$.
Uma classe ótima de operadores A são aqueles as quais admitem uma base composto de autovetores. Neste caso $\mathbf{a}$ é uma *matriz diagonal* (todas entradas fora da diagonal são nulas) e na diagonal mesma encontram-se os autovalores de A.

Definição 1. Um subespaço F de E é chamado de **subespaço invariante por $\boldsymbol{A \in \mathcal{L}(E)}$** se o subespaço AF de E ainda é contido em F mesmo:

$$AF := \{Af \mid f \in F\} \subset F.$$

Neste caso a função $A|_F : F \to F$, $f \mapsto Af$, é um operador linear em F chamado de **restrição de $\boldsymbol{A}$** a F.

Definição 2. Um vetor <u>*não-nulo*</u> $v \in E \setminus \{0\}$ é chamado de **autovalor** de $A \in \mathcal{L}(E)$ caso *o vetor Av de E fosse um múltiplo de v*, em símbolos:

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} : \quad Av = \lambda v.$$

Neste caso λ é chamado **autovalor** de A e $v =: v_\lambda$ *um*[1] **autovetor associado a $\boldsymbol{\lambda}$**.

Exercícios.

a) Dado $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$, determine os subespaços de $\mathbb{R}^3$ invariantes por

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad v \mapsto a \times v,$$

onde o produto vetorial $\times$ é definido na Lista 2c.

b) Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E)$ operadores que *comutam*: $AB = BA$. Prove que

   i) $\mathrm{N}(B)$ e $\mathrm{Im}(B)$ são subespaços invariantes por A;

   ii) Se F é um subespaço invariante por A, então $BF := \{Bf : f \in F\}$ é ainda um subespaço invariante por A.

[1]Exercício: Se v_λ é autovetor de $A \in \mathcal{L}(E)$, então tudo múltiplo não-nulo de v_λ é.

c) Dado $A \in \mathcal{L}(E)$ e um polinômio $p = p(x)$ prove que o núcleo e a imagem do operador[2] $p(A) \in \mathcal{L}(E)$ são subespaços invariantes por A.

d) Determine os autovetores e os autovalores do operador derivação

$$D : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), \quad p(x) \mapsto p'(x) := \tfrac{d}{dx} p(x)$$

no espaço vetorial dos polinômios $p = p(x)$.

e) Seja $A \in \mathcal{L}(E)$, prove que

   i) A invertível $\iff$ A não possui autovalor 0;

   ii) Se A é invertível, então os autovetores de A e A^{-1} coincidem. E os autovalores?

f) Seja $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o operador linear cuja matriz na base canônica tem todos os elementos iguais a 1. Prove que

   i) $\operatorname{posto}(A) = 1$;

   ii) $\mathbb{R}^n = \mathrm{N}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$;

   iii) os autovalores de A são 0 e n;

   iv) os autovetores de A pertencem a $\mathrm{N}(A)$ ou a $\mathrm{Im}(A)$.

   Exiba uma base de $\mathbb{R}^n$ na qual a matriz de A tem $n^2 - 1$ zeros.

g) O **determinante** de uma matriz quadrada $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ é por definição $\det \mathbf{a} = \alpha\delta - \gamma\beta$. Prove que

   i) se $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, então $\det(\mathbf{am}) = \det \mathbf{a} \cdot \det \mathbf{m}$ [cálculo direto];

   ii) $\det \mathbf{a} \neq 0 \iff \mathbf{a}$ é invertível;

   iii) $\det(\mathbf{m}^{-1}\mathbf{am}) = \det \mathbf{a}$, para todo $\mathbf{m}$ invertível.
   [Logo todas as matrizes de um operador linear $A : E \to E$, com $\dim E = 2$, têm o mesmo determinante, o qual é chamado de *determinante do operador* A denominado $\det A$ ($:= \det[A]_{\mathcal{U}}$ para qualquer base $\mathcal{U}$ de E).]

---

[2] Dado um **polinômio** $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_n x^n$, e um operador linear $A : E \to E$, então definimos o operador linear

$$p(A) := a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 \cdots + a_n A^n : E \to E$$

onde $I : E \to E$, $v \mapsto v$, é o operador identidade em E.

PARTE NOVO:

h) Seja $A \in \mathcal{L}(E)$ onde $\dim E < \infty$, $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$ e cada F_i é um subespaço invariante por A. Tome uma base $\mathcal{V}$ de E que seja uma união de bases das F_i. Determine a forma da matriz de A na base $\mathcal{V}$.

i) Seja $A \in \mathcal{L}(E)$. Se E possui uma base formada por autovetores de A, prove que existe também uma base de E formada por autovetores de $A^* : E \to E$. (Veja exercício anterior).

j) Seja $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (3x + y, 2x + 2y)$.

  i) Mostre que 4 e 1 são autovalores de A.

  ii) Ache uma base ordenada $\mathcal{B} = (u, v)$ de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$Au = 4u \qquad \text{e} \qquad Av = v.$$

  iii) Dada a matriz $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, ache uma matriz invertível $\mathbf{p}$ tal que

$$\mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$