Departamento de Matemática
Imecc Unicamp
Joa Weber

2º Semestre de 2019

Álgebra Linear

MA327 – Turma E

Lista 1e – Repita/pratique eliminação (MA141)

Matrizes: imagem, núcleo, posto, espaço-coluna/linha

Uma matriz (real) $m \times n$ $\mathbf{a}$ define uma transformação linear

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto \mathbf{a}x$$

onde $\mathbf{a}x$ denota o produto matriz $M(m \times n) \times M(n \times 1) \to M(m \times 1)$. O núcleo e a imagem da matriz $\mathbf{a}$ são os subespaços

$$N(\mathbf{a}) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}x = \mathcal{O}\} \subset \mathbb{R}^n$$
$$\mathrm{Im}(\mathbf{a}) := \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \; y = \mathbf{a}x\} \subset \mathbb{R}^m.$$

A dimensão da imagem é chamado de **posto** da matriz. O **espaço-coluna**(**linha**) de uma matriz é o subespaço de $\mathbb{R}^m(\mathbb{R}^n)$ composto de todas combinações lineares das colunas(linhas) da matriz. A dimensão do espaço-coluna(linha) é chamado de **posto-coluna**(**linha**) da matriz.

Fatos uteis:

- a imagem de uma matriz é igual ao espaço-coluna,[1] então posto e posto-coluna são iguais, mas de fato $\qquad \mathrm{Im}(\mathbf{a}) = \text{esp-col}(\mathbf{a})$
- os 3 postos são iguais! $\qquad \text{posto-col}(\mathbf{a}) = \text{posto-linha}(\mathbf{a})$
- o espaço-coluna de $\mathbf{a}$ é o espaço-linha da matriz transposta $\mathbf{a^t}$, e vice versa,

$$\text{esp-col}(\mathbf{a}) = \text{esp-linha}(\mathbf{a^t}), \qquad \text{esp-linha}(\mathbf{a}) = \text{esp-col}(\mathbf{a^t}).$$

Exercícios.

a) Determine o posto da matriz

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

[Dica: Calcule o posto-linha da matriz transposta. Escalonamento (modificando linhas) não muda o espaço-linha.]

[1] fácil provar

b) Calcule a dimensão do subespaço vetorial de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores

$$v_1 = (1, 1, 1, -1, 1), \qquad v_3 = (0, 1, 1, -1, -1),$$
$$v_2 = (1, -1, -1, 0, 1), \qquad v_4 = (-1, 1, 1, -1, 1).$$

Decida se o vetor $b = (6, 18, 1, -9, 8)$ pertence ou não a este subespaço.

c) Obtenha uma base para o subespaço F de $\mathbb{R}^4$ gerado pelo conjunto

$$\{(1, 2, 3, 4), (3, 4, 7, 10), (2, 1, 3, 5)\}.$$

[Dica: Use os vetores como as linhas de uma matriz. Escalonamento.]
Determine a dimensão de F.

d) Encontre uma base para o núcleo da transformação linear

$$C : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z, t) \mapsto (2x + y - z + 3t, x - 4y + 2z + t, 2y + 4z - t)\,.$$

[Dica: Calcule a matriz de C. Escalonamento. Resolve o sistema linear homogêneo resultante.]

e) Use escalonamento para resolver o sistema linear

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 1 \\ 2x + 6y + 9z &= 7 \\ 2x + 8y + 8z &= 6 \end{aligned}$$

nas incógnitas $x, y, z \in \mathbb{R}$.

f) Decida quais das matrizes possuem inversa e calcule quando existir:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}.$$