Departamento de Matemática — 2º Semestre de 2019
Imecc Unicamp
Joa Weber

Álgebra Linear

MA327 – Turma E

Lista 1b – Subespaços, combinação linear, independência linear, soma direta, matrizes

Definição 1. Um subconjunto $F \subset E$ de um espaço vetorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ é chamado um **subespaço** se vale o seguinte.

(i) $\mathcal{O} \in F$ — (F contem o vetor nulo)

(ii) $u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$ — (F é fechado sob adição)

(iii) $\alpha \in \mathbb{K}, u \in F \Rightarrow \alpha u \in F$ — (F é fechado sob multiplicação escalar)

Exercícios.

1) Quais dos seguintes subconjuntos X_j são subespaços de $\mathbb{R}^n$? Em cada caso faça um desenho e explique porque é subespaço ou não é.

   i) $X_1 := \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$;
   ii) $X_2 := \{(\alpha + 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$;
   iii) $X_3 := \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \text{ reais não-negativos}\} \subset \mathbb{R}^2$.

Definição 2. Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $X \subset E$ um subconjunto. Uma **combinação linear (CL) em *X*** é uma soma *finita* da forma

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_\ell v_\ell}_{=: w \in E}$$

onde $\alpha_1 \in \mathbb{K}, \ldots, \alpha_\ell \in \mathbb{K}$ são escalares arbitrários e $v_1, \ldots, v_\ell \in X$ são vetores arbitrários do conjunto X. Dizemos que *a CL dos vetores $v_1, \ldots, v_\ell$ representa o vetor w*. Também dizemos que *o vetor w é CL dos vetores $v_1, \ldots, v_\ell$*.
Uma CL com *todos coeficientes nulos* é chamado de **combinação linear trivial (CL-T)**. Obviamente uma CL-T sempre representa o vetor nulo. O caso contrário, uma CL tal que *não todos coeficientes são nulos*, é chamado de **combinação linear não-trivial (CL-ÑT)**.

Definição 3. Um subconjunto X de um espaço vetorial E é chamado de **conjunto linearmente independente (LI)** se não existe nenhuma combinação linear não-trivial (não todos coeficientes nulos)

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_\ell v_\ell = \mathcal{O}$$

representando o vetor nulo e com elementos $v_1, \ldots, v_\ell \in X$ *dois-a-dois diferentes.*

O conjunto vazio $\emptyset$ é LI: como não contem elementos, não existe nenhuma CL.

Exercícios.

2) Lembre-se que o vetor $e_j \in \mathbb{R}^n$ tem todas coordenadas nulas exceto a j-ésima cuja é 1. Mostre que $\mathcal{E}^n := \{e_1, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto LI.

3) Seja F um subespaço de um espaço vetorial E. Mostre que se um conjunto $\{f_1, \ldots, f_\ell\}$ de elementos de F é LI em respeito ao espaço vetorial F então o também é LI em respeito ao espaço vetorial E.

4) Sejam $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ vetores de $\mathbb{R}^n$. Prove que um deles é multiplo do outro se, e somente se, para todo $i, j = 1, \ldots, n$ temos $x_i y_j = x_j y_i$.

5) Sejam $u = (1,1)$, $v = (1,2)$ e $w = (2,1)$. Encontre números $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ todos não-nulos, tais que

$$au + bv + cw = \alpha u + \beta v + \gamma w,$$

com $a \neq \alpha$, $b \neq \beta$ e $c \neq \gamma$.

6) Exprima o vetor $(1, -3, 10)$ como combinação linear dos vetores $u = (1,0,0)$, $v = (1,1,0)$ e $w = (2, -3, 5)$.

Definição 4 (Subespaço gerado por um subconjunto)**.** Seja E um espaço vetorial. Seja $X \subset E$ um subconjunto. O **subespaço de $\boldsymbol{E}$ gerado por $\boldsymbol{X}$** é o conjunto

$$\langle X \rangle := \{\text{todas as combinações lineares dos elementos de } X\} \cup \{\mathcal{O}\}.$$

Mostre que $\langle X \rangle$ é um subespaço de E. Observe que $\langle \emptyset \rangle = \{\mathcal{O}\}$ — o conjunto vazio $\emptyset$ gera o *subespaço trivial* $\{\mathcal{O}\}$.

Definição 5 (Soma de subconjuntos)**.** Sejam $X, Y \subset E$ subconjuntos de um espaço vetorial E. A **soma de $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$** é o subconjunto de E de todas as somas

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Em vez de $\{u\} + Y$ escreve-se $u + Y$ e chama-se **a translação de $\boldsymbol{Y}$ por $\boldsymbol{u}$**.

Definição 6 (Soma direta de subespaços)**.** Sejam $F_1, F_2 \subset E$ subespaços de um espaço vetorial E. No caso da interseção trivial $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$ escreve-se $F_1 \oplus F_2$ em vez de $F_1 + F_2$ e chama-se **soma direta dos supespaços $\boldsymbol{F_1}$ e $\boldsymbol{F_2}$.**

Exercícios.

7) No espaço vetorial $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de todas as funções $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sejam:

   $F_1 = \{$funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se anulam em todos os pontos do intervalo [0,1]$\}$;

   $F_2 = \{$funções $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que se anulam em todos os pontos do intervalo [2,3]$\}$.

   Mostre que F_1 e F_2 são subespaços vetoriais de E, que $E = F_1 + F_1$, mas não se tem $E = F_1 \oplus F_2$.

8) Verdadeiro ou falso? Para quaisquer subconjuntos $X, Y \subset E$ tem-se

$$(i) \quad \langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle;$$

$$(ii) \quad \langle X \cap Y \rangle = \langle X \rangle \cap \langle Y \rangle.$$

Definição 7 (Matrizes $m \times n$)**.** O *espaço vetorial das matrizes $m \times n$ sobre um corpo* $\mathbb{K}$ é o conjunto

$$\mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K}) := \{\mathbf{a} = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{K},\ i = 1, \dots m,\ j = 1, \dots, n\},$$

onde a matriz $\mathbf{a} = (a_{ij})$ é o quadro de escalares com m linhas e n colunas *

$$\mathrm{a} = (a_{ij}) := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

munido com a adição (coordenada por coordenada)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (c_{ij}), \qquad c_{ij} := a_{ij} + b_{ij},$$

e a multiplicação escalar (coordenada por coordenada)

$$\beta \mathbf{a} = \beta\,(a_{ij}) := (c_{ij}), \qquad c_{ij} := \beta a_{ij},$$

para qualquer escalar $\beta \in \mathbb{K}$. Uma **matriz quadrada** é uma matriz $n \times n$.

No caso do corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ usamos a notação $\mathrm{M}(m \times n) := \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{R})$ para o *espaço vetorial dos matrices reais $m \times n$.*

Exercícios.

9) Uma matriz quadrada $\mathbf{a} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ chama-se **simétrica** (respect. **anti-simétrica**) quando $a_{ij} = a_{ji}$ (respect. $a_{ij} = -a_{ji}$) para todo $i, j = 1, \dots, n$. Prove que o conjunto $\mathcal{S}$ das matrizes simétricas e o conjunto $\mathcal{A}$ das matrizes anti-simétricas $n \times n$ são subespaços vetoriais de $\mathrm{M}(n \times n; \mathbb{K})$ e que se tem

$$\mathrm{M}(n \times n; \mathbb{K}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

* Os escalares a_{ij} são chamadas as **coordenadas da matriz**. Observe que a coordenada a_{ij} está localizada na i-ésima linha e j-ésima coluna.