

Lista 1c - Diferenciabilidade

Lista 1c

MA211
2017-1

Diferenciabilidade

Plano tangente $T_p S$

Vetor normal N_p

Aproximação linear L

Diferencial df

$U \subset \mathbb{R}^2$ aberto $(a, b) \in U$

$$f: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$$

pode substituir
 \mathbb{R}^2 por \mathbb{R}^n ,
 $n \geq 2$.

déficit das derivadas parciais:

I. existência de todas derivadas parciais de f num ponto

\Rightarrow continuidade de f neste ponto

Exemplo $f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Exc. 1 Para este f

a) Calcule f_x e f_y em \mathbb{R}^2

b) Checar: $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$ ✓

c) Mostre: f não é contínua em $(0, 0)$ ✓

d) Mostre: f_x e f_y não são contínuas em $(0, 0)$

Def. a) f é diferenciável em $(a,b) \in U$

$:\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a,b) - \alpha h - \beta k}{|(h,k)|} = 0 \quad (\text{DIF})$$

b) f é diferenciável $:\Leftrightarrow f$ dif. no todo ponto

II. f dif. em $(a,b) \in U$

\Rightarrow todas derivs. parcs. de f em (a,b) existem

ideia da prova: use $(h,k) = (h,0)$ com $h \rightarrow 0$ em (DIF)

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a,b) - \alpha h}{h} = 0$$

por
 \Rightarrow def. $f_x(a,b)$ existe e é igual α

use $(h,k) = (0,k)$ para receber $f_y(a,b) = \beta$ #

Coment. Seja f dif. em (a,b) , defina

$$r(h,k) := f(a+h, b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k.$$

Interprete r como o resto do que falta para o incremento $(h,k) \mapsto f(a+h, b+k) - f(a,b)$ de f fosse uma função linear.

diferenciabilidade resolve o déficit das derivadas parciais em I :

II f diferenciável em (a,b)
 $\Rightarrow f$ contínua em (a,b)

Oss. Então f no Ex.c.1 não é diferenciável ainda que todas derivs. parcs. existem!

O que garante diferenciabilidade?

III f dif. em $(a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} a) \text{ todas derivs. parcs. existem no ponto } (a,b) \\ b) \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r(h,k)}{|(h,k)|} = 0 \end{cases}$

Le.: Existência em a) junto com contínuidade das derivs. parcs. \Rightarrow b).

I Se todas derivs. parcs. de f num ponto existem e
são contínuas
Le. e III $\Rightarrow f$ dif. neste ponto
 $\xRightarrow{\text{II}}$ f contínua neste ponto

Exc. 2

$$f(x, y) := \begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & , (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Mostre que

- f diff. no ponto $(0, 0)$
- todas derivs. parciais de f existem em \mathbb{R}^2
- mas f_x e f_y não são contínuas em $(0, 0)$.

Exc. 3

$$f(x, y) := \begin{cases} x & , y \neq x^2 \\ 0 & , y = x^2 \end{cases}$$

a) Mostre que f é contínua em $(0, 0)$

b) Calcule f_x ao longo do eixo x ($f_x(a, 0) = ?$)

$f_y \dots \dots \dots y$ ($f_y(0, b) = ?$)

c) Mostre que f não é diferenciável em $(0, 0)$ [Dica: $\lim_{(h, k) \rightarrow 0} \dots$ para $k = h^2$]

d) Mostre que f_x e f_y não são contínuas em $(0, 0)$.

Plano Tangente

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad S' = \text{gr}(f) \subset \mathbb{R}^3,$$

$$S' \ni p = (x_0, y_0, \underbrace{f(x_0, y_0)}_{z_0}), \quad f \text{ dif. em } (x_0, y_0).$$

$$T_p S = \{ z - z_0 = \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) \}$$

Eq. do
Plano Tangente

$$\parallel f_x(x_0, y_0)$$

$$\parallel f_y(x_0, y_0)$$

$$\hat{N}_p := \frac{1}{\|N_p\|} N_p \quad \text{onde } N_p := (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1).$$

O vetor normal do plano tangente

$$R_p := \{ p + \mu N_p \mid \mu \in \mathbb{R} \} \text{ reta normal}$$

Def. A aproximação $L(x, y)$ de $f(x, y)$

$$f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) =: L(x, y)$$

é chamada aproximação linear ou

aproximação pelo plano tangente

de f no ponto $p = (a, b, f(a, b)) \in S' = \text{gr}(f)$.

Exc. 4 Mostre que o gráfico de L é
 $\text{gr}(L) = T_p S'$.

Exc.5 Determine N_p e uma eq. do plano tangente em $p=(1,1,1)$ à superfície $\{z = \sqrt{xy}\} \subset \mathbb{R}^3$. 14.4
3

Exc.6 Explique porque $f(x,y) = \frac{x}{x+y}$ é dif. em $(2,1)$. 13

Exc.7 Seja f diferenciável e 19
 $f(2,5) = 6$, $f_x(2,5) = 1$, $f_y(2,5) = -1$.
 Use aproximação linear para estimar $f(\underbrace{2.2}_{22/10}, \underbrace{4.9}_{49/10})$.

Def. A diferencial de uma função dif.

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é definido:

$$df := \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Exc.8 Determine a diferencial da função $f(t,x) = e^{-2x} \cdot \cos(2\pi t)$. 25

Exc. 9 Determine uma eq. de $T_p S'$ 42

no ponto $P = (2, 1, 3)$ de uma superfície S' para a qual, infelizmente, você não tem nenhuma fórmula.

Mas, felizmente, você sabe que as curvas

$$C_1(t) = (2+3t, 1-t^2, 3-4t+t^2)$$

$$C_2(u) = (1+u^2, 2u^3-1, 2u+1)$$

ambas estão em S' .

Encontre uma eq. para $T_p S'$
e determine o vetor normal N_p .
e a reta normal R_p .