Lista 1a

MA211
2017-1

funções, domínio, imagem, gráfico, curvas de nível, limites, continuidade

$$f : \mathbb{R}^2 \supset D = \mathrm{dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

função de 2 variáveis

domínio

$$\mathrm{dom}(f) := \{\text{todos pontos } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ nas quais } f \text{ é bem definido}\}$$
$$\subset \mathbb{R}^2$$

imagem

$$\mathrm{im}(f) := \{ f(x,y) \mid (x,y) \in \mathrm{dom}(f) \}$$
$$\subset \mathbb{R}$$

gráfico

$$\mathrm{gr}(f) := \{ (x,y,z) \mid (x,y) \in \mathrm{dom}(f) \text{ e } z = f(x,y) \}$$
$$\subset \mathbb{R}^3$$

Dado • $f : \mathbb{R}^2 \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto f(x,y)$$

• $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ t.q. arbitrariamente próximos de (a,b) existem pontos de D

|| (a,b) não precisa ser elemento do domínio D, mas pode ser. ||

Def. Um número L é chamado de limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende a (a,b), em símbolos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

$$\left(\text{ou } f(x,y) \longrightarrow L \text{ quando } (x,y)\to(a,b) \right),$$

$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.q. $\forall (x,y) \in D$:

$$0 < \underbrace{|(x,y)-(a,b)|}_{\substack{\text{distância} \\ \text{entre } (x,y) \\ \text{e } (a,b)}} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Def. Uma função $f : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, $u \mapsto f(u)$, $u = (u_1, \dots, u_n)$

é contínua num ponto $a \in D$ (do seu domínio!), $a = (a_1, \dots, a_n)$

$$:\Longleftrightarrow \lim_{u \to a} f(u) = f(a)$$

"O limite de f em a 1) existe e 2) é igual ao valor de f em a"

Def. f é contínua no seu domínio D

:⟺ f é contínua no todo ponto de D.

Neste caso dizemos

"f é de classe C^0 em D"

ou

"$f \in C^0(D)$"

Coment. Polinomios $p, q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são contínuas em $\mathbb{R}^n = D$ e funções racionais $h := \frac{p}{q}$ são contín. nos seus domínios $\operatorname{dom}(h)$.

Exc.1 Dado $g(x,y) = \cos(x+2y)$ 14.1 9

a) calcule $g(2,-1)$

b) determine o domínio $D = dom(g)$

c) determine a imagem $im(g)$

Exc.2 Determine e esboce o domínio da função 14.1

(i) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ 13

(ii) $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ 21

Exc.3 Esboce o gráfico da função 14.1

a) $f(x,y) = 1+y$ 23

b) $\quad$ " $\quad = y^2+1$ 27

c) $\quad$ " $\quad = 9-x^2-9y^2$ 29

Exc.4 Esboce várias curvas de nível 14.1

a) $f(x,y) = (y-2x)^2$ 43

b) $\quad$ " $\quad = \sqrt{y^2-x^2}$ 49

Exc. 5 Descreva como o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f. 14.1 69

(a) $g(x,y) = f(x,y) + 2$

(b) $g(x,y) = 2f(x,y)$

(c) $g(x,y) = -f(x,y)$

(d) $g(x,y) = 2 - f(x,y)$

Exc. 6 Suponha $\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x,y) = 6$. 14.2 1

Podemos dizer uma coisa do valor de f no ponto $(3,1)$?

E se a função f for contínua?

Exc. 7 Determine o limite, se existir, ou mostre que não existe. 14.2

a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left(5x^3 - x^2y^2\right)$ 5

b) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \left(\frac{4-xy}{x^2+3y^2}\right)$ 7

Exc. 8 Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

a) $F(x,y) = \frac{xy}{1+e^{x-y}}$

b) $G(x,y) = \ln(x^2+y^2-4)$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$