

Álgebra Linear

MA327 – Turma C

Lista 2e – Subespaços invariantes e autovalores/vetores

Seja E um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} de dimensão n e seja $A \in \mathcal{L}(E)$.

Motivação. A matriz $n \times n$ (quadrada) $\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{B}}$ do operador linear A obviamente depende da base \mathcal{B} de E . Dado A , existem bases tal que a matriz \mathbf{a} seja de uma forma simples? Por exemplo, de forma diagonal? Vamos ver que todo subespaço invariante por A gera um bloco diagonal em \mathbf{a} .

Uma classe ótima de operadores A são aqueles as quais admitem uma base composto de autovetores. Neste caso \mathbf{a} é uma *matriz diagonal* (todas entradas fora da diagonal são nulas) e na diagonal mesma encontram-se os autovalores de A .

Definição 1. Um subespaço F de E é chamado de **subespaço invariante por $A \in \mathcal{L}(E)$** se o subespaço AF de E ainda é contido em F mesmo:

$$AF := \{Af \mid f \in F\} \subset F.$$

Neste caso a função $A|_F : F \rightarrow F, f \mapsto Af$, é um operador linear em F chamado de **restrição de A a F** .

Definição 2. Um vetor *não-nulo* $v \in E \setminus \{0\}$ é chamado de **autovalor** de $A \in \mathcal{L}(E)$ caso o vetor Av de E fosse um múltiplo de v , em símbolos:

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} : Av = \lambda v.$$

Neste caso λ é chamado **autovalor** de A e $v =: v_\lambda$ um¹ **autovetor associado a λ** .

Exercícios.

- a) Dado $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, determine os subespaços de \mathbb{R}^3 invariantes por

$$A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto a \times v,$$

onde o produto vetorial \times é definido na Lista 2c.

- b) Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E)$ operadores que *comutam*: $AB = BA$. Prove que

- i) $N(B)$ e $\text{Im}(B)$ são subespaços invariantes por A ;
- ii) Se F é um subespaço invariante por A , então $BF := \{Bf : f \in F\}$ é ainda um subespaço invariante por A .

¹Exercício: Se v_λ é autovetor de $A \in \mathcal{L}(E)$, então tudo múltiplo não-nulo de v_λ é.

- c) Dado $A \in \mathcal{L}(E)$ e um polinômio $p = p(x)$ prove que o núcleo e a imagem do operador² $p(A) \in \mathcal{L}(E)$ são subespaços invariantes por A .
- d) Determine os autovetores e os autovalores do operador de derivação

$$D : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

- e) Seja $A \in \mathcal{L}(E)$, prove que
- i) A invertível $\iff A$ não possui autovalor 0;
 - ii) Se A é invertível, então os autovetores de A e A^{-1} coincidem. E os autovalores?
- f) Seja $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ o operador linear cuja matriz na base canônica tem todos os elementos iguais a 1. Prove que
- i) $\text{posto}(A) = 1$;
 - ii) $\mathbb{R}^n = N(A) \oplus \text{Im}(A)$;
 - iii) os autovalores de A são 0 e n ;
 - iv) os autovetores de A pertencem a $N(A)$ ou a $\text{Im}(A)$.

Exiba uma base de \mathbb{R}^n na qual a matriz de A tem $n^2 - 1$ zeros.

- g) Seja $A \in \mathcal{L}(E)$ onde $\dim E < \infty$, $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_k$ e cada F_i é um subespaço invariante por A . Tome uma base \mathcal{V} de E que seja uma união de bases das F_i . Determine a forma da matriz de A na base \mathcal{V} .
- h) Seja $A \in \mathcal{L}(E)$. Se E possui uma base formada por autovetores de A , prove que existe também uma base de E formada por autovetores de $A^* : E \rightarrow E$. (Veja exercício anterior).
- i) Seja $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (3x + y, 2x + 2y)$.
- i) Mostre que 4 e 1 são autovalores de A .
 - ii) Ache uma base $\mathcal{B} = (u, v)$ de \mathbb{R}^2 tal que

$$Au = 4u \quad \text{e} \quad Av = v.$$

- iii) Dada a matriz $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, ache uma matriz invertível \mathbf{p} tal que

$$\mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- j) O **determinante** de uma matriz quadrada $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ é por definição $\det \mathbf{a} = \alpha\delta - \gamma\beta$. Prove que

²Dado um polinômio $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 \dots + a_n\lambda^n$ e um operador linear A , então definimos o operador linear $p(A) := a_0 + a_1A + a_2A^2 \dots + a_nA^n$.

- i) se $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$, então $\det(\mathbf{am}) = \det \mathbf{a} \cdot \det \mathbf{m}$ [cálculo direto];
- ii) $\det \mathbf{a} \neq 0 \iff \mathbf{a}$ é invertível;
- iii) $\det(\mathbf{m}^{-1}\mathbf{am}) = \det \mathbf{a}$, para todo \mathbf{m} invertível.

[Logo todas as matrizes de um operador linear $A : E \rightarrow E$, com $\dim E = 2$, têm o mesmo determinante, o qual é chamado de *determinante do operador* A denominado $\det A$ ($:= \det[A]_{\mathcal{U}}$ para qualquer base \mathcal{U} de E).]