Departamento de Matemática
Imecc Unicamp
Joa Weber

2º Semestre de 2016

Álgebra Linear

MA327 – Turma C

Lista 2c – Matriz de uma transformação linear

Seja $A : E \to F$ uma transformação linear entre espaços vetorias sobre um corpo $\mathbb{K}$, por exemplo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Seja $\mathrm{I}_E : E \to E$, $v \mapsto v$, o operador identidade em E e I_F o em F. Sejam $\mathcal{U} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ e $\tilde{\mathcal{U}}$ bases de E e $\mathcal{V} = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ e $\tilde{\mathcal{V}}$ bases de F. Então temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "\mathbf{a}:=[A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}}"] \arrow[dr, "\mathcal{U}"] \arrow[dd, "\mathbf{p}:=[\mathrm{I}_E]_{\mathcal{U},\tilde{\mathcal{U}}}"'] & & & \mathbb{K}^m \arrow[dl, "\mathcal{V}"'] \arrow[dd, "\mathbf{q}:=[\mathrm{I}_F]_{\mathcal{V},\tilde{\mathcal{V}}}"] \\
& E \arrow[r, "A"] & F & \\
\mathbb{K}^n \arrow[ur, "\tilde{\mathcal{U}}"'] \arrow[rrr, "\tilde{\mathbf{a}}:=[A]_{\tilde{\mathcal{U}},\tilde{\mathcal{V}}}"'] & & & \mathbb{K}^m \arrow[ul, "\tilde{\mathcal{V}}"]
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Usamos os mesmos símbolos para as bases e para os isomorfismos determinados pelas. Mais precisamente usamos a notação

$$\mathcal{U}x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n \in E.$$

Obviamente a aplicação $\mathcal{U} : \mathbb{K}^n \to E$ é linear. É injetivo como os membros da base $\mathcal{U}$ são LI em E e sobrejetivo como eles geram E. Portanto $\mathcal{U}$ é um isomorfismo. No caso $E = \mathbb{K}^n$ a base canônica determina o operador identidade: $\mathcal{E} = \mathrm{I}_{\mathbb{K}^n} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.

Observe que, dado $v \in E$, então $x := \mathcal{U}^{-1} v \in \mathbb{K}^n$ é o vetor coordenada de v.* Um isomorfismo $\mathbb{K}^n \to E$ é chamado um *sistema de coordenadas em E*.

Matriz de uma transformação linear

Como $\mathcal{V} = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ é uma base de F podemos representar cada um elemento $A\xi_j \in F$ como combinação linear (única)

$$A\xi_j = \eta_1 a_{1j} + \cdots + \eta_m a_{mj} \qquad j = 1, \ldots, n$$

onde os escalares $a_{ij} \in \mathbb{K}$ são únicos. Chama-se a matriz $m \times n$

$$[A]_{\mathcal{U},\mathcal{V}} := \mathbf{a} = [a_{ij}] \tag{2}$$

a matriz de A em respeito às bases $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$. No caso $E = F$ e $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ abreviamos $[A]_{\mathcal{U}} := [A]_{\mathcal{U},\mathcal{U}}$. No caso $E = F = \mathbb{K}^n$ e $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{E}$ abreviamos $[A] := [A]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$.

*Dado uma base $\mathcal{U}$ de E todo elemento $v \in E$ pode ser escrita como combinação linear única dos membros de $\mathcal{U}$. O vetor $x \in \mathbb{K}^n$ dos coeficientes escalares chama-se *o vetor coordenada de v*.

Matriz de passagem

A matriz $\mathbf{p} := [\mathrm{I}_E]_{\mathcal{U},\tilde{\mathcal{U}}}$ do operador identidade I_E em E, por definição (2), satisfaz

$$\xi_j = \mathrm{I}_E\, \xi_j = \tilde{\xi}_1 p_{1j} + \dots + \tilde{\xi}_n p_{nj} \qquad j = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Nas outras palavras ela exprime os elementos da base velha $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ de E como combinação linear dos elementos da base nova $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n)$ de E. Por isso $\mathbf{p}$ é chamado a *matriz de passagem de* $\mathcal{U}$ *para* $\tilde{\mathcal{U}}$. A matriz de passagem participa do diagrama comutativo (1) como

$$\tilde{\mathcal{U}} px = \left(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n\right) \begin{bmatrix} \sum_k p_{1k} x_k \\ \vdots \\ \sum_k p_{nk} x_k \end{bmatrix} = \sum_\ell \tilde{\xi}_\ell \sum_k p_{\ell k} x_k = \sum_k \underbrace{\left(\sum_\ell \tilde{\xi}_\ell p_{\ell k} \right)}_{\stackrel{(3)}{=} \xi_k} x_k = \mathcal{U} x$$

para todo $x \in \mathbb{K}^n$. Como $\mathcal{U}$ e $\tilde{\mathcal{U}}$ são isomorfismos $\mathbf{p}$ é. Sua inversa é a composição

$$\mathbf{p}^{-1} = \mathcal{U}^{-1} \tilde{\mathcal{U}} = [I_E]_{\tilde{\mathcal{U}},\mathcal{U}}.$$

Mudança das bases

Como o diagrama (1) é comutativo recebemos a relação

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{q} \mathbf{a} \mathbf{p}^{-1}$$

entre as matrizes de A em respeito às bases velhas e novas. No caso $F = E$ munido das bases $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ e $\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{\mathcal{U}}$ recebemos $[A]_{\tilde{\mathcal{U}}} = \mathbf{p}\, [A]_{\mathcal{U}}\, \mathbf{p}^{-1}$.

Considere o caso de um operador linear $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ onde $\mathbb{K}^n$ é munido originalmente da base canônica $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ e depois de uma base nova $\mathcal{U}$. Neste caso o diagrama (1) torna-se no diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[rrr, "\mathbf{a}:=[A]"] \arrow[dr, "\mathcal{E}=\mathrm{I}_{\mathbb{K}^n}"] \arrow[dd, "\mathbf{p}:=[\mathrm{I}_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{E},\mathcal{U}}"'] & & & \mathbb{K}^n \arrow[dl, "\mathcal{E}=\mathrm{I}_{\mathbb{K}^n}"'] \arrow[dd, "\mathbf{p}"] \\
& \mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^n & \\
\mathbb{K}^n \arrow[ur, "\mathcal{U}"'] \arrow[rrr, "\tilde{\mathbf{a}}:=[A]_{\mathcal{U}}"'] & & & \mathbb{K}^n \arrow[ul, "\mathcal{U}"]
\end{tikzcd} \tag{4}$$

o qual disponibiliza a relação $[A]_{\mathcal{U}} = \mathbf{p}\, [A]\, \mathbf{p}^{-1}$ entre as matrizes de A quando trocar a base canônica por qualquer outra base.

Definição 1. Duas matrizes quadradas $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são *semelhantes* se, e somente se, existe uma matriz invertível $\mathbf{p}$ tal que $\mathbf{b} = \mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{p}$

Definição 2. O *posto* de uma transformação linear é a dimensão de sua imagem:

$$\operatorname{posto}(A) := \dim \operatorname{Im} A.$$

O posto de uma matriz $a \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$ é definido com a pode ser interpretado como transformação linear $a : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

Definição 3. O *traço* de uma matriz quadrada $\mathbf{a} = [a_{ij}] \in M(n \times n; \mathbb{K})$ é a soma dos elementos da sua diagonal:

$$\operatorname{tr} \mathbf{a} := a_{11} + \cdots + a_{nn} \in \mathbb{K}.$$

Exercícios.

a) Mostre que se $\mathbf{a}$ e $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{p}$ são matrizes $n \times n$ semelhantes, então existe $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathbf{a}$ e $\tilde{\mathbf{a}}$ são matrizes de A relativamente a duas bases de $\mathbb{R}^n$.

b) Qual é a matriz[†] $[A]$ do operador $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ determinado por

$$A(2,3) = (2,3) \qquad \text{e} \qquad A(-3,2) = (0,0)\ ?$$

c) Dado $u = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, determine a matriz $[A]$ do operador [‡]

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad v \mapsto v \times u.$$

Descreva geometricamente o núcleo desse operador e obtenha a equação da sua imagem.

d) Seja $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Dados $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$e_j = \xi_1 p_{1j} + \xi_2 p_{2j} + \cdots + \xi_n p_{nj}, \qquad p_{ij} \in \mathbb{R},, \qquad j = 1, \ldots, n$$

mostre que

i) a lista ordenada $\mathcal{U} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

ii) a matriz[§] $\mathbf{p} = [p_{ij}]$ é a inversa da matriz $\mathbf{q}$ que tem $\xi_1, \ldots, \xi_n$ como vetores-coluna: $\mathbf{q}\mathbf{p} = \mathbb{1}_n$.

[†]Lembre-se que $[A] := [A]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ denota a matriz de A em relação à base canônica $\mathcal{E}$.

[‡]O *produto vetorial* de dois vetores $v = (a,b,c)$ e $w = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ é o vetor $v \times w$ de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$v \times w := (bz - cy, cx - az, ay - bx).$$

[§]Observe que $\mathbf{p} = [p_{ij}]$ é a matriz do operador identidade de $\mathbb{R}^n$ em respeito às bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{U}$. Nas outras palavras $\mathbf{p} = [\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{E},\mathcal{U}}$ é a matriz de passagem de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{U}$. Devido à comutatividade de (4) vale $\mathcal{U}\mathbf{p} = \mathcal{E} = \mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}$.

e) Considere as transformações lineares

$$A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R}), \quad (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n,$$

e

$$B : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad p = p(x) \mapsto (p(0), p(1), \dots, p(n)).$$

Determina a matriz $[BA]$ de $BA : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ e prove que é uma matriz invertível.

f) Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão $n < \infty$. Suponha que $A \in \mathcal{L}(E)$ não seja um múltiplo do operador identidade: $A \neq \alpha I$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Mostre que existem bases de E do tipo $\mathcal{U} = (u, Au, \dots)$ e $\mathcal{V} = (v, 2Av, \dots)$ tais que as matrizes $[A]_\mathcal{U}$ e $[A]_\mathcal{V}$ de A são diferentes.

ii) Conclua que as *homotetias* (operadores da forma αI) são os únicos operadores cuja matriz não depende da base escolhida.

iii) Conclua que as matrizes do tipo $\alpha \mathbb{1}_n$ são os únicos que comutam¶ com todas matrizes invertíveis $n \times n$.

[ad i): Conclua $n \geq 2$. Mostre que existe conjunto LI da forma $X = \{v, Av\}$. Depois estenda X para receber uma base $(\xi_1 = v, \xi_2 = Av, \dots, \xi_n)$ de E.]

g) Seja $\mathbf{c} \in M(n \times n; \mathbb{K})$ uma matriz quadrada de posto 1.

i) Prove que: $\mathbf{c}^2 = (\operatorname{tr} \mathbf{c})\mathbf{c}$. $\quad (*)$

ii) Dado $n \geq 2$, generalize: $\mathbf{c}^n = (\operatorname{tr} \mathbf{c})^{n-1}\mathbf{c}$.

Poderia usar (e provar) o

Lema 1. *Dadas matrizes* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M(n \times n; \mathbb{K})$*, temos que* $\operatorname{tr}(\mathbf{ab}) = \operatorname{tr}(\mathbf{ba})$.

[ad i): Observe que para provar $(*)$ se pode mudar a base de $\mathbb{K}^n$ e provar $(*)$ para a nova matriz $\tilde{\mathbf{c}}$. Lembre-se: posto$(\mathbf{c}) = 1$. Escolha base apropriada de $\mathbb{K}^n$.]

h) Sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ bases do espaço vetorial E da dimensão n. Sejam

$$\begin{aligned} \mathbf{p} :& \quad \text{a matriz de passagem de } \mathcal{U} \text{ para } \mathcal{V}, \\ \mathbf{q} :& \quad \text{a matriz de passagem de } \mathcal{V} \text{ para } \mathcal{W}. \end{aligned}$$

Prove que

$$\begin{aligned} \mathbf{pq} & \quad \text{é a matriz de passagem de } \mathcal{U} \text{ para } \mathcal{W}, \\ \mathbf{p^{-1}} & \quad \text{é a matriz de passagem de } \mathcal{V} \text{ para } \mathcal{U}. \end{aligned}$$

i) Sejam $A : E \to F$ e $B : F \to G$ transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita.

i) Prove que: B injetiva $\Rightarrow$ posto$(BA) =$ posto(A).

ii) Que condição sobre A assegura que posto$(BA) =$ posto(B)?

¶Por definição, duas matrizes quadradas $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ *comutam* se $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$.