Departamento de Matemática — 2º Semestre de 2016
Imecc Unicamp
Joa Weber

Álgebra Linear

MA327 – Turma C

Lista 2b – Soma direta e projeção

Definição 1. A *soma de dois subespacos* F_1 *e* F_2 de um espaço vetorial E é o subespaço $F_1 + F_2 := \{u + v \mid u \in F_1, v \in F_2\} \subset E$. No caso $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ a soma é chamada *soma direta* e escreve-se $F_1 \oplus F_2$ em vez de $F_1 + F_2$.

Definição 2. Um operador linear $P \in \mathcal{L}(E)$ é chamado uma *projeção* de E se ele é idempotente: $P^2 = P$.

Exercícios.

a) No plano $\mathbb{R}^2$, considere as retas F_1 e F_2, definidas respectivamente pelas equações $y = ax$ e $y = bx$, onde $a \neq b$ são números reais.

   i) Exprima $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ como soma de um vetor de F_1 e um de F_2.

   ii) Seja $P = P_{F_1,F_2} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ a projeção sobre F_1 paralelamente a F_2. Obtenha a matriz $[P]$ de P.*

   iii) Encontre a matriz $[S]$ da reflexão $S = S_{F_2,F_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em torno da reta F_2, paralelamente a F_1.†

b) Exprima $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como soma de um vetor do plano F_1, cuja equação é $x + y - z = 0$, com um vetor da reta F_2, gerada pelo vetor $(1, 2, 1)$. Conclua que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$. Determine a matriz $[P]$ da projeção $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tem imagem F_1 e núcleo F_2.

c) Dado $P \in \mathcal{L}(E)$, prove ou desprove:

   i) $E = \mathrm{N}(P) \oplus \mathrm{Im}(P) \quad \Rightarrow \quad P$ é projeção de E.

   ii) $E = \mathrm{N}(P) + \mathrm{Im}(P) \quad \Rightarrow \quad P$ é projeção de E.

   iii) P é projeção $\quad \Leftrightarrow \quad I - P$ é projeção.

   iv) P é projeção $\quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{N}(P) = \mathrm{Im}(I - P) \quad \big(\Leftrightarrow \quad \mathrm{N}(I - P) = \mathrm{Im}(P)\big)$.

d) Sejam $F_1, F_2 \subset E$ subespaços com $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim E < \infty$. Prove que
$$E = F_1 \oplus F_2 \iff F_1 \cap F_2 = \{0\}.$$

e) Sejam $P_1, \ldots, P_n : E \to E$ operadores lineares tais que
$$P_1 + \cdots + P_n = I \quad \text{e} \quad \forall i \neq j : \ P_i P_j = 0.$$

   Prove que estes operadores são projeções.

---

*Lembre-se que $[P] := [P]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ denota a matriz de P em relação à base canônica $\mathcal{E}$.

†Suponha $E = F_1 \oplus F_2$. Então cada um $w \in E$ é da forma $w = u + v$ para únicos elementos $u \in F_1$ e $v \in F_2$. Na aula mostramos $P_{F_1,F_2} w = u$. (Fato: $S_{F_1,F_2} = P_{F_1,F_2} - P_{F_2,F_1}$.) Portanto $S_{F_1,F_2} w = u - v$.

f) Sejam $P, Q \in \mathcal{L}(E)$ projeções, prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

   i) $P + Q$ é uma projeção;
   ii) $PQ + QP = 0$;
   iii) $PQ = QP = 0$.

   [Para provar que ii) $\Rightarrow$ iii), multiplique à esquerda, e depois à direita, por P.]

g) Seja $E = F_1 \oplus F_2$. O *gráfico* de uma transformação linear $B : F_1 \to F_2$ é o subconjunto $\operatorname{graph} B := \{v + Bv \mid v \in F_1\}$ de E. Prove que

   i) $\operatorname{graph} B$ é um subespaço de E.
   ii) a projeção $P = P_{F_1,F_2} : E \to E$, restrita a $\operatorname{graph} B$, define um isomorfismo entre $\operatorname{graph} B$ e F_1.