Departamento de Matemática
Imecc Unicamp
Joa Weber

2º Semestre de 2016

Álgebra Linear

MA327 – Turma C

Lista 1d – Transformações lineares e suas matrizes

Exercícios.

a) Considere os elementos de $\mathbb{R}^2$ dados por

$$u_1 = (2, -1), \qquad u_2 = (1, 1), \qquad u_3 = (-1, -4),$$

e

$$v_1 = (1, 3), \qquad v_2 = (2, 3), \qquad v_3 = (-5, -6).$$

Decida se existe ou não um operador linear* $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$Au_1 = v_1, \qquad Au_2 = v_2, \qquad Au_3 = v_3.$$

Mesma pergunta com $v_3 = (5, -6)$ e com $v_3 = (5, 6)$.

b) Tem-se uma transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Sabe-se que

$$A(1, 2) = (1, 1, 1, -1) \quad \text{e} \quad A(3, 4) = (1, 1, 1, 1).$$

Pede-se a matriz $\mathbf{a} = [A] \in \mathrm{M}(4 \times 2)$ de A relativamente às bases canônicas $\mathcal{E}^2 = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{E}^4 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.†

---

*__Operador linear__ significa *transformação linear*.

†Seja $\mathbb{K}$ um corpo, por exemplo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e seja $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ o espaço vetorial de todas as transformações lineares $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Escolhe $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. Por definição a **matriz $[A]$ da transformação linear A relativamente às bases canônicas** $\mathcal{E}^n = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ e $\mathcal{E}^m = (e_1, \ldots, e_m)$ de $\mathbb{K}^m$ é a matriz $\mathbf{a} = (a_{k\ell}) \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$ cuja j-ésima coluna $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ e formado pelos (únicos) escalares na combinação linear dos elementos da base $\mathcal{E}^m$ que representa o elemento Ae_j de $\mathbb{K}^m$:

$$Ae_j = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{mj}e_m. \tag{1}$$

Nas outras palavras

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde os escalares a_{ij} são (únicamente) determinados quando para cada um $j \in \{1, \ldots, n\}$ representar o elemento $Ae_j \in \mathbb{K}^m$ como combinação linear (1) da base $\mathcal{E}^m$.

c) Uma transformação linear $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) =: (\mathbb{R}^3)^*$ é chamado um **funcional linear**. A expressão geral de um funcional linear $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é

$$\phi(x, y, z) = ax + by + cz$$

onde a, b, c são escalares determinando ϕ. Dados os elementos

$$u = (1, 2, 3), \qquad v = (-1, 2, 3), \qquad w = (1, -2, 3),$$

de $\mathbb{R}^3$ determine a, b, c de tal modo que se tenha $\phi u = 1$, $\phi v = 0$ e $\phi w = 0$.[‡]

d) Seja $\mathcal{B} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ uma base do espaço vetorial E. Para cada $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$, seja $\phi_i \in E^* := \mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ o funcional determinado pelas condições

$$\phi_i \xi_1 = 0, \quad \ldots, \quad \phi_i \xi_{i-1} = 0, \quad \phi_i \xi_i = 1, \quad \phi_i \xi_{i+1} = 0, \quad \ldots, \quad \phi_i \xi_n = 0.$$

Prove que $\mathcal{B}^* := (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ é uma base de E^* (chamada a **base dual** da base $\mathcal{B}$). Mostre que se tem $\phi_i v = v_i$ para todo $v = v_1 \xi_1 + \cdots + v_n \xi_n \in E$.

e) Considere a base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$, onde

$$u = (1, 1, 1), \qquad v = (1, -1, 1), \qquad w = (1, 1 - 1).$$

Seja $\mathcal{B}^* = (\phi, \psi, \chi) \subset (\mathbb{R}^3)^*$ a base dual da base $\mathcal{B}$. Calcule as matrizes $[\phi], [\psi], [\chi] \in \mathrm{M}(1 \times 3)$ que correspondem às transformações lineares $\phi, \psi, \chi \in (\mathbb{R}^3)^*$.

f) Seja $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ um conjunto LI no espaço vetorial E de dimensão finita. Dados arbitrariamente os vetores $w_1, \ldots, w_m$ em um espaço vetorial F, prove que

   i) existe uma transformação linear $A : E \to F$ tal que

$$Av_1 = w_1, \quad \ldots \quad , Av_m = w_m;$$

   ii) A é única $\iff$ X é uma base de E.

g) Considere as transformações lineares $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dados por $A(x, y) = (x, y, x + y)$ e

$$B(x, y, z) = (ax + (a - 1)y + (1 - a)z, -bx + (1 - b)y + bz)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ são constantes. Determine o operador $BA \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

[Dica: Use as matrizes [A] e [B] que correspondem a A e B respectivamente.]

[‡] Observe que ϕu denota a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ aplicado ao elemento $u \in \mathbb{R}^3$.