

Álgebra Linear

MA327 – Turma C

Lista 1b – Subespaços, combinação linear, independência linear, soma direta, matrizes

Definição 1. Um subconjunto $F \subset E$ de um espaço vetorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ é chamado um **subespaço** se vale o seguinte.

- (i) $\mathcal{O} \in F$ (F contem o vetor nulo)
- (ii) $u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$ (F é fechado sob adição)
- (iii) $\alpha \in \mathbb{K}, u \in F \Rightarrow \alpha u \in F$ (F é fechado sob multiplicação escalar)

Exercícios.

- 1) Quais dos seguintes subconjuntos X_j são subespaços de \mathbb{R}^n ? Em cada caso faça um desenho e explique porque é subespaço ou não é.
 - i) $X_1 := \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$;
 - ii) $X_2 := \{(\alpha + 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$;
 - iii) $X_3 := \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \text{ reais não-negativos}\} \subset \mathbb{R}^2$.

Definição 2. Seja E um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} . Uma **combinação linear (CL)** num subconjunto X de E é uma soma *finita* da forma

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell}_{=: w}$$

onde $\alpha_1 \in \mathbb{K}, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{K}$ são escalares arbitrários e $v_1, \dots, v_\ell \in X$ são ℓ vetores dois-a-dois diferentes* do conjunto X . Dizemos que a CL dos vetores v_1, \dots, v_ℓ representa o vetor w . Também dizemos que o vetor w é CL dos vetores v_1, \dots, v_ℓ . Uma CL com todos coeficientes nulos é chamado de **combinação linear trivial (CL-T)**. Obviamente uma CL-T sempre representa o vetor nulo. O caso contrário, uma CL tal que *não todos coeficientes são nulos*, é chamado de **combinação linear não-trivial (CL-NT)**.

*Isso não é nenhuma restrição: Toda soma finita com repetições, por exemplo $\alpha v + \beta w + \gamma v$, pode ser escrito na forma desejada, nosso exemplo na forma $(\alpha + \gamma)v + \beta w$.

Definição 3. Um subconjunto X de um espaço vetorial E é chamado um **conjunto linearmente independente (LI)** se não existe nenhuma combinação linear não-trivial (\nexists CL-NT) $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell$ de ℓ elementos v_1, \dots, v_ℓ de X (dois-a-dois diferentes)[†] cuja representa o vetor nulo. (Observe que o conjunto vazio \emptyset é LI: como não contem elementos, não existe nenhuma CL.)

Exercícios.

- 2) Lembre-se que o vetor $e_j \in \mathbb{R}^n$ tem todas coordenadas nulas exceto a j -ésima cuja é 1. Mostre que $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto LI.
- 3) Seja F um subespaço de um espaço vetorial E . Mostre que se um conjunto $\{f_1, \dots, f_\ell\}$ de elementos de F é LI em respeito ao espaço vetorial F então o é também LI em respeito ao espaço vetorial E .
- 4) Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ vetores de \mathbb{R}^n . Prove que um deles é múltiplo do outro se, e somente se, para todo $i, j = 1, \dots, n$ temos $x_i y_j = x_j y_i$.
- 5) Sejam $u = (1, 1)$, $v = (1, 2)$ e $w = (2, 1)$. Encontre números $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ todos não-nulos, tais que

$$au + bv + cw = \alpha u + \beta v + \gamma w,$$

com $a \neq \alpha$, $b \neq \beta$ e $c \neq \gamma$.

- 6) Exprima o vetor $(1, -3, 10)$ como combinação linear dos vetores $u = (1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 0)$ e $w = (2, -3, 5)$.

Definição 4 (Subespaço gerado por um subconjunto). Seja E um espaço vetorial.

a) Seja $X \subset E$ um subconjunto. O **subespaço de E gerado por X** é o conjunto

$$\langle X \rangle := \{\text{todas as combinações lineares dos elementos de } X\} \cup \{\mathcal{O}\}.$$

Mostre que $\langle X \rangle$ é um subespaço de E . Observe que $\langle \emptyset \rangle = \{\mathcal{O}\}$ — o conjunto vazio \emptyset gera o *subespaço trivial* $\{\mathcal{O}\}$.

b) O **subespaço de E gerado por uma família \mathcal{V}** é $\langle \mathcal{V} \rangle := \langle X_{\mathcal{V}} \rangle$.

Definição 5 (Soma de subconjuntos). Sejam $X, Y \subset E$ subconjuntos de um espaço vetorial E . A **soma de X e Y** é o subconjunto de E de todas as somas

$$X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Em vez de $\{u\} + Y$ escreve-se $u + Y$ e chama-se **a translação de Y por u** .

Definição 6 (Soma direta de subespaços). Sejam $F_1, F_2 \subset E$ subespaços de um espaço vetorial E . No caso da interseção trivial $F_1 \cap F_2 = \{\mathcal{O}\}$ escreve-se $F_1 \oplus F_2$ em vez de $F_1 + F_2$ e chama-se **soma direta dos subespaços F_1 e F_2** .

[†]Observe que " ℓ elementos v_1, \dots, v_ℓ " nós diz que estes elementos são dois-a-dois diferentes (se uns destes fossem iguais o número de elementos seria menor do que ℓ).

Exercícios.

7) No espaço vetorial $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de todas as funções $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sejam:

$F_1 = \{\text{funções } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ que se anulam em todos os pontos do intervalo } [0,1]\};$

$F_2 = \{\text{funções } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ que se anulam em todos os pontos do intervalo } [2,3]\}.$

Mostre que F_1 e F_2 são subespaços vetoriais de E , que $E = F_1 + F_2$, mas não se tem $E = F_1 \oplus F_2$.

8) Verdadeiro ou falso? Para quaisquer subconjuntos $X, Y \subset E$ tem-se

$$(i) \quad \langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle;$$

$$(ii) \quad \langle X \cap Y \rangle = \langle X \rangle \cap \langle Y \rangle.$$

Definição 7 (Matrizes $m \times n$). O *espaço vetorial das matrizes $m \times n$ sobre um corpo \mathbb{K}* é o conjunto

$$M(m \times n; \mathbb{K}) := \{\mathbf{a} = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\},$$

onde a matriz $\mathbf{a} = (a_{ij})$ é o quadro de escalares com m linhas e n colunas[‡]

$$\mathbf{a} = (a_{ij}) := \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

munido com a adição (coordenada por coordenada)

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (c_{ij}), \quad c_{ij} := a_{ij} + b_{ij},$$

e a multiplicação escalar (coordenada por coordenada)

$$\beta \mathbf{a} = \beta (a_{ij}) := (c_{ij}), \quad c_{ij} := \beta a_{ij},$$

para qualquer escalar $\beta \in \mathbb{K}$. Uma **matriz quadrada** é uma matriz $n \times n$.

No caso do corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ usamos a notação $M(m \times n) := M(m \times n; \mathbb{R})$ para o *espaço vetorial das matrizes reais $m \times n$* .

Exercícios.

9) Uma matriz quadrada $\mathbf{a} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ chama-se **simétrica** (respect. **anti-simétrica**) quando $a_{ij} = a_{ji}$ (respect. $a_{ij} = -a_{ji}$) para todo $i, j = 1, \dots, n$. Prove que o conjunto \mathcal{S} das matrizes simétricas e o conjunto \mathcal{A} das matrizes anti-simétricas $n \times n$ são subespaços vetoriais de $M(n \times n; \mathbb{K})$ e que se tem

$$M(n \times n; \mathbb{K}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

[‡]Os escalares a_{ij} são chamadas as **coordenadas da matriz**. Observe que a coordenada a_{ij} está localizada na i -ésima linha e j -ésima coluna.