

Desigualdades de Morse e aplicações

Iniciação Científica

Joa Weber *

IMECC UNICAMP

12 de abril de 2014

Resumo

A teoria de Morse é uma teoria tanto clássica como muito forte. Ela continua a produzir resultados na matemática tanto pura quanto aplicada. Os resultados chave da teoria são as desigualdades de Morse. Elas lidam com muitas aplicações tanto na dimensão finita quanto infinita. Os objetivos do projeto são entender várias provas diferentes das desigualdades e procurar estudar aplicações delas.

Sumário

1	Introdução	2
2	Objetivos	4
3	Metas Semestrais	5
4	Métodos	5
5	Cronograma	6
6	Bibliografia	6

*Joachim Weber, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Rua Sérgio Buarque de Holanda 651, Cidade Universitária "Zeferino Vaz", CEP 13083-859, Campinas-SP, Brazil.
Email: joa@math.sunysb.edu

1 Introdução

Seja N uma variedade suave e $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Se $df(x) = 0$, então chamamos x um **ponto crítico de f** e $\text{Crit} f$ denota o conjunto deles. Se além disso a forma quadrática simétrica dado pela Hessiana ¹ $\text{Hess}_x f$ de f no ponto x não admite nenhum auto-valor nulo, então chamamos o ponto crítico x **não-degenerado**. O número $\text{ind}(x)$ dos autovalores negativos (contadas com multiplicidades) é o **índice de Morse**. Uma função cujos pontos críticos são todos não-degenerados é chamada uma **função de Morse**. No seguinte seja f uma função de Morse.

Considere os **polinômios de Morse** e de **Poincaré** dado por

$$\mathfrak{m}_t(f) := \sum_{x \in \text{Crit} f} t^{\text{ind}(x)} \quad , \quad \mathfrak{p}_t(N; \mathbb{K}) := \sum_{k \in \mathbb{N}_0} t^k \dim H_k(N; \mathbb{K})$$

onde $\mathbb{K}$ é qualquer corpo. Nos anos 20's Morse [8] introduziu seu polinômio e provou as **desigualdades de Morse**

$$\mathfrak{m}_t \geq \mathfrak{p}_t.$$

De fato ele provou a versão bastante mais forte

$$\mathfrak{m}_t - \mathfrak{p}_t = (1+t)q_t$$

onde $q_t(f)$ é um polinômio com coeficientes não-negativos. No pensamento de Morse estas desigualdades exprimem a alteração da topologia dos conjuntos sub-níveis $N^a := \{f < a\}$ e são uma consequência dos seguintes resultados (veja Milnor [6] para os detalhes das provas):

Teorema A. *Se não existe um valor crítico de f no intervalo $[a, b]$, então são difeomorfos $N^a \cong N^b$.*

Teorema B. *Se existe exatamente um ponto crítico x de f cujo valor é no intervalo $[a, b]$, então N^b tem o mesmo tipo de homotopia como N^a com uma célula $e_{\text{ind}(x)}$ de dimensão $\text{ind}(x)$ colado.*

As teoremas A e B e as desigualdades de Morse são validos nos vários casos nas quais N é uma variedade Banach de dimensão infinita. Por exemplo, no livro de Milnor [6] é explicado como as desigualdades de Morse implicam existência de geodésicas fechadas numa variedade Riemanniana (interpretado como pontos críticos do funcional da energia no espaço loop de M).

O complexo de Morse na dimensão finita

Nos anos 60's Smale [12] aperfeiçoou Teorema B para tipo de difeomorfismo:

¹ na dimensão finita e numas coordenadas locais: a matriz das segundas derivadas parciais $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$.

Teorema C. Nas hipóteses de Teorema B e se $\dim N = n$, então $N^b \cong N^a \cup e_{\text{ind}(x)} \times e_{n-\text{ind}(x)}$.

O resultado de Smale o levou a introduzir sua teoria de 'handle bodies', a sua solução da conjectura generalizada de Poincaré e o Teorema de h -cobordismo; veja Milnor [7].

Além disso Smale introduziu um ponto de vista dos sistemas dinâmicos na Teoria de Morse na dimensão finita. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Morse numa variedade fechada M de dimensão n . Fixe uma métrica Riemanniana g de N e considere o campo de vetores $-\nabla f$ e o seu fluxo $\{\phi_s\}_{s \in \mathbb{R}} \subset \text{Diff } N$ induzido. Os pontos críticos x (não-degenerados) correspondem aos pontos fixos (hiperbólicos) do fluxo. As **variedades in/estáveis** $W^{u/s}(x)$ são definido por

$$W^u(x) := \{q \in M \mid \phi_s p \rightarrow x \text{ as } s \rightarrow -\infty\},$$

$$W^s(x) := \{q \in M \mid \phi_s p \rightarrow x \text{ as } s \rightarrow \infty\}$$

e difeomorfos a discos de dimensão $\text{ind}(x)$ e $n - \text{ind}(x)$, respectivamente. Seja Crit o conjunto dos pontos críticos de f e seja $\text{Crit}_k := \{x \in \text{Crit} \mid \text{ind}(x) = k\}$. Fixe uma orientação $[x]$ de $W^u(x)$ para todos pontos críticos. Então, dado uma tal escolha Or de orientações, o grupo de cadeias de Morse é o grupo abeliano gerado por todos pontos críticos orientados

$$\text{CM}_k = \text{CM}_k(M, f, \text{Or}; \mathbb{Z}) := \bigoplus_{x \in \text{Crit}_k} \mathbb{Z}[x].$$

Suponha que a **condição de Morse-Smale** fosse satisfeita: todas as interseções $W^u(x) \pitchfork W^s(y)$ são transversais. Então o operador bordo $\partial_k : \text{CM}_k \rightarrow \text{CM}_{k-1}$ conta trajetórias do fluxo entre pontos críticos cuja diferença de índice de Morse é 1. De fato temos

$$\partial_k[x] = \sum_{y \in \text{Crit}_{k-1}} n(x, y)[y]$$

onde $n(x, y)$ é a soma das sinais características $n_u \in \{\pm 1\}$ das trajetórias (geométricas) u entre x e y . O sinal característica é determinado pela escolha das orientações $[x]$ e $[y]$.

Teorema D. A homologia de Morse representa a homologia singular de M :

$$\partial^2 = 0, \quad \text{HM}_*(M, f, g, \text{Or}; \mathbb{Z}) := \frac{\ker \partial_*}{\text{im } \partial_{*+1}} \simeq \text{H}_*(M; \mathbb{Z}).$$

Teorema D disponibiliza uma prova alternativa para as desigualdades de Morse. A construção do complexo de Morse tem uma história rica. Apareceu numa maneira implícita nos seguintes trabalhos.

- Nos anos 40's no artigo de Thom [13].
- Nos anos 50's no trabalho de Smale [11].
- Nos anos 60's no livro de Milnor [7, § 7].

O complexo de Morse na forma geométrica apareceu

- nos anos 70's no artigo extremamente influente de Witten [17]
- nos anos 80's Witten's interpretação geométrica do complexo foi generalizada ao caso de dimensão infinita e, mais importante, o índice de Morse infinito no trabalho fundamental de Floer [4,5]
- nos anos 90's os detalhes da (prova do Teorema D) da construção de Witten foram elaboradas de modo matemático por Poźniak [9], Schwarz [10] análogo à teoria de Floer, e Weber [14, 15] usando métodos dos sistemas dinâmicos hiperbólicos.

O complexo de Morse na dimensão infinita

Substituindo M por uma variedade Banach N munida de um fluxo de classe C^1 , Abbondandolo e Majer [1] generalizaram a construção do complexo de Morse e Teorema D para este caso.

A primeira construção do complexo de Morse para um semi-fluxo (incluindo dimensão finita) era dado só recentemente até mesmo na dimensão infinita [16]. A construção de um isomorfismo à homologia singular ainda está trabalho em progresso do autor.

Estas versões do complexo de Morse lidam a desigualdades de Morse correspondentes.

2 Objetivos

Os objetivos do projeto são os seguintes

- familiarizar-se com uma teoria fundamental na matemática, a teoria de Morse
- entender vários métodos de provar as desigualdades de Morse no caso fechado de dimensão finita. Facultivamente, se tempo permite, também no caso de uma variedade com bordo
- descobrir e familiarizar-se com várias aplicações (já existentes) das desigualdades de Morse
- dispor o estudante para ser capaz de continuar com uma dissertação na área; neste respeito veja o seguinte subparágrafo.

Alicerces e apercebimentos para conseguir os objetivos

O autor oferece nos semestres 2014-1, 2014-2 e 2015-1 uma trilogia de cursos desenhado a levar a audiência ao nível de minha pesquisa (Homologia de Morse para o semi-fluxo de calor) numa maneira sistemática (a maior graça ao DM do IMECC para receber esta oportunidade):

2014-1 Introdução à homologia

2014-2 Teoria de Morse e Conley

2015-1 Homologia de Morse para o fluxo de calor.

No semestre presente 1-2014 o candidato já está assistindo o primeiro curso da trilogia. Além disso ele assistiu ao meu curso *Algebra linear* do semestre passado e foi um dos melhores dos 82 alunos. Para o conteúdo detalhado dos cursos veja www.ime.unicamp.br/~joa/index.html

3 Metas Semestrais

- 2014-2**
 - Estudar e entender as desigualdades de Morse no caso fechado de dimensão finita
 - Escrever uma exposição sumária e dar uma apresentação (palestra)
- 2015-1**
 - Encontrar e entender aplicações das desigualdades de Morse
 - Facultivamente, se tempo permite, estudar o caso de uma variedade bordada
 - Escrever uma exposição sumária e dar uma apresentação (palestra).

As duas exposições sumárias juntas têm que ter pelo menos 10 páginas.

4 Métodos

Os métodos matemáticos são as teorias de Morse, dos sistemas dinâmicos hiperbólicos e a topologia algébrica. Além disso serão envolvidos elementos de análise global. O trabalho consistirá no estudo da bibliografia como apresentado no cronograma e dar apresentações escritas e na forma de palestras, sobre os resultados obtidos.

5 Cronograma

- 2014-2**
- Assistir ao curso "Teoria de Morse e Conley"
 - Familiarizar-se com a teoria de Morse estudando o artigo sumário de Bott [3], veja também [2], e no livro clássico de Milnor [6] parágrafos 1–6 do capítulo I.
 - Estudar e entender a prova de Teorema D; consequentemente as desigualdades de Morse.
- 2015-1**
- Estudar e entender Teoremas A e B e como eles implicam as desigualdades de Morse.
 - Descobrir e familiarizar-se com várias aplicações das desigualdades de Morse
 - Facultivamente, se tempo permite, estudar o caso de uma variedade bordada

6 Bibliografia

Referências

- [1] A. Abbondandolo and P. Majer. Lectures on the Morse complex for infinite-dimensional manifolds. In *Morse theoretic methods in nonlinear analysis and in symplectic topology*, volume 217 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, pages 1–74. Springer, Dordrecht, 2006.
- [2] R. Bott. Lectures on Morse theory, old and new. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 7(2):331–358, 1982.
- [3] R. Bott. Morse theory indomitable. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 68:99–114, 1988.
- [4] A. Floer. Morse theory for Lagrangian intersections. *J. Differential Geom.*, 28(3):513–547, 1988.
- [5] A. Floer. Symplectic fixed points and holomorphic spheres. *Comm. Math. Phys.*, 120(4):575–611, 1989.
- [6] J. Milnor. *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [7] J. Milnor. *Lectures on the h-cobordism theorem*. Notes by L. Siebenmann and J. Sondow. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1965.

- [8] M. Morse. *The calculus of variations in the large*, volume 18 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Reprint of the 1932 original.
- [9] M. Poźniak. The Morse complex, Novikov homology, and Fredholm theory. Preprint, University of Warwick, 1991.
- [10] M. Schwarz. *Morse homology*, volume 111 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [11] S. Smale. Morse inequalities for a dynamical system. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66:43–49, 1960.
- [12] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:747–817, 1967.
- [13] R. Thom. Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 228:973–975, 1949.
- [14] J. Weber. Der Morse-Witten Komplex. Master’s thesis, TU Berlin, Februar 1993.
- [15] J. Weber. The Morse-Witten complex via dynamical systems. *Expo. Math.*, 24(2):127–159, 2006.
- [16] J. Weber. Morse homology for the heat flow. *Math. Z.*, 275(1-2):1–54, 2013.
- [17] E. Witten. Supersymmetry and Morse theory. *J. Differential Geom.*, 17(4):661–692, 1982.