

Introdução à homologia

MM811

Lista 9 – Homologia celular de espaços CW

Exercícios.

Seja X um espaço CW finito e $\mathcal{CW}(X) = (CW_k(X, \text{Or}), \partial_k^{\text{CW}})_{k \in \mathbb{Z}}$ o complexo de cadeias associado. Os grupos de cadeias são os grupos abelianos gerados livremente pelas k -células orientadas de X :

$$CW_k(X, \text{Or}) := \bigoplus_{e \in \mathcal{E}^k(X)} \mathbb{Z}[e].$$

O operador bordo é definido numa k -célula orientada $[a]$ como

$$\partial_k^{\text{CW}}[a] := \sum_{b \in \mathcal{E}^{k-1}(X)} [a : b] \cdot [b]$$

onde $[a : b]$ é o grau da aplicação

$$\Delta_{ab} : \partial D_a^k = S_a^{k-1} \xrightarrow{\varphi_a = \Phi_a|} X^{k-1} \xrightarrow{q} \frac{X^{k-1}}{X^{k-1}} \xrightarrow{q_b} S_b^{k-1}.$$

Nos casos seguintes determine uma decomposição CW de X , o complexo CW de X e a sua homologia.

- a) $X = T^2$
- b) $X = GK$ (garrafa de Klein)
- c) $X = \mathbb{R}P^2$
- d) $X = S^n$