Departamento de Matemática — 1º Semestre de 2014
Imecc Unicamp
Joa Weber

Introdução à homologia

MM811

Lista 8 – Tipo de homotopia e retrações

Sejam X e Y espaços topológicos.

Definição 1. Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ é uma *equivalência por homotopia* se existe uma aplicação contínua $g : Y \to X$ tal que as duas composições são homotópicos às aplicações identidades:

$$g \circ f \sim id_X, \qquad f \circ g \sim id_Y.$$

Neste caso f e g são chamados *inversas por homotopia uma da outra* e chamamos os espaços topológicos X e Y do *mesmo tipo de homotopia*: $X \sim Y$.

Definição 2. Seja $\iota : A \hookrightarrow X$ a inclusão do subespaço A no espaço topológico X.

- Uma aplicação contínua $r : X \to A$ tal que $r \circ \iota = id_A$ é chamado *retração de X sobre A.* Neste caso chamamos A um *retrato de X*.
- Seja demais $\iota \circ r \sim id_X$, então r é chamado de *retração de deformação* e A de *retrato de deformação.*
- Se além disso a homotopia $\iota \circ r \sim id_X$ poderia ser realizada tal que cada um ponto de A fica constante durante toda a homotopia, então A é chamado de *retrato forte de deformação.*

Seja $\mathrm{H}_* X = \mathrm{H}_*(X;\mathbb{Z})$ a homologia singular com coeficientes inteiros.

Exercícios.

a) Mostre que

   i) $X \sim Y \quad \Rightarrow \quad \mathrm{H}_* X \cong \mathrm{H}_* Y$.

   ii) X contratil (X tem o tipo de homotopia de um ponto) $\quad \Rightarrow \quad \mathrm{H}_* X = \{0\}$.

b) Mostre que:

   i) A esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é um retrato (forte) de deformação.

   ii) Se $A \subset X$ é um retrato de deformação de X, então a inclusão $\iota : A \hookrightarrow X$ é uma equivalência por homotopia.

c) Mostre que:

i) Seja g uma retração de X sobre A e $\iota : A \hookrightarrow X$ a inclusão. Então

$$\iota_* : \mathrm{H}_* A \rightarrowtail \mathrm{H}_* X, \qquad \mathrm{Im}\, \iota_* \oplus \ker g_* \cong \mathrm{H}_* X,$$

onde $\rightarrowtail$ indica um homomorphismo injectivo e $\cong$ significa isomorfismo.

ii) Se A é um retrato de deformação de X, então $\iota_* : \mathrm{H}_* A \cong \mathrm{H}_* X$.

d) Considere o subespaço $X \subset \mathbb{R}^2$ (com a topologia induzida) que contem o segmento horizontal $A := [0,1] \times \{1\}$ e todos os segmentos verticais da forma $\{q\} \times [0, 1-q]$ onde $q \in \mathbb{Q}$. Prove que todo ponto de A é um retrato de deformação de X mas nenhum ponto do complemento $X \setminus A$ é.

[Dica: Poderia usar (e provar) o seguinte fato: Seja $y \in Y$ um retrato de deformação de um espaço topologico Y. Então para toda vizinhança U de y em Y existe uma vizinhança $V \subset U$ de y tal que a inclusão $\iota : V \hookrightarrow U$ é homotópico a um ponto $p \in U$ (a uma aplicação constante $\gamma(V) = p \in U$).]

e) Prove o teorema de Brouwer: Seja $n \in \mathbb{N}$. Então toda aplicação contínua $f : D^n \to D^n$ possui um ponto fixo.

[Dica: Não existe nenhuma retração $g : D^n \to S^{n-1}$.]

f) Sejam $f, g : X := [0,1] \to Y := S^1 \subset \mathbb{C}$ dados por $f(x) = e^{2\pi i x}$ e $g(x) = 1$. Sejam $A = \{0,1\}$ e $B = \{1\}$. Mostre que

- $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ $\;(:\Leftrightarrow\; f \in C^0(X,Y) \wedge f(A) \subset B)$
- $f \sim g : X \to Y$
- $f \not\sim g : (X, A) \to (Y, B)$

Sequência exata de Mayer-Vietoris

g) Calcule $\mathrm{H}_* S^1$ usando a sequência exata de Mayer-Vietoris.

h) (Necessidade da abertura da coberta) Seja $X = S^1$. Fixe $p \in S^1$ e considere a cobertura $\mathcal{U} := \{p, S^1 \setminus p\}$ de S^1. Mostre que $\mathrm{H}_1(S^{\mathcal{U}} X) = 0$ onde $S^{\mathcal{U}} X$ é o complexo singular das cadeias $\mathcal{U}$-pequenas.