DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
IMECC UNICAMP
Joa Weber

1º SEMESTRE DE 2014

Introdução à homologia

MM811

Lista 7 – Homologia singular

Seja G um anel comutativo.

Exercícios.

a) (Homologia singular no grau zero) Dado um espaço topologico X considere o G-módulo $\mathrm{S}_0X = \mathrm{S}_0(X;G)$ das 0-cadeias singulares em X. Observe que S_0X é gerado livremente pelos pontos p de X. Por definição o *índice de Kronecker* é o G-módulo homomorfismo

$$\begin{aligned} \mathrm{In} : \mathrm{S}_0X &\to G \\ \sum x_p p &\mapsto \sum x_p. \end{aligned}$$

Obviamente In é sobrejetivo. Mostre que

i) $\mathrm{B}_0X \subset \ker \mathrm{In}$

ii) X conexo por camino $\Rightarrow$ $\ker \mathrm{In} \subset \mathrm{B}_0X$ $\Rightarrow$ $\mathrm{H}_0X \simeq G$.

Característica de Euler

b) Seja G um PID (principal ideal domain)[1] e seja $\mathcal{C} = (\mathrm{C}_k, \partial_k)$ um complexo de cadeias no qual todos os G-módulos C_k são **livres** e no caso $\ell \notin \{0, \dots, n\}$ até são triviais ($C_\ell = 0$). Sejam $z_k/\beta_k/c_k$ os postos dos G-módulos (livres)

$$\mathrm{Z}_k := \ker \partial_k, \quad \mathrm{B}_k := \mathrm{im}\, \partial_{k+1}, \quad \mathrm{C}_k,$$

respectivamente. O *k-ésimo número de Betti* b_k do complexo $\mathcal{C}$ é o posto do parte livre do G-módulo quociente $\mathrm{H}_kX := Z_k/B_k$. Prove que para todo $k \in \mathbb{Z}$

i) $c_k = z_k + \beta_{k-1}$

ii) $z_k = b_k + \beta_k$

iii) $\sum_{k=0}^n (-1)^k b_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k c_k =: \chi(\mathcal{C})$

onde $\chi(\mathcal{C})$ é chamado a *característica de Euler* do complexo $\mathcal{C}$.

iv) Onde você usou a hipotese que os C_k são livre?

[1] então todo submódulo de qualquer G-módulo livre é livre