Departamento de Matemática
Imecc Unicamp
Joa Weber

1º Semestre de 2014

Introdução à homologia

MM811

Lista 5 – Conjuntos convexos, poliedros

Definição 1. A *envoltória convexa de um subconjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ é o subconjunto

$$\langle X \rangle_{\text{conv}} := \{\text{todos combinações convexos de elementos de } X\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Definição 2 (Definição alternativa do poliedro)**.** Um *poliedro* K é uma reunião finita de simplexos abertos, dois a dois disjuntos, tal que cada face de um desses simplexos é ainda um deles.

Exercícios.

a) Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Prove que:

   i) A envoltória convexa $\langle X \rangle_{\text{conv}}$ é um conjunto convexo.

   ii) A envoltória convexa é o menor conjunto convexo que contém X: Todo conjunto convexo que contém X contém $\langle X \rangle_{\text{conv}}$.

   iii)
$$\langle X \rangle_{\text{conv}} = \bigcap_{\text{conjuntos convexos } Y \supset X} Y$$

b) Mostre que a definição alternativa do poliedro é equivalente à definição dado na aula.

c) Sejam L e M subpoliedros do poliedro K. Prove que $L \cap M$ e $L \cup M$ são subpoliedros de K.

d) Considere um n-simplexo $s = \langle a_0, \dots, a_n \rangle$ e o poliedro K dado por s e todas suas faces. Seja K^{n-1} o $(n-1)$-esqueleto de K (todas faces $\sigma \neq s$ de s). Mostre que a homologia simplicial relativa é dado por

$$\mathrm{H}_*(K, K^{n-1}; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & , * = n, \\ 0 & , * \neq n. \end{cases}$$

Espaço projetivo e garafa de Klein

e) Mostre que a homologia simplicial integral do espaço projetivo $\mathbb{R}P^2$ é

$$\mathrm{H}_*\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}\right) = \begin{cases} 0 & ,* = 2, \\ \mathbb{Z}_2 & ,* = 1, \\ \mathbb{Z} & ,* = 0. \end{cases}$$

Para obter uma triangulação poderia guarnecer Figura 1 com uma estrutura de um poliedro K. Na figura identifique uma 1-cadeia cuja classe de homologia representa H_1.

f) Mostre que a homologia simplicial integral da garafa de Klein GK é

$$\mathrm{H}_*\left(GK;\mathbb{Z}\right) = \begin{cases} 0 & ,* = 2, \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2 & ,* = 1, \\ \mathbb{Z} & ,* = 0. \end{cases}$$

Para obter uma triangulação poderia guarnecer Figura 2 com uma estrutura de um poliedro L. Na figura identifique uma 1-cadeia w_1 cuja classe de homologia representa a parcela $\mathbb{Z}$ e identifique uma 1-cadeia z_1 que representa $\mathbb{Z}_2$. Visualiza GK como superfície (immersado) de $\mathbb{R}^3$ e verifique geometricamente que $2z_1$ é um bordo.

g) Calcule $\mathrm{H}_*\left(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}_2\right)$ e $\mathrm{H}_*\left(GK;\mathbb{Z}_2\right)$.

Figura 1

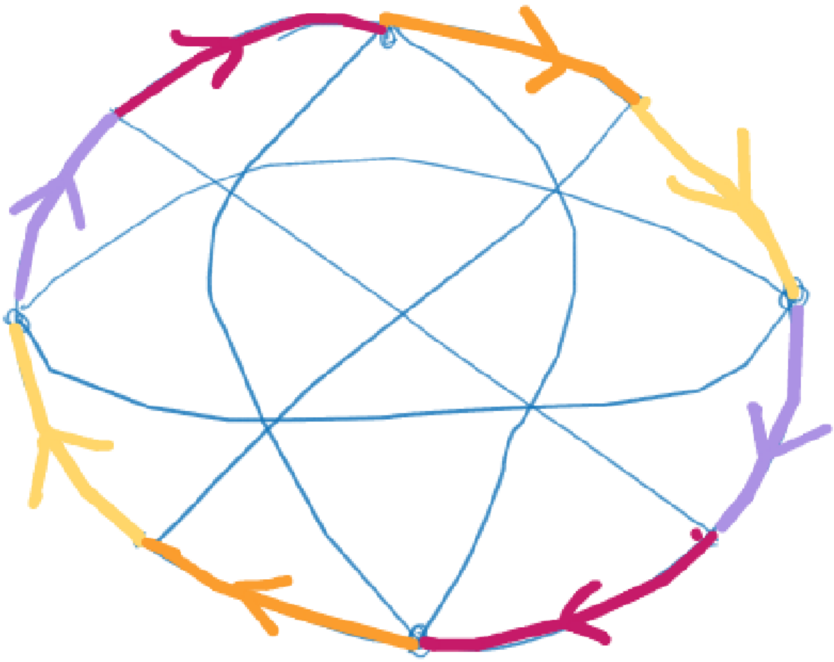

Figura 2