Departamento de Matemática — Imecc Unicamp
Joa Weber

1º Semestre de 2014

Introdução à homologia

MM811

Lista 4 – Sequências exatas

Exercícios.

a) Sejam $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ e $\overline{\mathcal{C}}$ os complexos da Lista 2. Considere a inclusão:

$$i = (i_p) : \mathcal{C}' \hookrightarrow \mathcal{C}\,, \qquad \begin{aligned} i_p : C'_p &\hookrightarrow C_p\,, \\ y &\mapsto y \end{aligned}$$

e a projeção

$$j = (j_p) : \mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}} := \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}'}\,, \qquad \begin{aligned} j_p : C_p &\to \frac{C_p}{C'_p} := \left\{x + C'_p \mid x \in C_p\right\}. \\ x &\mapsto x + C'_p \end{aligned}$$

i) Mostre que i e j são *morfismos de complexos de cadeias*: sequências de homomorfismos os quais comutam com os operadores bordos.

ii) Mostre que $0 \to \mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{j} \overline{\mathcal{C}} \to 0$ é uma *sequência exata curta*: i injetivo, $\operatorname{im} i = \ker j$, j sobrejetivo.

iii) Calcule a sequência exata de homologia associada à sequência exata curta do item ii): $\partial_*[\overline{z}] := [z']$ onde $jx = \overline{z}$ e $iz' = \partial x$ e

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H'_2 \arrow[r, "i_*"] & H_2 \arrow[r, "j_*"] & \overline{H_2} \arrow[dll, "\partial_*"'] & \\
& H'_1 \arrow[r, "i_*"'] & H_1 \arrow[r, "j_*"'] & \overline{H_1} \arrow[r, "\partial_*"'] & \ldots
\end{tikzcd}$$

$(\partial_*[\overline{z}] = [\text{"}i^{-1}\partial j^{-1}\text{"}\overline{z}])$.

b) Uma sequência exata curta $0 \to M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ é chamada *separável* se o submódulo $f(M)$ de N é complementado: Existe um submódulo $L \subset N$ tal que $N = f(M) \oplus L$.
Mostre que: A sequência exata curta é separável se, e somente se, existe um isomorfismo $h : N \to M \oplus P$ que torna comutativo o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i", "i(m)=(m,0)"'] & N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & P \arrow[r] & 0\,. \\
& & M \oplus P \arrow[ur, "j"', "j(m,p)=p"] & &
\end{tikzcd}$$