Departamento de Matemática — 1º Semestre de 2014
Imecc Unicamp
Joa Weber

Introdução à homologia

MM811

Lista 3 – Homotopias algébricas

Exercícios.

Definição 1. Seja A um anel comutativo (com identidade). Um *complexo de cadeias* (com coeficientes em A) é uma sequência $\mathcal{C} = (C_p, \partial_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de A-módulos C_p e homomorfismos $\partial_p : C_p \to C_{p-1}$, chamados de *operadores bordos*, tais que $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$.

Sejam $\mathcal{X} = (X_p, \partial_p)$ e $\mathcal{Y} = (Y_p, \partial_p)$ complexos de cadeias (CC).

Definição 2. Um *morfismo (de complexos de cadeias)* $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é uma sequência $f = (f_p : X_p \to Y_p)$ de A-módulo homomorfismos os quais comutam com os operadores bordos.

Definição 3. Morfismos $f, g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ são chamados *(algebricamente) homotópicos*, denotado $f \sim g$, se existe uma *homotopia de cadeias* (ou *homotopia algébrica*) entre eles: uma sequência de homomorfismos $D = (D_p : X_p \to Y_{p+1})$ tal que

$$f - g = \partial D + D\partial.$$

a) Dado uma sequência de homomorfismos $D = (D_p : X_p \to Y_{p+1})$, prove que $h := \partial D + D\partial : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ é um *morfismo*.

b) Prove que " $\sim$ " é uma *relação de equivalência*: Para todos f, g, h valem

$$\begin{aligned} &\text{(Reflexividade)} && f \sim f \\ &\text{(Simetria)} && f \sim g \quad \Rightarrow \quad g \sim f \\ &\text{(Transitividade)} && f \sim g \;\wedge\; g \sim h \quad \Rightarrow \quad f \sim h. \end{aligned}$$

c) (Os iterados de morfismos homotópicos que comutam são homotópicos)
Sejam $f \sim g : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ morfismos homotópicos e $f^n := f \circ \cdots \circ f$. Prove que:

$$[f, g] := f \circ g - g \circ f = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f^n \sim g^n.$$

d) Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ complexos de cadeias tais que todos os A-módulos X_p e Y_p são *livres* (admitem uma base) e todos os submódulos deles são livres[1]. Se os morfismos $f, g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ induzem o mesmo homomorfismo $f_* = g_* : \mathrm{H}_p(\mathcal{X}) \to \mathrm{H}_p(\mathcal{Y})$ para cada um p, prove que $f \sim g$.

[1] Por exemplo, se A é um PID (principal ideal domain), então todo submódulo de qualquer A-módulo livre é livre.

e) Considere o complexo de cadeias formado pela sequência de $\mathbb{Z}$-módulos e homomorfismos

$$\mathcal{C} : 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0, \quad \alpha(n) = 2n, \quad \beta(m) = m \pmod 2.$$

Prove que o morfismo identidade $\mathrm{id} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ e o morfismo zero induzem os mesmos homomorfismos na homologia de $\mathcal{C}$ mas não são homotópicos: $\mathrm{id} \nsim 0$.