Complexos de Cadeias e Homologia

(1) Seja $A := \mathbb{Z}$ e seja C_0 o grupo abeliano livre gerado pelos símbolos a, b, c:

$$C_0 := \langle a, b, c \rangle \simeq \mathbb{Z}^3.$$

Considere $\mathcal{C} = (C_p, \partial_p)$ definido por

$$\begin{array}{l}
C_p := 0 \qquad \forall p \geq 3 \\
\downarrow \partial_p = 0 \\
\vdots \\
C_2 := \langle abc \rangle \simeq \mathbb{Z} \\
\downarrow \partial_2(abc) := ab + bc + ca \\
C_1 := \langle ab, bc, ca \rangle \simeq \mathbb{Z}^3 \\
\downarrow \partial_1 := \left\{ \begin{array}{l} ab \mapsto b - a \\ bc \mapsto c - b \\ ca \mapsto a - c \end{array} \right. \\
C_0 := \langle a, b, c \rangle \simeq \mathbb{Z}^3 \\
\downarrow \partial_0 = 0 \\
0
\end{array}$$

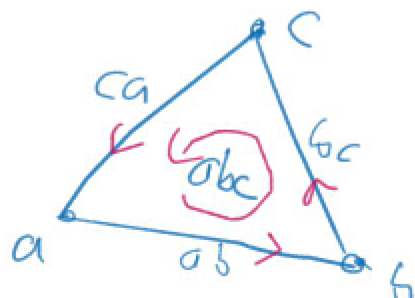
$\boxed{\text{onde } a, b, c, \; ab, bc, ca, \; abc \text{ são símbolos/nomes}}$

a) Verifique que $\mathcal{C}$ é um complexo de cadeias: $\partial^2 = 0$.

b) Mostre que os grupos de homologia são dado por

$$H_p = H_p(\mathcal{C}) := \frac{Z_p}{B_p} \simeq \begin{cases} 0 \, , & p \geq 1, \\ \mathbb{Z} \, , & p = 0. \end{cases}$$

c) Interprete a) e b) geométricamente:
Imagine a, b, c como os vértices do triângulo abc e ab, bc, ca como seus lados:



Imagine ∂(símbolo) como o bordo topológico do objeto geométrico correspondente ao símbolo.

De fato temos calculado (sem saber) a homologia simplicial de um triângulo:

$$H_p^{simp}(\blacktriangle) = \begin{cases} 0, & p=2: \text{ não contem superfície (dim 2) sem bordo.} \\ 0, & p=1: \ \forall \text{ curva fechada simples é bordo de uma superfície} \\ \mathbb{Z}, & p=0: \ \forall \text{ ponto é homólogo a qualquer outro} \\ & \text{(simplesmente conexa os dois pontos por uma linha)} \end{cases}$$

② Com a notação de ① seja $\mathcal{C}'$ def. por

$$
\begin{array}{l}
C_p' := 0 \\
\downarrow \partial_p' := 0 \\
\vdots \\
C_2' := 0 \\
\downarrow \partial_2' := 0 \\
C_1' := C_1 = \langle ab, bc, ca \rangle \\
\downarrow \partial_1' := \partial_1 \\
C_0' := C_0 = \langle a, b, c \rangle \\
\downarrow \partial_0' := 0 \\
0
\end{array}
$$

a) Verifique que $\mathcal{C}'$ é um sub-complexo de $\mathcal{C}$,

b) Mostre que

$$H_p' = H_p(\mathcal{C}') = \begin{cases} 0, & p \geq 2 \\ \mathbb{Z}, & p = 0, 1 \end{cases}$$

c) Interprete $\mathcal{C}'$ geometricamente.

Temos calculado a homologia simplicial do bordo $\triangle$ do triângulo $\blacktriangle$:

$$H_p^{sim}(\triangle) = \begin{cases} 0, & p \geq 2 : \text{não contem objetos da dimensão} \geq 2 \\ \mathbb{Z}, & p = 1 : \text{a única curva fechada simples e orientada } \triangle \text{ não borda nenhuma superfície} \\ \mathbb{Z}, & p = 0 : \text{um componente conexo} \end{cases}$$

③ Com a notação de ① e ② determine o complexo quociente

$$\overline{\mathcal{C}} = (\overline{C}_p, \overline{\partial}_p) \quad \text{onde} \quad \overline{C}_p := \frac{C_p}{C'_p}$$

e $\overline{\partial}_p [x] := [\partial_p x]$.

Mostre que sua homologia é

$$\overline{H}_p = H_p(\overline{\mathcal{C}}) = \begin{cases} 0, & p \geq 3 \\ \mathbb{Z}, & p = 2 \\ 0, & p = 0, 1 \end{cases}$$

Temos calculado a homologia simplicial do par $(\blacktriangle, \triangle)$ de espaços topológicos.

[Conta como ciclo cada uma cadeia em $\blacktriangle$ cujo bordo é contido em $\triangle$]

4

sobrejetivo

a) Dê um exemplo de um morfismo injetivo $\varphi: X \to Y$ entre complexos de cadeias cujo morfismo induzido $\varphi_*: H_*(X) \to H_*(Y)$

sobrejetivo

não é injetivo.

b) ...