Departamento de Matemática — 1º Semestre de 2014
Imecc Unicamp
Joa Weber

Introdução à homologia

MM811 – Lista 11

Exercícios.

Cálculo vetorial clássico em $\mathbb{R}^3$

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um subconjunto aberto e sejam (x^1, x^2, x^3) as coordenadas em U.

a) Considere o

(elemento linha) $d\vec{\ell} := (dx^1, dx^2, dx^3) \in \Lambda^1(U; \mathbb{R}^3) = C^\infty(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^3))$
(elemento área) $d\vec{a} := (dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1, dx^1 \wedge dx^2) \in \Lambda^2(U; \mathbb{R}^3)$
(elemento volume) $dvol := dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \in \Lambda^3(U)$

e mostre que

i) $d\vec{\ell}|_x = Id \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$
ii) $d\vec{a}|_x : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (v, w) \mapsto v \times w$ é o produto vetorial
iii) $d\,vol|_x : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (u, v, w) \mapsto \det(u, v, w)$ é o determinante

para todo $x \in U$.

b) Mostre que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Lambda^0(U) & \xrightarrow{d} & \Lambda^1(U) & \xrightarrow{d} & \Lambda^2(U) & \xrightarrow{d} & \Lambda^3(U) & \xrightarrow{d} & 0 \\
 & & = \uparrow id & & \cong \uparrow d\vec{\ell}\cdot & & \cong \uparrow d\vec{a}\cdot & & \cong \uparrow \cdot dvol & & \\
0 & \longrightarrow & C^\infty(U) & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{X}(U) & \xrightarrow{\mathrm{rot}} & \mathcal{X}(U) & \xrightarrow{\mathrm{div}} & C^\infty(U) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

onde $\mathcal{X}(U)$ denota o conjunto $C^\infty(U, \mathbb{R}^3)$ dos campos de vetores em U e

$$\nabla := (\partial_1, \partial_2, \partial_3)^{\mathrm{T}} \qquad \mathrm{rot}\,\xi := \nabla \times \xi \qquad \mathrm{div}\,\xi := \nabla \cdot \xi = \partial_1\xi_1 + \partial_2\xi_2 + \partial_3\xi_3.$$

Alem disso $f \cdot dvol$ denota multiplicação por uma função e

$$d\vec{\ell} \cdot \xi := \xi_\mu dx^\mu \qquad d\vec{a} \cdot \xi := \xi_1 dx^2 \wedge dx^3 + \textit{cíclico}.$$

c) Seja U contrátil. Mostre que

i) $\mathrm{rot}\,\xi = 0 \;\Rightarrow\; \xi = \nabla f$ para um $f \in C^\infty(U)$;
ii) $\mathrm{div}\,\xi = 0 \;\Rightarrow\; \xi = \mathrm{rot}\,\eta$ para um $\eta \in \mathcal{X}(U)$;
iii) toda função é da forma $f = \mathrm{div}\,\xi$ para um $\xi \in \mathcal{X}(U)$.

Cohomologia de de Rham

d) Mostre que $\mathrm{H}^k(S^1) \cong \mathbb{R}$ para $k = 0, 1$ do modo *algébrico*: use a sequência exata de Mayer-Vietoris e cálcule dimensões pelo teorema de núcleo e imagem.

e) Encontre uma forma diferencial $\alpha_1 \in \Lambda^1(S^1) = \mathrm{Z}^1(S^1)$ tal que $[\alpha_1]$ gera $\mathrm{H}^1(S^1)$. Mais precisamente encontre α_1 de modo

   i) *geométrico*: use uma partição da unidade para construir e visualizar α_1;

   ii) *analítico*: identifique $\Lambda^0(S^1)$ e o conjunto $\Lambda^0_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ das funções diferenciáveis $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódicas do período 1: vale $f(t+1) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Analogamente identifique $\Lambda^1(S^1)$ e $\Lambda^1_{\mathrm{per}}(\mathbb{R}) = \{\alpha = a(t)dt \mid a \in \Lambda^0_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})\}$. Depois encontre e fixe $\alpha_1 \in \Lambda^1_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ fechado e não exato. Então mostre que todo $\alpha \in \Lambda^1_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ pode ser escrito na forma $c\alpha_1 + df$ para um $f \in \Lambda^0_{\mathrm{per}}(\mathbb{R})$ e uma *constante* $c \in \mathbb{R}$ (os quais ambos dependem de α).

Cohomologia com suportes compactos

f) Mostre que $\mathrm{H}^0_c(\mathbb{R}) = 0$ e $\mathrm{H}^1_c(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.

   [Dica: Considere a transformação linear

$$\Lambda^1_c(\mathbb{R}) = \mathrm{Z}^1_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : \omega \mapsto \int_{\mathbb{R}} \omega.$$

   e determine seu núcleo.]

g) Cálcule $\mathrm{H}^*_c(T^2)$ usando a sequência exata de Mayer-Vietoris onde $T^2 = S^1 \times S^1$.