Departamento de Matemática — 1º Semestre de 2014
Imecc Unicamp
Joa Weber

Introdução à homologia

MM811

Lista 10 – Complexo de de Rham

Exercícios.

Variedades

a) Considere as esferas unitárias $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ e $S^\ell \subset \mathbb{R}^{\ell+1}$. Prove que $S^k \times S^\ell$ é difeomorfo a uma variedade $M \subset \mathbb{R}^{k+\ell+1}$.

[Dica: Óbviamente $S^k \times S^\ell \subset \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{\ell+1} = \mathbb{R}^{k+\ell+2}$. Infelizmente, uma dimensão demais... Como passo intermediato, poderia ser boa idea mostrar que $S^k \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$ ou até mesmo $S^k \times (0,\infty) \cong \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\}$.]

b) Sejam X e Y variedades fechadas[1] k-dimensionais contido no mesmo espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$ tal que $X \cap Y = \emptyset$. É um fato que neste caso a união $X \cup Y$ é uma variedade. Encontre exemplos que mostram que a conclusão não é valido sem a hipótese que as variedades X e Y são *ambas* fechadas.

[Dica: O caso $k = 0$ seguramente seria o mais fácil..]

Formas alternadas e diferenciais

Seja E um espaço vetorial real e M uma variedade, ambos de dimensão n.

c) Dado $\omega \in (\Lambda^n E) \setminus \{0\}$, mostre que a transformação linear

$$\begin{aligned} \iota_{\cdot}\omega : E &\to \Lambda^{n-1}E, \\ u &\mapsto \iota_u \omega, \end{aligned}$$

é um isomorfismo.[2]

d) Determine a fórmula de mudança de coordenadas para k-formas: Dados cartas locais (U,φ) e $(U,\bar\varphi)$ de M escrevemos as coordenadas como

$$h = (u^1, \ldots, u^n), \qquad \bar h = (u^{\bar 1}, \ldots, u^{\bar n}).$$

Como podem as funções coordenadas $\omega_{\mu^{\bar 1}\ldots\mu^{\bar k}}$ de uma forma diferencial $\omega \in \Lambda^k M$ ser calculado dos $\omega_{\mu^1\ldots\mu^k}$?

[1] contem todo ponto limite

[2] Dado $\xi \in E$, o *produto interior* $\iota_\xi : \Lambda^k E \to \Lambda^{k-1}E$ é definido como

$$(\iota_\xi \eta)(w_1, \ldots, w_{k-1}) := \omega(\xi, w_1, \ldots, w_{k-1}). \tag{1}$$

e) Seja $R_\alpha \subset \mathbb{R}^2$ o semi-raio com ponto inicial a origem e α o ângulo ao eixo–x. A função ângulo

$$\theta_\alpha : \mathbb{R}^2 \setminus R_\alpha \to (\alpha - 2\pi, \alpha) \subset \mathbb{R}$$

das coordenadas polares é bem definido e diferenciável. Seja $\omega_\alpha := d\theta_\alpha$ sua diferencial. Então qualquais duas diferenciais ω_α e ω_β coincidem em $\mathbb{R}^2 \setminus (R_\alpha \cup R_\beta)$. Por-que? Consequentemente as ω_α's determinam únicamente uma forma global $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. (Esta aparece, por exemplo, na matemática na análise complexa e na física no efeito de Aharonov-Bohm.) Prove que não existe nemhuma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ tal que $\omega = df$.

[Dica: Se existia, que se poderia dizer sobre $f - \theta_\pi$? Seria posível?]

Produto exterior e derivação exterior

f) Mostre que a transformação alternada k–linear

$$u : E^* \times \cdots \times E^* \to \Lambda^k E, \qquad (\phi^1, \ldots, \phi^k) \mapsto \phi^1 \wedge \cdots \wedge \phi^k$$

é *universal* no sentido seguinte: Para toda transformação alternada k–linear $\alpha : E^* \times \cdots \times E^* \to F$ num espaço vetorial real F existe uma única transformação linear $T : \Lambda^k E \to F$ tal que $\alpha = T \circ u$.

g) Dado $\omega \in \Lambda^{n-1} M$, mostre que em respeito a uma carta local é valido

$$d\omega(\partial_1, \ldots, \partial_n) = \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\mu-1} \partial_\mu \omega_{1\ldots\hat{\mu}\ldots n}.$$

h) Seja $\omega := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \in \Lambda^n \mathbb{R}^n$. Seja[3] $v = v^\mu \partial_\mu$ um *campo de vetores no* $\mathbb{R}^n$: uma aplicação diferenciavel $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Determine[4] $\eta := \iota_v \omega \in \Lambda^{n-1} \mathbb{R}^n$ e $d\eta \in \Lambda^n \mathbb{R}^n$.

[3] *Cálculo de Ricci*: Uma soma $\sum_{\mu=1}^n v^\mu \partial_\mu$ sobre o mesmo índice emcima e embaixo é abreviado $v^\mu \partial_\mu$.

[4] Dado um campo de vetores ξ numa variedade M, o *produto interior* $\iota_\xi : \Lambda^k M \to \Lambda^{k-1} M$ é definido no cada um ponto $p \in M$ usando (1) para $E = T_p M$:

$$\left(\iota_\xi \alpha\right)_p := \iota_{\xi(p)} \alpha_p. \tag{2}$$