

Introdução à homologia

MM811

Lista 1 – A -módulos e seqüências exatas duais

Exercícios.

- a) Mostre que existe uma bijeção

$$\{\mathbb{Z}\text{-módulos}\} \longleftrightarrow \{\text{grupos abelianos}\}.$$

- b) Seja $\text{Hom}(M, N)$ o conjunto de homomorfismos entre os A -módulos M e N .
Seja $A := \mathbb{Z}$, prove que $\text{Hom}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = \{0\}$ e $\text{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2) \neq \{0\}$.

- c) Encontre um exemplo de uma seqüência exata curta (S.E.) de A -módulo homomorfismos

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

cujas seqüência dual

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M_3, A) \xrightarrow{g^T} \text{Hom}(M_2, A) \xrightarrow{f^T} \text{Hom}(M_1, A) \rightarrow 0$$

não é exata.

- d) Encontre um exemplo de uma S.E. de A -módulo homomorfismos

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$

cujas seqüência dual $\text{Hom}(M_3, A) \xrightarrow{g^T} \text{Hom}(M_2, A) \xrightarrow{f^T} \text{Hom}(M_1, A)$ não é exata.
[Dica: Vale exatidão se cada um A -módulo homomorfismo $g(M_2) \rightarrow A$ estende-se a M_3 .]