Departamento de Matemática
Imecc Unicamp
Joa Weber

1º Semestre de 2014

Álgebra Linear

MA327 – Turmas Y e especial

Lista 1a – Corpos e (sub)espaços vetoriais

Definição 1. Um conjunto $G \neq \emptyset$ munido de uma operação

$$\begin{aligned} * : G \times G &\to G, \\ (f,g) &\mapsto f * g \end{aligned}$$

é um **grupo** se, e somente se, valem as seguintes propriedades.

a) Associatividade: $f * (g * h) = (f * g) * h$ para todos $f, g, h \in G$;

b) Elemento neutro: Existe $e \in G$ tal que $e * g = g$ para todo $g \in G$;

c) Elemento Inverso: Existe $\bar{g} \in G$ tal que $g * \bar{g} = e$ para todo $g \in G$.

Um grupo é um **grupo abeliano** se também valer a seguinte propriedade.

d) Comutatividade: $f * g = g * f$ para todos $f, g \in G$.

Definição 2. Um conjunto $\mathbb{K}$ munido de duas operações

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K} \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto \mathbb{K}$$

é um **corpo** se, e somente se, valem as seguintes propriedades.

a) $(\mathbb{K}, +)$ é um grupo abeliano;

b) $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo abeliano;

c) Distributividade: $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$.

Definição 3. $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ é um **espaço vetorial** sobre o corpo $\mathbb{K}$ se, e somente se, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $v, w \in E$ valem as seguintes propriedades.

a) $(E, +)$ é um grupo abeliano;

b) Distributividade: $\begin{cases} (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v; \\ \alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w; \end{cases}$

c) Compatibilidade: $\begin{cases} (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v); \\ 1v = v. \end{cases}$

Exercícios.

a) Seja $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Sabemos da primeira aula que para todos $u, v, w \in E$ temos que $w + u = w + v \Rightarrow u = v$. Mostre que para todos $\alpha \in \mathbb{K}$ que

   i) $\alpha w = \mathcal{O} \iff a = 0$ ou $w = \mathcal{O}$, onde $\mathcal{O}$ denota o vetor nulo do espaço vetorial.

   ii) $(-\alpha)w = -(\alpha w)$.

b) Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}_n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que para todos $a, b \in \mathbb{Z}_n$ temos

$$a +_n b := a + b \pmod{n} \qquad a \cdot_n b := ab \pmod{n},$$

onde para todo $l \in \mathbb{Z}$: $l \,(\mathrm{mod}\, n) := r$ se, e somente se, $l = kn + r$ com $0 \leq r < n$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Fato. $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ é um corpo $\iff$ n é um número primo.

Seja $n = 6$:

   i) Calcule a tabela da adição e da multiplicação no caso $\mathbb{Z}_6$.

   ii) Identifique os elementos neutros da adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_6$. Eles sempre existem?

   iii) Para todo $a \in \mathbb{Z}_6$ identifique o elemento inverso aditivo.

   iv) Para todo $a \in \mathbb{Z}_6 \setminus \{0\}$ identifique o elemento inverso multiplicativo, se existir.

   v) Mostre que $\mathbb{Z}_6$ não é um corpo.

c) Quais dos seguintes subconjuntos X_j são subespaços de $\mathbb{R}^n$? Em cada caso faça um desenho e explique porque é subespaço ou não.

   i) $X_1 := \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$;

   ii) $X_2 := \{(\alpha + 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$;

   iii) $X_3 := \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta$ reais não-negativos$\} \subset \mathbb{R}^2$.

d) Quais dos seguintes subconjuntos X_j de $\mathbb{R}^2$ são ou não são conjuntos linearmente independentes (LI)? Explique porque é ou não é.

   i) $X_1 := \{(1, 1), (-1, -1)\}$

   ii) $X_2 := \{(2, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 2)\}$

   iii) $X_3 := \{u, v, (1, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ onde $u, v \in \mathbb{R}^2$ são quaisquer vetores fixos.