Formas Quadráticas $(\mathbb{K} = \mathbb{R})$

1) Determine a matriz de cada uma das formas bilineares $\mathcal{b}$ abaixo, relativamente à base especificada: ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ produto interno canônico de $\mathbb{R}^4$)

a) $\mathcal{b} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$
$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$

base $\mathcal{U} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$ onde

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \xi_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) $\mathcal{b} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$
$(u, v) \mapsto \langle Au, v \rangle$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$

base canônica $\mathcal{E}^0$ de $\mathbb{R}^4$

c) $\mathcal{b} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$
$(u, v) \mapsto \langle Au, Bv \rangle$

$A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$

base canônica $\mathcal{E}^0$ de $\mathbb{R}^4$

d) $\mathcal{b} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$
$(u, v) \mapsto \langle u, a \rangle \langle v, b \rangle$

$a, b \in \mathbb{R}^4$

base can. $\mathcal{E}^0$ de $\mathbb{R}^4$.

(2) Prove que o conjunto $Q(E)$ das formas quadráticas é um subespaço vetorial

$$Q(E) \subset \mathcal{F}(E,\mathbb{R}) := \{\text{funções } f : E \to \mathbb{R}\}$$

da dimensão $\frac{n(n+1)}{2}$ onde $n = \dim E$.

(3) Sejam $\varphi, \psi \in E^* = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$. Prove que a forma bilinear antisimétrica

$$\varphi \wedge \psi : E \times E \to \mathbb{R}$$
$$(u,v) \mapsto \varphi(u)\psi(v) - \varphi(v)\psi(u)$$

é identicamente nula se, e somente se, um dos elementos dados φ, ψ é múltiplo do outro.

(4) Seja $b: E \times E \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear antisimétrica. Prove que as seguintes afirmações sobre b são equivalentes:

(i) Tem-se $b = \varphi \wedge \psi$ onde $\varphi, \psi \in E^*$.

(ii) $\exists$ base $\mathcal{U} = \{\xi_1, .., \xi_n\}$ de E t.q.

$$b(\xi_i, \xi_j) = 0 \quad \text{se } \{i, j\} \neq \{1, 2\}.$$

Conclua que todo forma bilinear antisimétrica em $\mathbb{R}^3$ é do tipo $b = \varphi \wedge \psi$.

E em $\mathbb{R}^4$?

(5) Dados $\varphi, \psi \in E^*$, considere a forma bilinear

$$\varphi \otimes \psi : E \times E \to \mathbb{R} \qquad \text{(o produto tensorial de } \varphi \text{ e } \psi\text{)}$$
$$(u, v) \mapsto \varphi(u)\psi(v)$$

Prove que:

a) $\varphi \otimes \psi = 0_{\mathcal{B}(E \times E)} \Rightarrow \varphi = 0_{E^*}$ ou $\psi = 0_{E^*}$

b) $\varphi \otimes \psi = \psi \otimes \varphi \Leftrightarrow$ um dos φ, ψ é multiplo do outro

Seja $\vartheta = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ base de E^*. Então:

c) $\{\varphi_i \otimes \varphi_j \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ é base de esp. vet. $\mathcal{B}(E \times E)$ das formas bilineares em E.

d) $\{\varphi_i \bullet \varphi_j := \varphi_i \otimes \varphi_j + \varphi_j \otimes \varphi_i \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ é base das formas bilineare simetricas $\mathcal{B}^{sim}(E \times E)$

e) $\{\varphi_i \wedge \varphi_j := \varphi_i \otimes \varphi_j - \varphi_j \otimes \varphi_i \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ é base das formas bilineares antisimetricas $\mathcal{B}^{asim}(E \times E) = \mathcal{A}^2(E)$