Operadores ortogonais $(K=\mathbb{R})$

① Dê os seguintes exemplos:

a) Uma matriz invertível cujas linhas são duas as duas ortogonais mas as colunas não são.

b) Uma matriz (não quadrada) cujas linhas são ortogonais e têm a mesma norma mas as colunas não são ortogonais.

c) Uma matriz cujas linhas (e colunas) são duas as duas ortogonais mas as normas das linhas são diferentes.

(2) Para quaisquer bases ON $\mathcal{U} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ e $\vartheta = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ de E, prove que existe um operador ortogonal $A \in \mathcal{L}(E)$ t.q. $A\xi_1 = \eta_1, \ldots, A\xi_n = \eta_n$.

Se as bases dadas são formadas pelos vetores

$$\xi_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \xi_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \xi_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \eta_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \eta_3 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

determine a matriz de A na base canônica $\mathcal{E}^0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(3) Se uma matriz triangular é ortogonal, prove que ela é diagonal e seu quadrado é igual à matriz identidade.

(4) Seja $a = (a_1\ a_2, \ldots\ a_n) \in M(1\times n)$ t.q. $a_1^2 + \ldots + a_n^2 = 1$.

Prove que $a^T a \in M(n\times n)$ é a matriz de uma projeção ortogonal.

Determine a imagem e o núcleo dessa projeção.

(5) Ache uma matriz ortogonal 4×4 cujos elementos são todos da forma $\pm \frac{1}{2}$.

⑥ Ache a decomposição polar

$$a = pu \quad \text{onde } p^T = p \text{ e } \langle pv, v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$$

u ortogonal

da matriz $a = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

⑦ Obtenha a decomposição polar da matriz

$$a = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$