Operadores auto-adjuntos

∀ exercícios: E é um esp. vet. de dimensão $n<\infty$ munido de produto interno

① Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjuntos t. q.

$$\langle Av, v\rangle = \langle Bv, v\rangle \quad \forall v \in E.$$

Prove que $A = B$.

② Seja $P \in \mathcal{L}(E)$ uma projeção ortogonal. Encontre uma raiz quadrada não-negativa de P. É única?

[lembre-se que $2P = I + S$ onde $S \in \mathcal{L}(E)$ é a reflexão ortogonal em torno de $F := \mathrm{Im}(P)$]

(3) Determine $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ t.q.

$$A\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\13\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A\begin{pmatrix}3\\-6\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\21\\33\end{pmatrix}$$

sabendo que o traço de A é 5.

(4) Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ t.q.

$$A\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-2\\-2\end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\10\\-2\end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix}.$$

Prove que $A^* = A$.

(5) Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjuntos.

Prove que $AB + BA$ é auto-adjunto.

Que se pode dizer sobre $AB - BA$?

(6) Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjuntos.
Prove que:

$AB = BA \iff \exists$ base ON formada por autovetores comuns a A e B.

[na aula já temos provado "$\Rightarrow$" como Le. 22]

(7) Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjuntos t.q. BA é diagonalizável.

Prove que AB também é diagonalizável.

- veja Lista 3a exc. 8
- $A \in \mathcal{L}(E)$ diagonalizável
  $:\iff \exists$ base $\mathcal{U}$ de E t.q.
  a matriz $a_{\mathcal{U}}$ de A
  é da forma diagonal.

Neste caso os elementos de $\mathcal{U}$ são os autovetores de A e a diagonal de $a_{\mathcal{U}}$ contem os autovalores de A.

BAMBOO PAPER