Subespaços invariantes

① Dado $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, determine os subespaços de $\mathbb{R}^3$ invariantes por

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v \longmapsto a \times v.$$

(veja lista 2e)

② Sejam $A, B : E \to E$ operadores lineares t.q. $AB = BA$ "A e B comutam".

Prove que:

a) $N(B)$ e $Im(B)$ são subespaços invariantes por A.

b) se F é um subesp. inv. por A, então $BF := \{Bf \mid f \in F\}$ é ainda um subesp. inv. por A.

(3) Dado $A \in \mathcal{L}(E)$ e um polinômio $p = p(x)$. Prove que

$$N(p(A)) \text{ e } Im(p(A))$$

são subespaços invariantes por A.

(4) Determine os autovetores e os autovalores do operador de derivação $D : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

(5) Seja $A \in \mathcal{L}(E)$, prove que

a) A invertível $\Leftrightarrow$ não tem autovalor 0

b) Se A é invertível, então os autovetores de A e A^{-1} coincidem. E os autovalores?

6) Seja $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o operador linear cuja matriz na base canônica tem todos os elementos iguais a 1.

- Prove que

a) $\text{posto}(A) = 1$

b) $\mathbb{R}^n = N(A) \oplus Im(A)$

c) os autovalores de A são 0 e n

d) os autovetores de A pertencem a $N(A)$ ou a $Im(A)$.

- Exiba uma base de $\mathbb{R}^n$ na qual a matriz de A tem n^2-1 zeros.

(7) Seja $A \in \mathcal{L}(E)$ onde $\dim E < \infty$, $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_k$ e cada F_i é um subesp. invariante por A.
Tome uma base $\mathcal{V}$ de E que seja uma união de bases dos F_i.
Determine a forma da matriz de A na base $\mathcal{V}$.

(8) Seja $A \in \mathcal{L}(E)$. Se E possui uma base formada por autovetores de A, prove que existe também uma base de E formada por autovetores de $A^*: E \to E$.
[veja exc. 7]

9) Seja $A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \mapsto (3x+y, 2x+2y).$$

a) Mostre que 4 e 1 são autovalores de A.

b) Ache uma base $\{u,v\}$ de $\mathbb{R}^2$ t.q.

$Au = 4u$ e $Av = v$.

c) Dada a matriz $a = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$,

ache uma matriz invertível

$p \in M(2\times 2)$ t.q. $p^{-1} a p = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(10) O determinante da matriz $a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

é por definição $\det a = \alpha\delta - \gamma\beta$.

Prove que

a) se $m = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, então $\det(am) = \det a \cdot \det m$

[cálculo direto]

b) $\det a \neq 0 \iff a$ inversível

c) $\det(m^{-1} a m) = \det a \quad \forall m$ inversível.

[Logo todas as matrizes do operador linear $A : E \to E$, com $\dim E = 2$, têm o mesmo determinante, o qual é chamado o determinante do operador A e denominado $\det A \; (:= \det a_{\mathcal{U}})$.]