Departamento de Matemática — 2º Semestre de 2013
Imecc Unicamp
Joa Weber

Álgebra Linear

MA327 – Turma B

Lista 2f – A Adjunta

Exercícios.

a) Use III §2 Prop. 14 a fim de encontrar uma inversa à direita para

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + 2y + 3z, 2x - y - z),$$

e uma inversa à esquerda para

$$B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \quad (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y, x + 3y, 4x + y).$$

b) Dado

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcule $\mathbf{a}\mathbf{a}^T$ e, a partir daí, encontre uma matriz $\mathbf{b} \in M(3 \times 2)$ tal que $\mathbb{1}_2$.

c) Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno. Seja P uma projeção em E: $P \in \mathcal{L}(E)$ e $P^2 = P$. Prove que P^* também é uma projeção em E. Dê um exemplo em que $P^* \neq P$.

d) Considere o produto interno em $M(n \times n)$ definido por

$$\langle a, b \rangle := \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} = \operatorname{tr} \mathbf{a}^T \mathbf{b}.$$

Mostre que o subespaço $\mathcal{A}$ das matrizes anti-simétricas é o complemento ortogonal do subespaço $\mathcal{S}$ das matrizes simétricas em $M(n \times n)$: $\mathcal{S}^\perp = \mathcal{A}$ e $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = M(n \times n)$.

e) Sejam F_1, F_2 subespaços de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Prove que

i) $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$ ii) $(F_1 \cap F_2)^\perp = F_1^\perp + F_2^\perp$.

f) Uma matriz quadrada $\mathbf{a}$ chama-se *diagonalizável* quando é semelhante a uma matriz $\mathbf{d} = (d_{ij})$ do *tipo diagonal* ($d_{ij} = 0$ se $i \neq j$), ou seja, quando existe $\mathbf{p}$ invertível tal que $\mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{p} = \mathbf{d}$. Prove que:

i) $\mathbf{a}$ diagonalizável $\Rightarrow$ $\mathbf{a}^T$ diagonalizável.

ii) Se a matriz do operador $A \in \mathcal{L}(E)$ relativamente a uma base de E é diagonalizável, então o é em relação à qualquer outra base.