Departamento de Matemática — Imecc Unicamp — 2º Semestre de 2013

Joa Weber

Álgebra Linear

MA327 – Turma B

Lista 2e – Produto Interno

Exercícios.

a) Considere a base $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ onde

$$v_1 = (1,1,1), \qquad v_2 = (1,-1,1), \qquad v_3 = (1,-1,-1).$$

Aplique o método de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$. Determine a matriz $\mathbf{p}$ de passagem da base $\mathcal{V}$ para a base $\mathcal{U}$.

b) Determine as bases obtidas de $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ pelo processo de Gram-Schmidht aos seguintes casos:

i) $v_1 = (3,0,0), \quad v_2 = (-1,3,0), \quad v_3 = (2,-5,1).$

ii) $v_1 = (-1,1,0), \quad v_2 = (5,0,0), \quad v_3 = (2,-2,3).$

c) Prove que $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \mapsto 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2,$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

d) Seja E um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Prove que para todo $u, v \in E$:

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\,|u|^2 + 2\,|v|^2 \tag{1}$$

onde $|\cdot| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ é a norma induzida. Interprete (1) geometricamente.

e) Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno. Seja $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de E.

i) Dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, prove que existe um único vetor $w \in E$ tal que

$$\langle w, v_1 \rangle = \alpha_1, \; \ldots, \; \langle w, v_n \rangle = \alpha_n.$$

ii) Prove que existe uma única base $\mathcal{W} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ de E tal que

$$\langle w_i, v_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i,j = 1, \ldots, n.$$

Defina $a_{ij} := \langle v_i, v_j \rangle$ e $b_{ij} := \langle w_i, w_j \rangle$, onde $i,j = 1, \ldots, n$. Prove que as matrizes $\mathbf{a} = (a_{ij})$ e $\mathbf{b} = (b_{ij})$ são inversas uma da outra.

f) Sejam $u = (2, -1, 2)$, $v = (1, 2, 1)$, $w = (-2, 3, 3)$. Determine o vetor de $\mathbb{R}^3$ que é a projeção ortogonal de w sobre o plano gerado por u e v

g) Prove que o produto vetorial $\cdot \times \cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido na Lista 2c, exercício c), satisfaz:

   i) $u \times v = -v \times u$
   ii) $u \times (v + \tilde{v}) = u \times v + u \times \tilde{v}$
   iii) $u \times (\alpha v) = \alpha(u \times v)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$
   iv) $u \times v = 0 \iff \{u, v\}$ é um conjunto L.I.
   v) $u \times v$ é ortogonal a u e a v
   vi) $e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2.$