Departamento de Matemática — 2º Semestre de 2013
Imecc Unicamp
Joa Weber

Álgebra Linear

MA327 – Turma B

Lista 2c

Definição 1. Duas matrizes quadradas $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são *semelhantes* se, e somente se, existe uma matriz invertível $\mathbf{p}$ tal que $\mathbf{b} = \mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{p}$

Exercícios.

a) Mostre que se $\mathbf{a}$ e $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{p}$ são matrizes $n \times n$ semelhantes, então existe $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathbf{a}$ e $\tilde{\mathbf{a}}$ são matrizes de A relativamente a duas bases de $\mathbb{R}^n$.

b) Qual é a matriz, na base canônica, do operador $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ determinado por

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad A\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}?$$

c) O *produto vetorial* de dois vetores $v = (x, y, z), w = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^3$ é definido por

$$v \times w := \begin{pmatrix} y\tilde{z} - z\tilde{y} \\ z\tilde{x} - x\tilde{z} \\ x\tilde{y} - y\tilde{x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Dado $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, determine a matriz $\mathbf{a}$ (relativamente à base canônica $\mathcal{E}$) do operador

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad v \mapsto v \times u.$$

Descreva geometricamente o núcleo desse operador e obtenha a equação da sua imagem.

d) Dados $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, mostre que se

$$e_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots + a_{nj}v_n, \quad j = 1, \ldots, n,$$

então $\mathbf{a} = (a_{ij})$ é a matriz inversa da matriz que tem $v_1, \ldots, v_n$ como vetores-coluna.

e) Considere as transformações lineares

$$A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R}), \qquad \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \mapsto \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n,$$

e

$$B : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad p(x) \mapsto \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \\ \dots \\ p(n) \end{pmatrix}.$$

Determina a matriz de $BA : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ (na base canônica $\mathcal{E}$) e prove que é uma matriz invertível.

f) Sejam E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $n := \dim E < \infty$. Suponha que $A \in \mathcal{L}(E)$ não seja um múltiplo do operador identidade, i.e., $A \neq \alpha I$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Mostre que existem bases de E do tipo $\mathcal{U} = \{u, Au, \dots\}$ e $\mathcal{V} = \{v, 2Av, \dots\}$ tais que as matrizes $\mathbf{a}_{\mathcal{U}}$ e $\mathbf{a}_{\mathcal{V}}$ de A relativamente $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são diferentes: $\mathbf{a}_{\mathcal{U}} \neq \mathbf{a}_{\mathcal{V}}$.

ii) Conclua que as *homotetias* (operadores da forma αI) são os únicos cuja matriz não depende da base escolhida.

iii) Conclua que as matrizes do tipo $\alpha \mathbb{1}_n$ são os únicos que comutam com todas matrizes invertíveis $n \times n$.

[ad i): Conclua $n \geq 2$. Mostre que existe conjunto L.I. da forma $X = \{v, Av\}$. Depois estenda X para receber uma base $\{\xi_1 = v, \xi_2 = Av, \dots, \xi_n\}$ de E.]

Definição 2. O *traço* de $\mathbf{a} \in M(n \times n)$ é a soma dos elementos da sua diagonal:

$$\operatorname{tr} \mathbf{a} := a_{11} + \cdots + a_{nn} \in K.$$

Lema 1. *Dadas matrizes* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M(n \times n)$*, temos que* $\operatorname{tr}(\mathbf{ab}) = \operatorname{tr}(\mathbf{ba})$.

g) Seja $\mathbf{c} \in M(n \times n)$ uma matriz de posto 1.

i) Prove que: $\mathbf{c}^2 = (\operatorname{tr} \mathbf{c})\mathbf{c}$. $\qquad (*)$

ii) Dado $n \geq 2$, generalize: $\mathbf{c}^n = (\operatorname{tr} \mathbf{c})^{n-1}\mathbf{c}$.

[ad i): Observe que para provar $(*)$ se pode mudar a base de K^n e provar $(*)$ para a nova matriz $\tilde{\mathbf{c}}$. Lembre-se: posto$(\mathbf{c}) = 1$. Escolha base apropriada de K^n.]

h) Sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ bases finitas do espaço vetorial E. Sejam

$$\begin{aligned} \mathbf{p}: &\quad \text{a matriz de passagem de } \mathcal{U} \text{ para } \mathcal{V}, \\ \mathbf{q}: &\quad \text{a matriz de passagem de } \mathcal{V} \text{ para } \mathcal{W}. \end{aligned}$$

Prove que

$$\begin{aligned} &\mathbf{pq} \text{ é a matriz de passagem de } \mathcal{U} \text{ para } \mathcal{W}, \\ &\mathbf{p^{-1}} \text{ é a matriz de passagem de } \mathcal{V} \text{ para } \mathcal{U}. \end{aligned}$$

i) Sejam $A : E \to F$ e $B : F \to G$ transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita.

   i) Prove que: B injetiva $\Rightarrow$ posto$(BA) =$ posto(A).

   ii) Que condição sobre A assegura que posto$(BA) =$ posto(B)?