Departamento de Matemática — 2º Semestre de 2013
Imecc Unicamp
Joa Weber

Álgebra Linear

MA327 – Turma B

Lista 2b

Exercícios.

a) No plano $\mathbb{R}^2$, considere as retas F_1 e F_2, definidas respectivamente pelas equações $y = ax$ e $y = bx$, onde $a \neq b$.

   i) Exprima $x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ como soma de um vetor de F_1 e um de F_2.

   ii) Obtenha a matriz (em relação à base canônica) da projeção $P_{F_1,F_2} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

   iii) Encontre a matriz da reflexão $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em torno da reta F_2, paralamente a F_1.

b) Exprima $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ como soma de um vetor do plano F_1, cuja equação é $x+y-z = 0$, com um vetor da reta F_2, gerada pelo vetor $(1, 2, 1)$. Conclua que $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$. Determine a matriz (em relação à base canônica) da projeção $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que tem imagem F_1 e núcleo F_2.

c) Dado $P \in \mathcal{L}(E)$, prove ou desprove:

   i) $E = \mathrm{N}(P) \oplus \mathrm{Im}(P) \quad \Rightarrow \quad P$ é projeção de E.

   ii) $E = \mathrm{N}(P) + \mathrm{Im}(P) \quad \Rightarrow \quad P$ é projeção de E.

   iii) P é projeção $\quad \Leftrightarrow \quad I - P$ é projeção.

   iv) P é projeção $\quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{N}(P) = \mathrm{Im}(I - P) \quad \big(\Leftrightarrow \quad \mathrm{N}(I - P) = \mathrm{Im}(P)\big)$.

d) Sejam $F_1, F_2 \subset E$ subespaços com $\dim F_1 + \dim F_2 = \dim E < \infty$. Prove que

$$E = F_1 \oplus F_2 \iff F_1 \cap F_2 = \{0\}.$$

e) Sejam $P_1, \ldots, P_n : E \to E$ operadores lineares tais que

$$P_1 + \cdots + P_n = I \quad \text{e} \quad \forall i \neq j : \ P_i P_j = 0.$$

Prove que estes operadores são projeções.

f) Sejam $P, Q \in \mathcal{L}(E)$ projeções, prove que as seguintes afirmações são equivalentes:

   i) $P + Q$ é uma projeção;

   ii) $PQ + QP = 0$;

   iii) $PQ = QP = 0$.

   [Para provar que ii) $\Rightarrow$ iii), multiplique à esquerda, e depois à direita, por P.]

g) Seja $E = F_1 \oplus F_2$. O *gráfico* de uma transformação linear $A : F_1 \to F_2$ é o subconjunto $G = \operatorname{graph} A := \{v + Av : v \in F_1\}$ de E. Prove que

   i) G é um subespaço de E.

   ii) A projeção $P_{F_1,F_2} : E \to F_1$, restrita a G, define um isomorfismo entre G e F_1.