Departamento de Matemática
Imecc Unicamp
Joa Weber

2º Semestre de 2013

Álgebra Linear

MA327 – Turma B

Lista 1d

Exercícios.

a) Dados os vetores

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix},$$

decida se existe ou não um operador linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$Au_1 = v_1, \qquad Au_2 = v_2, \qquad Au_3 = v_3.$$

Mesma pergunta com $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ e com $v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

b) Tem-se uma transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Sabe-se que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pede-se a matriz $\mathbf{a} = \mathbf{a}_A \subset M(n \times n)$ de A relativamente às bases canônicas $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de $\mathbb{R}^4$.

c) A expressão geral de um funcional linear $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é

$$\phi(x, y, z) = ax + by + cz.$$

Dados os vetores

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

determine a, b, c de tal modo que se tenha $\phi u = 1$, $\phi v = 0$ e $\phi w = 0$.

d) Seja $\mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ uma base do espaço vetorial E. Para cada $i \in \{1, 2 \dots, n\}$, seja $\phi_i \in \mathcal{L}(E; \mathbb{R}) =: E^*$ o funcional determinado (conforme II§1 Teorema 7) pelas condições

$$\phi_i\beta_1 = 0, \quad \dots, \quad \phi_i\beta_{i-1} = 0, \quad \phi_i\beta_i = 1, \quad \phi_i\beta_{i+1} = 0, \quad \dots, \quad \phi_i\beta_n = 0.$$

Prove que $\mathcal{B}^* := \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ é uma base de E^* (chamada a *base dual* da base $\mathcal{B}$). Mostre que se tem $\phi_i v = v_i$ para todo $v = v_1\beta_1 + \cdots + v_n\beta_n \in E$.

e) Considere a base $\mathcal{B} = \{u, v, w\}$ de $\mathbb{R}^3$, onde

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Seja $\mathcal{B}^* = \{\phi, \psi, \chi\} \subset (\mathbb{R}^3)^*$. a base dual da base $\mathcal{B}$. Calcule as matrizes 1×3 que correspondem a $\phi, \psi, \chi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$.

f) Seja $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ um conjunto L.I. no espaço vetoral E de dimensão finita. Dados arbitrariamente os vetores $w_1, \dots, w_m$ em um espaço vetorial F, prove que

i) existe uma transformação linear $A : E \to F$ tal que

$$Av_1 = w_1, \dots, Av_m = w_m;$$

ii) A é única $\iff$ X é uma base de E.

g) Sejam $R, P, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ respectivamente a rotação de 30° em torno da origem, a projeção ortogonal sobre a reta $y = \frac{1}{3}x$ (notação na aula: $L_{\frac{1}{3}}$) e a reflexão em torno da mesma reta. Dado o vetor $v = (2, 5)$, determine os vetores Rv, Pv, Sv.

h) Considere os operadores lineares $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$R = R_{30^\circ}, \qquad S = S_{L_2}, \qquad P = P_{L_2}.$$

i) Mostre que se tem $PS = SP = P$.

ii) Verifique a igualdade $RSR = S$.

iii) Mostre que R não comuta com S nem com P.

iv) Determine todos os vetores v tais que $RPv = 0$ e $RPv \neq 0$.

i) Considere as transformações lineares $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dados por

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + y \end{pmatrix}, \qquad B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + (a-1)y + (1-a)z \\ -bx + (1-b)y + bz \end{pmatrix}.$$

Determine o operador $BA \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

(Dica: use as matrizes $\mathbf{a}_A$ e $\mathbf{a}_B$ que correspondem a A e B respectivamente.)