Departamento de Matemática — 2º Semestre de 2013
Imecc Unicamp
Joa Weber

Álgebra Linear

MA327 – Turma B

Lista 1c

Exercícios.

a) Mostre que

i) as matrizes $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ abaixo são L.I.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) os polinômios abaixo são L.I.

$$\begin{aligned} p = p(x) &= x^3 - 5x^2 + 1, \\ q = q(x) &= 2^4 + 5x - 6, \\ r = r(x) &= x^2 - 5x + 2. \end{aligned}$$

b) Seja $E = F_1 \oplus F_2$. Se $\mathcal{B}_1$ é uma base de F_1 e $\mathcal{B}_2$ é uma base de F_2, prove que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de E

c) Mostre que os polinômios 1, $x - 1$ e $x^2 - 3x + 1$ formam uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Exprima o polinômio $2x^2 - 5x + 6$ como combinação linear dos elementos dessa base.

d) Seja $\mathcal{S} \subset M(n \times n)$ o subconjunto das *matrizes simétricas*:

$$\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow (a_{ij}) = (a_{ji}) \in M(n \times n)$$

Para cada par (i, j) de números naturais com $1 \le i \le j \le n$, seja $\mathbf{s}_{ij}$ a matriz $n \times n$ cujos elementos nas posições ij e ji são iguais a 1 e os demais são zero. Prove que estas matrizes constituem uma base para o subespaço vetorial $\mathcal{S} \subset M(n \times n)$, onde $M(n \times n)$ é o espaço das matrizes reais $n \times n$. De modo análogo, obtenha uma base do subespaço $\mathcal{A} \subset M(n \times N)$ das *matrizes anti-simétricas* definido por $(a_{ij}) = (-a_{ji})$. Conclua que

$$\dim \mathcal{S} = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Lembre-se que $\dim M(n \times n) = n^2$. Conclua que

$$M(n \times n) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

e) As matrizes $\mathbf{t} = (t_{ij}) \in M(n \times n)$ tais que $t_{ij} = 0$ quando $i < j$ são chamadas *triangulares inferiores*. Prove que elas constituem um subespaço vetorial $L \subset M(n \times n)$, obtenha uma base para L e determine a sua dimensão.

f) Obtenha uma base e consequentemente determine a dimensão de cada um dos seguintes subespaços de $M(n \times n)$:

   i) Matrizes cujo *traço* (soma dos elementos da diagonal) é zero.

   ii) Matrizes cuja primeira e última linha são iguais.

   iii) Matrizes cuja segunda linha e terceira coluna são iguais.

g) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ subconjuntos L.I. do espaço vetorial E.

   i) Se $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$, prove que $X = \bigcup X_n$ é L.I.

   ii) Se cada X_n tem n elementos, prove que existe um conjunto linearmente independente $\tilde{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ com $x_j \in X_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

   iii) Supondo $E = \mathbb{R}^{(\infty)}$ e admitindo as hipóteses dos itens anteriores, é verdade que $X = \bigcup X_n$ seja uma base de E?

h) Se o conjunto de vetores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é L.I., prove que o mesmo se dá com o conjunto $\{v_1, v_2 - v_1, \ldots, v_m - v_1\}$. Vale a recíproca?

i) Sejam $F_1, F_2 \subset E$ subespaços de dimensão finita. Obtenha uma base do subespaço $F_1 + F_2$ que contenha uma base de F_1, uma base de F_2 e uma base de $F_1 \cap F_2$.